吴学谋著

逼近转化论与数学中的泛系概念

APPROXIMATION TRANSFORMATION THEORY AND THE PANSTEMS CONCEPTS IN MATHEMATICS

GSPM

吴学谋著

逼近转化论与数学中的泛系概念

APPROXIMATION TRANSFORMATION THEORY AND THE PANSTEMS CONCEPTS IN MATHEMATICS

湖南科学技术出版社

逼近转化论与数学中的泛系概念

吴 学 谋 著

责任编辑：曾平安

封面设计：郑大正

*

湖南科学技术出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷二厂印刷

*

1984年12月第1版第1次印刷

开本：850×1168毫米 1/32　印张：13.25　插页：1　字数：349,000

印数：1——3,600

统一书号：13204·106　　定价：4.70元

前　言

作者从事数学研究已经三十余年了。本书是作者在长期研究中所得到的一部分数学新成果的总结。它是用一种近乎统一的想法对数学多种专题进行分析的尝试。

逼近转化论与泛系方法论是五十年代和七十年代，在我国先后发展起来的两个横断性数学新研究课题。作者是创始人之一。在著作中，作者发表了一些不同于国际文献上的新研究成果，得到了许多新型的定理，同时亦用新观点、新方法或新形式推广、补充或发展了国际上几十种已有定评的研究。通过反复地修改、充实和提高。但愿作者的劳动化作一支歌，加入初学者的合唱，献给祖国科学的春天！

目　录

绪 论

数学中的泛系概念

科学技术的发展，促进了学科的急剧分化，也促进了学科在新的基础上的辩证综合。不受传统分题的束缚，从不同的角度考虑学科的交缘或统一，日益得到了广泛的重视。现代科学技术的辩证综合倾向与整体化趋势，大大促进了许多新的综合性学科、交缘学科、横断学科、软科学的诞生与发展。

现在人们已认识到，广义的系统、转化、对称及其关系是涉及许多学科分支和事物机理的概念。它们的数学研究有希望把许多科学原理、概念和方法联系起来。这是涉及数理科学、系统科学与方法论的一种交缘或横断性的研究。这种跨学科的多面向的研究，现在就叫做泛系方法论，也叫做泛系理论或泛系分析。

事物集E及其一定的联系H(也叫泛结构，记为$H\subset J_M[E]$，M为参变集）形成的统一体$S=(E,H)$，就是形式泛系。用它可以描述广义的系统、转化与对称。泛系或者指形式泛系，或者指广义的“系统·转化·对称”的统称，但是更主要的是作为一种研究群的标名。广义的系统与转化概念侧重事物的联系与运动。广义的对称或泛对称概念侧重的是变与相对不变、自由与约束的联系与转化。像联系运动一样，泛对称也可证明是事物中普适的概念。原型与模型、形式与内容、质与量、可能与现实、一般与特殊、抽象与具体、肯定与“否定的否定”等等，这些相当普遍的关系的某些方面都具有泛对称性。一般的系统与转化概念本身就潜含了泛对称性。事物关系中的一些基本关系有宏微、动静、局整、

形影、因果、观控、串并、模拟、生克、泛序(包括优劣与主次)、集散、异同等，它们简称为泛系关系，它们的某些形式往往可转化为泛对称．与逼近论和拓扑学有关的基本概念是远近关系，它可用泛系关系从不同角度进行模拟，因而也与泛对称的概念联系起来．另外，不同泛对称的转化可看成一种更高级形式的泛对称，叫做 N 泛对称．它是许多科学原理、规律与方法表现的共性形式．

数学是辩证的辅助工具和表现方式，是研究事物的形式与量的侧面的科学．学科间交流的活跃、不同领域材料的综合整理，向科学本身提出了许多本质上的新问题，也刺激了数学对新的基础的研究．数学也像其它学科一样，其中绝大部分内容都是在研究某些系统、转化与泛对称的内容，只不过更侧重形式与量的方面和更发挥了传统数学抽象性的特点罢了．数学与泛系理论从不同的角度、不同的剖面来分析事物，并横贯了不同的科学问题．另外，泛系理论也对数学的不同研究提出了一些新的、近乎统一的看法．

(1) 几乎现代所有的数学研究都是研究形式泛系 (E,H)，特别是H为一级或二级联系或关系，$H\subset G[E)$，或$H\subset G^2[E)$ (具体定义见第九章)．更多地是研究一种泛代数系统：$H\subset W\uparrow G$，$G=\cup E\uparrow I_\lambda$，$I_\lambda$为参量集族．

(2) 大多数重要的数学概念与定理表现为泛对称，特别是 N 泛对称．例如，Nöether 型定理研究规范不变性与守恒性两类泛对称的转化；动力体系的一般理论中，主要研究的各种稳定性与周期性（两类泛对称）的转化等．拓扑学中的基本转化是连续映射与开映射，它们分别表征对开集的赋形守恒性与投影守恒性两类泛对称。几乎一切重要的拓扑学定理，都可表现为由上述两类泛对称诱导出的其它类型的泛对称．例如，开集赋形守恒导致各种分离性、紧致性、连通性、收敛性、闭性、闭包性、局部联通性、局部凸性等，都是投影守恒的．在一定条件下，也导致闭性等赋形守恒，并对自我映射保证不动点存在，等等．代数学与泛

系分析也证明了一系列的守恒性定理与N泛对称定理. 而绝大多数的数学推广都表现为泛系模拟与部分保构扩展这类泛对称.

(3) 泛系关系的研究与应用，涉及当代数学的所有专题. 而形影关系与局整关系又是生成各种数学结构的基础的关系，特别形影关系的研究与应用，部分统一了诸如抽象代数、数理逻辑、积空间理论、Fuzzy 集论的许多问题，也涉及超复数及某些分析概念的推广.

(4) 泛系理论引入了泛系变量的概念，它是一种特化的泛对称性. 它既是实函数论中的可测函数；又是拓扑学中的连续映射；还是概率论中的随机变量；也是Fuzzy 集论中的乏晰变量与乏晰集的一种概括.

(5) 一种广义的形式化可定义为共同的影系统的建立或提取. 这对数学的特点提出了一种新的解释模型.

(6) 泛系理论引入的泛模拟概念代表了当代数学研究中非常广泛的一类转化.

在历史上，欧氏几何、笛卡儿解析几何、数理逻辑、集合论、Klein 的 Erlangen 提纲、Birkhoff 的格论、Bourbaki 学派的结构观、范畴论、泛函分析、代数模论、泛代数学等，都是从不同角度对数学研究进行统一或部分的统一的理论. 而泛系理论则考虑了一些新的观点，同时研究了许多不专属纯数学的问题.

本书具体地研究了许多数学专题，它们都可由与泛系理论相联系的一种近乎统一的想法串联起来.

空间、代数结构、变域等都属于一般的系统；函数、算子、映射、空间的变换、性质与关系的变动等，都属于事物的转化；而逼近、误差、稳定性、连续性、有界性、一致性、逼近度与残缺度、解析性与保角性、方程、嵌入限定与扩展、协调与周期性等等，都在不同形式下含有泛对称. 这些系统之间的转化，以及转化的转化和泛对称的转化，就是横贯不同专题而近乎统一的主题. 按传统分题来说，本书有属于泛函分析的新的探索；有差分方程、限单元法、样条函数逼近、变分方法等数值数学的一些新

的基础研究；有解析函数与等角写象的边界性质和泛函空间的嵌入定理；有复函数构造具体转化原则的推导和高维多项式逼近的探讨；也有代数系统和泛系理论本身某些概念的介绍。

本书中，我们引入了赋半序范空间的概念。它以赋范空间及拓扑空间为特例，并兼顾两者的特点，研究了算子方程及空间转化的稳定性问题，求得了方程或空间转化的扰动误差（原收敛性，原误差，包括截断误差和含入误差的概念）到方程解的误差（次收敛性、次误差）的定量转化关系。对方程、空间转化、算子、解等，在一定条件下都可用半序空间的元来赋范。这时，对于线性赋半序范空间的线性转化族的一致连续性与一致有界性等价，而稳定性与逆转化一致有界性等价，并且次误差与原误差是同级的。对于线性拓扑空间之间的线性转化族，建立了原收敛性、稳定性、次收敛性、逆一致有界性等泛对称的转化关系。对于差分方程及泛函方程的稳定性，以 Neŭmann, Lax, Richtmyer, Mignot, Канторович, Люстерник, Мейман, Рябенький, Филиппов 的已知各种结果为特例，并把各种稳定性以及有关证明统一起来。

完全性与封闭性是两种泛对称性，Banach定理指出它们是等价的。推广于赋半序范空间线性半群不完全、不封闭的情况，新的泛对称性用残缺度与逼近度来度量，本书证明了它们是相等的。

我们还精密化了 Михлин 关于 Галёркин 方法的收敛性定理，并求出了误差估计。在相同条件下，按能量范数，Галёркин解的误差与能量最优逼近度是同级的，相当于两种泛对称度量的转化关系。对特征值也得到类似的结果，并且讨论了 $A_0^{-1}K$ 型算子的全连续性及对一些用于微分方程的条件，对一般椭圆型方程的估计比Ильин的结果好。

算子变分、互易集与互易算子、凸算子等概念的引入，使古典变分法得到了进一步的讨论。所得到的一些关系，即使在传统泛函的情况下，也是新的。且把通常二次泛函的极值定理，推广到了

凸算子．我们还引入了算子方程新型的H广义解，它与变分问题有一种自然的联系，这可看成是另一组泛对称之间的相互转化．这种转化还可以把单边变分原理概括进来．

Banach代数和赋范环可看成一种数域的推广，是一种新的超复数．在其上的非线性泛函分析，可因这种观点的引入而带来某些新的面貌．它引导到一类算子方程的解法，并在新的形式下继承了古典分析与古典函数论的某些内容．其中，环的可交换性、微分或变分的方向无关性、积分的路径无关性和某些方程的可解性，这四种泛对称有一种内在的联系．赋范环微积的进一步推广即为泛环和解析泛系逻辑．

本书的一个中心是基于MSP转化原理建立一种可叫做逼近转化分析的理论，它是一种特化的、有丰富具体内容的泛对称转化分析．P 转化原理实际上是许多（不同范数意义下的误差）转化定理、反定理（包括某种 Paley–Wiener 型定理与抽样定理）和许多嵌入定理（包括有关函数的扩展及边界性质）的有关算法的一种统一概括．例如在一定条件下，由 $\|f-p_\lambda\|$ 的已知估计即可对f所对应或等价的（可能属于另一空间的）某f_* 的 $\|f_*-Hp_\lambda\|_*$ 或$\|f_*\|_*$进行估计．H 为某种运算或算子，$\|\cdot\|_*$为另一对应范数．

基于MSP转化原理及其它具体的分析，从新探讨了多变量实函数构造、泛函空间的嵌入不等式、高维直交多项式级数、三角插补等问题．除得到许多新型的结论外，我们还可得到Никольский, Бернштейн, Тиман, Ильин, Харрик 及 Zygmund, Marcinkiewicz 等的一些定理的改进与推广．其中有一类反定理不是由连续模的形式给出的，而且三角插补还给出了应用第四转化引理的典型例子．

本书还发展了带域调和分析．包括带域解析函数的边界性质；复数域上的 Fourior 变换；解析概周期函数；整函数的逼近和用逼近论方法证明嵌入不等式等问题．基于转化概念来研究带域函数是一种新的作法，这一工作包括得到 Besicovitch, Paley, Wiener, Wyle 和 Степанов 等的一些结果的改进与推广．

现代为计算数学及函数论的基础研究所关注的有限单元法与Spline逼近，都是一些特殊的分区多项式逼近．我们可以利用转化原理来研究高维分区多项式逼近在各种意义下的误差，同时可得到高维Taylor级数余项估计用连续模来表示的新形式．在此基础上，可解决Walsh和Ahlberg所提出的Spline误差问题，而且比预计的更确切．

本书许多结果是为了建立复函数构造的转化理论而得到的．从而研究了一系列关于解析函数和等角写像的边界性质和嵌入不等式，且得到许多新的Марков型定理．将这些定理可用于转化定理与反定理，而许多反定理又产生了新型的嵌入定理和函数延拓定理．书中还有一类直接定理和反定理，也是不用连续模形式给出的．另外，我们推广了一种插补方法，发展了分区有理多项式逼近与统一逼近多项式．利用边界性质的具体结果与转化原理，我们建立了Faber级数的误差转化分析．包括多连通集或不连通集上统一逼近在不同泛函空间中的误差估计．书中另外一些结果包括下列工作的推广与补充：Келдыш和Мергелян在逐段光滑区域(或曲线)和一般Jordan区域上的直接定理，及关于Bieberbach多项式的误差估值；Walsh，Sewell，Russell关于误差转化，及用有界函数来逼近的工作；Смирнов，Carleman与Szegö关于直交多项式级数的研究；Kellogg与Seidel关于等角写像的定理；Montel，Tsuji和Loomis关于正规族和调和函数的结果；Fatou关于Poisson积分的定理；Babuska的不等式；Cauchy型积分的定理；用非多项式、非指数型函数逼近的研究；等等．

本书也部分地简括和介绍了泛系理论的概念与五十多个定理．并发展了泛系逼近的概念．本书将传统的逼近推广为泛模拟之类的广义逼近；将逼近的程度变为了某些性状或结构的相对保持，因而变成了泛对称概念的特殊形式．且逼近的转化变成了N泛对称的模式．在这种框架下，我们把重要的隐函数定理发展为隐泛系定理；把不动点定理发展为不动泛系定理；并研究有微结构的不动泛系．同时，发展了泛权网络分析与突变分析；推广了

Kakutaki定理、Dilworth 型定理、Bellman原理与大系统的解耦分解原理等等。另外，由于泛系方法论在学科发展与应用中日益显得重要，我们在附录中定性地综述了泛系方法论的背景、内容与意义。

第一章

序结构　泛对称与转化关系

§1. 半序空间的一些基本概念

序结构或半序结构是具有自返性($x\leqslant x$)、反对称性($x\leqslant y$, $y\leqslant x$, 则$x=y$)、传递性($x\leqslant y$, $y\leqslant z$, 则$x\leqslant z$)的一种二元关系$\leqslant$.

设E为域K上的线性空间，其上定义了半序结构$\leqslant$. 又设域K也是半序的，$\lambda\geqslant 0$, $\lambda\in K$有意义。若$x\to x+z$和$x\to\lambda x$是保序的，则E叫做半序线性空间。

E中的零元记为θ_E，有时也简记为O(E_0的零元有时记为θ_0或O_0)，则E中$\geqslant\theta_E$的元形成一锥。反之，任何E中之锥也引伸出某种半序关系，这就是半序线性空间的锥序转化关系。锥是一种变域的约束，锥与序表述一种特定的泛对称。

若对于任意的x, $y\in E$, 存在$z\in E$, 使得$x\leqslant z$, $y\leqslant z$, 并且如果$x\leqslant u$, $y\leqslant u$, $u\in E$, 必然$u\geqslant z$。这时半序线性空间E就叫做有限备的，并记$z=x\vee y$或$z=\sup(x,y)$。同时，称z为x与y的结或端；并定义$x_+=x\vee 0$, $x_-=(-x)\vee 0$, $|x|=x\vee(-x)$，分别叫做x的正部、负部和绝对值。

对于有限备的半序线性空间E中任意一组元素$(x_t)_{t\in I}$ (I为任意标号集)，满足关系式$u\geqslant x_t$, $t\in I$ (相应地$u\leqslant x_t$)，则$u\in E$叫做(x_t)的上界(相应地叫做下界)。若(x_t)有上界，并且存在

最小的上界x^*，则x^*叫（x_t）的结或上端．类似地定义交或下端x_*，并表成

$$x^*=\bigvee_{t\in I}x_t=\sup_{t\in I}x_t,\quad x_*=\bigwedge_{t\in I}x_t=\inf_{t\in I}x_t.$$

若对任何有界的（x_t）都有上端，则E叫做备的半序线性空间．当I为可数集时，则E叫做σ备的半序线性空间．

若I为定向半序集，$(x_t)\in(\uparrow_t)$，$(x_t)\in(\downarrow_t)$分别表示（x_t）对t是升定向列和降定向列．一般地，$(f)\in(\uparrow_{(I)},\ \downarrow_{(J)})$表示$(f)$对定向标号集族（$I$）中每个标号是升定向的，而对（$J$）中每一标号是降定向的．例如$(f)\in(\uparrow_{x,y},\ \downarrow_z)$表示依赖于定向标号$x$，$y$，$z$的元素族（$f$）对$x$，$y$是升定向的，而对$z$是降定向的．

若$(x_t)\in(\uparrow_t)$，$\sup x_t=c$，则记$x_t\uparrow c$．类似定义$x_t\downarrow c$．

若有$\varepsilon_t\downarrow 0$，$|x_t-x_0|\leqslant\varepsilon_t$，则称（$x_t$）为(0)敛于$x_0\in E$，并记为$(0)-\lim\limits_{t\in I}x_t=x_0$或$x_t\xrightarrow{(0)}x_0$．若(0)极限存在，它必是唯一的．

E中有上下界的集也简称是(0)有界的．对于σ备的E，可像通常分析一样建立(0)上极限与下极限．而且，可证有(0)极限的充要条件是(0)上下极限相等；另一充要条件是Cauchy判别法成立：$(0)-\lim\limits_{n,m\to\infty}|x_n-x_m|=\theta_E$．

可以像传统数学分析一样，建立级数收敛和函数连续性的概念，也可以讨论在测度空间中取值于有限备或σ备的半序线性空间的抽象函数的积分．

设（ε）是有限备的半序线性空间E中某一正元素族，I为某定向序集，（x_t）为（ε）收敛于$x_0\in E$．指对任何给定的$\varepsilon\in(\varepsilon)$，存在$t_0=t_0(\varepsilon)\in I$，当$t\geqslant t_0$时，有$|x_t-x_0|\leqslant\varepsilon$．这时记$(\varepsilon)-\lim x_t=x_0$或$x_t\xrightarrow{(\varepsilon)}x_0$．显然，这种形式的极限不一定是唯一的．在一定条件下，例如，$\inf(\varepsilon)=\theta_E$，则可保证唯一性．

有限备的线性半序空间E中的集合M叫做有界的(ε)．指对于任何$\varepsilon\in(\varepsilon)$，存在$-\alpha\in K$，$\alpha>0$，$\alpha=\alpha(\varepsilon)$，使得对$x\in M$有$|x|<$

$\alpha\varepsilon$，且α与x无关。

若要讨论几组不同的(ε)时，我们将在(ε)周围标以适当的记号以示区别。

§2. G空间　等价定理与线性半群

2.1 设E为某一集合，F为某一有限备半序线性空间，$\rho:E^2\to F$对称（即$\rho(x,y)=\rho(y,x)$），则三元组（E,F,ρ）或E称为G空间或半序距离空间。这时F中的(0)收敛与（ε）收敛概念以及有界概念就可引伸出E中相应的概念。例如，x_n，$y\in E$，$(0)-\lim x_n=y$，是指$(0)-\lim\rho(x_n,y)=\theta_F$。

若$\rho\geqslant 0$，则E叫G^+空间。若$\rho(x,y)=\theta_F$与$x=y$等价，则E叫G^{++}空间。

G空间是一类与一般拓扑空间一样广泛的系统，而且一般不能由后者包括。G空间有某种度量，有某种形式收敛的概念，所以便于处理一些数学问题。

设(ε)是F中某些正元的集合，四元组（E，F，ρ，(ε)）或E叫（ε）G空间。类似定义$(\varepsilon)G^+$与$(\varepsilon)G^{++}$空间。在$(\varepsilon)G$空间中，用(ε)来固定其收敛概念。

设给定两个$(\varepsilon)G$空间$(E_i,\ F_i,\ \rho_i,\ (\varepsilon)_i)$，其中$i=1,\ 2$；$A$：$E_1\to E_2$。若由$(\varepsilon)_1-\lim x_n=x_\Delta$导致$(\varepsilon)_2-\lim Ax_n=Ax_\Delta$，则称$A$在$x_\Delta$处连续或为$(\varepsilon)_1(\varepsilon)_2$连续。相应可定义$(0)(\varepsilon)$连续，$(\varepsilon)(0)$连续等等。

若A把有界集变为有界集，则称A为有界或$(\varepsilon)_1(\varepsilon)_2$有界。类似地可定义其它意义的有界性。

若E为线性空间（域仍为K，与F的域同），且ρ对平移是不变的：$\rho(x,y)=\rho(x-y,\ \theta_E)$，则叫G范空间，并把$\rho(x,\theta_E)$记为$\|x\|$，把（$E$，$F$，$\rho$）记为$(E,\ F,\|\cdot\|)$。类似定义（$\varepsilon$）G范空间，等等。并相似地定义各种收敛性、有界性以及映射的连续性和有界性。例如设（E_i，F_i，$\|\cdot\|_i$，$(\varepsilon)_i$），$i=1,\ 2$，为二$(\varepsilon)G^+$范空

间，$A:E_1\to E_2$，$M\subset E_1$，对于给定的$\varepsilon_1\in(\varepsilon)_1$，有$k(\varepsilon_1)\in K$，$k(\varepsilon_1)>0$（我们一般设$K$是有限备的半序域），使得$\|x\|_1\leqslant k(\varepsilon_1)\varepsilon_1$，$k(\varepsilon_1)$与$x\in M$无关，这时若对任给的$\varepsilon_2\in(\varepsilon)_2$，有$m=m(k,\varepsilon_2)>0$，使得$\|Ax\|_2\leqslant m\varepsilon_2$，则$A$即为$(\varepsilon)_1(\varepsilon)_2$有界。

对于有限备的半序域K，若$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$成立，$\lambda\in K$，则范数$\|\cdot\|$叫（绝对）齐次的，相应的$G$空间叫$G_0$范空间。类似定义$(\varepsilon)G^{++}$范空间，等等。

$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间的概念很好用，以后我们将证明，它包括一般的线性拓扑空间，且只要对（ε）加一些条件就可成为拓扑空间。

现在我们来讨论线性（即可加齐次）算子的连续性与有界性的一个转化关系。

定理1. 给定$(\varepsilon)G_0^{+}$范空间（E_i，F_i，$\|\cdot\|_i$，$(\varepsilon)_i$），$A:E_1\to E_2$为线性（今后记为$A\in(E_1\to E_2)^*$），K为实数域，并且满足下列条件

$BC(1)$：对任何$\varepsilon_1\in(\varepsilon)_1$，存在$r:0<r<1$，使得$r\varepsilon_1\in(\varepsilon)_1$；

$BC(2)$：对任何ε_i，$\varepsilon_i'\in(\varepsilon)_i$，存在$k_i>0$，使得$\varepsilon_i<k_i\varepsilon_i'$（$k_i$与$\varepsilon_i$，$\varepsilon_i'$有关）。

则A为$(\varepsilon)_1(\varepsilon)_2$连续的充要条件是$A$为$(\varepsilon)_1(\varepsilon)_2$有界。 □

注： 这里有界性是指对任何给定的$\lambda>0$，$\varepsilon_i\in(\varepsilon)_i$，$\|x\|_1\leqslant\lambda\varepsilon_1$，存在$\sigma>0$与$x$无关，使得$\|Ax\|_2\leqslant\sigma\varepsilon_2$。由条件$BC(2)$，不难看出，只要适当地改动$\lambda$，$\sigma$，有界性的条件与$\varepsilon_i$的选择无关。因此，对线性算子，我们总是可选定$\lambda=1$，而且当$(\varepsilon)_i\in BC(2)$时，可事先把$\varepsilon_i$选定，不然$\varepsilon_i$要求是任意的。

定理的证明．充分性． 即由A的有界性证明A的连续性。因为A是线性的，只要证明A在θ_{E_1}连续即可。即设$x_t\xrightarrow{(\varepsilon)_1}\theta_{E_1}$，求证$Ax_t\xrightarrow{(\varepsilon)_2}\theta_{E_2}$，$t\in I$，$I$为定向集。

我们要证明，对于任给的$\varepsilon\in(\varepsilon)_2$，存在$t_0\in I$，当$t\geqslant t_0$时，$\|Ax_t\|_2<\varepsilon$。首先，由于$x_t\xrightarrow{(\varepsilon)_1}\theta_{E_1}$，并且由条件$BC(1)$知对任何整数$n>0$，有$r^n\varepsilon_1\in(\varepsilon)_1$，故对任何给定的$n$，有$t_1=t_1(n)$。

当$t\geqslant t_1$时，$\|x_t\|_1<r^n\varepsilon_1$，利用$\|\cdot\|_1$的齐次性，有$\|r^{-n}x_t\|_1<\varepsilon_1$。再利用$A$的有界性可得：当$t\geqslant t_1(n)$时有

$$\left\| A\left(\frac{1}{r^n}x_t\right)\right\|_2\leqslant\sigma\varepsilon_2,$$

利用$\|\cdot\|_2$的齐次性与A之线性，有

$$\|Ax_t\|_2\leqslant r^n\sigma\varepsilon_2.$$

由条件$BC(2)$，知存在$k>0$，使得$\varepsilon_2<k\varepsilon$，因而 当$t\geqslant t_1(n)$时

$$\|Ax_t\|_2\leqslant r^n\sigma\varepsilon_2<r^n\sigma k\varepsilon;$$

又因$r<1$，故选取充分大的$n=n_0$， 使 $r^n\sigma k<1$，这时，当$t\geqslant t_0=t_1(n_0)$时，$\|Ax_t\|_2<\varepsilon$。充分性得证。

必要性。若A为连续，而设A无界。 这时可以选 $x_{t_n}\in E_1$，$\|x_{t_n}\|_1<\varepsilon_1$，而$\|Ax_{t_n}\|_2<n\varepsilon_2$不成立。这时$\|x_{t_n}/n\|_1<\varepsilon_1/n$。 设$\delta\in(\varepsilon)_1$是任给的，则由条件$BC(2)$，有$k_1$使得$\varepsilon_1<k_1\delta$。因而

$$\left\|\frac{x_{t_n}}{n}\right\|_1<\frac{\varepsilon_1}{n}<\frac{k_1}{n}\delta.$$

选充分大的$n=n_1$，使得$\frac{k_1}{n_1}<1$，从而有$\left\|\frac{x_{t_n}}{n}\right\|_1<\delta$。由于$\delta\in(\varepsilon)_1$是任给的，故$\frac{x_{t_n}}{n}\xrightarrow{(\varepsilon)_1}\theta_{E_1}$。

由于A的连续性，也应有

$$(\varepsilon)_2-\lim A\left(\frac{x_{t_n}}{n}\right)=\theta_{E_2}.$$

因而对于$\varepsilon_2\in(\varepsilon)_2$，应有$n_2=n_2(\varepsilon_2)$，当$n>n_2$时，$\left\|A\left(\frac{x_{t_n}}{n}\right)\right\|_2<\varepsilon_2$，也即$\|Ax_{t_n}\|_2<n\varepsilon_2$， 而这与由假设$A$的无界性导出的结果矛盾。

定理证毕。

从证明中我们看到，在证明充分性时 并 不 要 求 $(\varepsilon)_1$ 满足$BC(2)$，而在证明必要性时，并不要求$(\varepsilon)_1$满足条件$BC(1)$。因此有

定理1*. 设 $A: E_1 \to E_2$ 为线性，K 为实数域，当$(\varepsilon)_1 \in BC(1)$，$(\varepsilon)_2 \in BC(2)$时，可由$A$之有界性导致$A$之连续性。当$(\varepsilon)_1 \in BC(2)$时，可由$A$之连续性导致$A$之有界性。 □

注： 对有界性线性算子A，$\|x\|_1 \leqslant \varepsilon_1 \Longrightarrow \|Ax\|_2 \leqslant \beta\varepsilon_2$，这样的$\beta$的下确界记为$\|A\|$或者$\|A\|_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$，$\|\cdot\|_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$。它可看成算子$A$的$G$范数，$((E_1 \to E_2)^*, R, \|\cdot\|_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})$ 就是一个 G_0^+ 范空间。若E_1，E_2为$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间，可以证明 $((E_1 \to E_2)^*, R, \|\cdot\|_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})$是$G_0^{++}$范空间，这里$R$为实数集。

对于有界线性算子A，显然可得到下面关于误差转化的结果：

由$\|x_\delta - x_*\|_1 \leqslant \eta(\delta)\varepsilon_1$可导致

$$\|A(x_\delta - x_*)\|_2 \leqslant \|A\|\eta(\delta)\varepsilon_2.$$

我们现在来讨论算子族的问题。我们仅限于讨论 $(\varepsilon)G_0^+$范空间的情况。

设给定了$(\varepsilon)G_0^+$范空间(族)：$(E_\eta^\pm, F_\pm, \|\cdot\|_\eta^\pm, (\varepsilon)_\pm)$ $\eta \in I$，I为任何标号集。$A_\eta \in (E_\eta^- \to E_\eta^+)$，是在$\theta_{E_\eta^-}$处对$\eta$一致连续的.即指对任给的 $\varepsilon \in (\varepsilon)_+$，存在不依$\eta$而变的 $\delta \in (\varepsilon)_-$，使得$\|x\|_\eta^- < \delta \Rightarrow \|A_\eta x\|_\eta^+ < \varepsilon$。对$A_\eta \in (E_\eta^- \to E_\eta^+)^*$，则是对全空间$E_\eta^-$的一致连续。所谓$A_\eta$对$\eta$一致有界，是指对任给的$\varepsilon_\pm \in (\varepsilon)_\pm$，存在不依$\eta$而变的$\beta = \beta(\varepsilon_-, \varepsilon_+) > 0$，使得

$$\|x\|_\eta^- \leqslant \varepsilon_- \Longrightarrow \|A_\eta x\|_\eta^+ \leqslant \beta\varepsilon_+.$$

定理2 （第一等价定理）. $A_\eta \in (E_\eta^- \to E_\eta^+)^*$ 在条件$BC(i)$，$i = 1, 2$，下，对η一致连续的充要条件是A_η对η一致有界的。 □

证明. 充分性的证明完全类似于定理1的相应部分

为了证明必要性，我们引入二新的$(\varepsilon)G_0^+$范空间 $(E_\pm, F^\pm, \|\cdot\|^\pm, (\varepsilon)^\pm)$，$E_\pm = \{(y_\eta)_{\eta \in I} \mid y_\eta \in E_\eta^\pm\} = \prod_{\eta \in I} E_\eta^\pm$，按普通的积集方式$E_\pm$成为一线性空间，$F^\pm = F_\pm^I$按通常方式引入半序结构：$(a_\eta) \geqslant (b_\eta)$。即指在$F_\pm$中$a_\eta \geqslant b_\eta$，$\eta \in I$。$(\varepsilon)^\pm$中的$\varepsilon = (\varepsilon_\eta) \in F_\pm^I$，其中所有成分$\varepsilon_\eta$同取$(\varepsilon)_\pm$的某元，即$\varepsilon_\eta = \varepsilon_\triangle \in (\varepsilon)_\pm$。$\varepsilon_\triangle$不因$\eta$而变，$(\varepsilon)^\pm$与$(\varepsilon)_\pm$势相同。$\|(y_\eta)\|^\pm = (\|y_\eta\|_\eta^\pm)$ $(\eta \in I)$。容易证明这样的 $(E_\pm,$

$F^{\pm}$，$\|\cdot\|^{\pm}$，$(\varepsilon)^{\pm}$）是两个$(\varepsilon)G_0^+$范空间．

这时定义算子$A\in(E_-\to E_+)$为$Ax=(A_\eta x)(\eta\in I)$，A显然是线性的．我们要证明A是连续的，即$\|x_t\|^- \xrightarrow{(\varepsilon)^-} \theta_{F^-} \Longrightarrow \|Ax_t\|^+ \xrightarrow{(\varepsilon)^+} \theta_{F^+}$．设任给定$\varepsilon\in(\varepsilon)^+$，即给定了$\varepsilon_\eta=\varepsilon_\triangle\in(\varepsilon)_+$，而由$A_\eta$对$\eta$的一致连续性，知存在$\delta\in(\varepsilon)_-$，使得$\|x_t\|_\eta^-<\delta\Longrightarrow\|A_\eta x_t\|_\eta^+<\varepsilon_\triangle$，因而导致$\|Ax_t\|^+<\varepsilon$，所以$A$是连续的．利用定理1，知$A$为有界：$\|x\|^-\leqslant\varepsilon^-\Longrightarrow\|Ax\|^+\leqslant\|A\|_{(\varepsilon^-,\varepsilon^+)}\varepsilon^+=\|(A_\eta)\|_{(\varepsilon^-,\varepsilon^+)}\varepsilon^+$，这里$\varepsilon^+\in(\varepsilon)^+$是任选的，我们自然可以选$\varepsilon^+$的成分$\varepsilon_\eta$都是选定的$\varepsilon_+\in(\varepsilon)_+$．由$\|Ax\|^+\leqslant\|(A_\eta)\|_{(\varepsilon^-,\varepsilon^+)}\varepsilon^+$就导出了$A_\eta$的一致有界性

$$\|x\|_\eta^-\leqslant\varepsilon_-\Longrightarrow\|A_\eta x\|_\eta^+\leqslant\|(A_\eta)\|_{(\varepsilon^-,\varepsilon^+)}\varepsilon_+.$$

定理证毕．

在必要性的证明中同样只用到条件$(\varepsilon)_-\in BC(2)$，因此有定理2的推广形式

定理2*． 设$A_\eta\in(E_\eta^-\to E_\eta^+)^*$，则当$(\varepsilon)_-\in BC(1)$，$(\varepsilon)_+\in BC(2)$时，$A_\eta$之一致有界性导致一致连续性．当$(\varepsilon)_-\in BC(2)$时，$A_\eta$之一致连续性导致一致有界性． □

系1． 设$(\varepsilon)G_0^+$范空间（$E_\eta^\pm$，$F_\pm$，$\|\cdot\|_\eta^\pm$，$(\varepsilon)_\pm$）满足$BC(i)$，$i=1$，2，则$T_\eta\in(E_\eta^+\to E_\eta^-)^*$具有一致连续逆算子的充要条件是存在不依赖于$\eta$的$\gamma>0$使得$\|T_\eta x_\eta\|_\eta^-\leqslant\varepsilon_-\Longrightarrow\|x_\eta\|_\eta^+\leqslant\gamma\varepsilon_+$． □

系2． 当$(\varepsilon)_-\in BC(1)$，$(\varepsilon)_+\in BC(2)$时，系1的不等式导致T_η^{-1}的存在并一致连续．若仅仅$(\varepsilon)_-\in BC(2)$，T_η^-的一致连续导致系1不等式成立． □

现在我们用定理2来研究方程族$A_\eta e_\eta=g_\eta$．

一个算子方程以及有关的依赖于某些标号（参数）的方程就可以用这种族来统一描述，而且这个原来的算子方程可以看作是标号η取某个特殊值$\eta_0\in I$时的特例．例如$A_{\eta_0}e_{\eta_0}=g_{\eta_0}$是某微积分方程（组），其他的$A_\eta e_\eta=g_\eta$可以是这方程的某种近似方程或摄动方程族，例如可以是用网格法或切片法形成的以有关步长为参量的近似方程(组)，或者是这些近似方程由舍入误差而形成的另一种近似方程．也可能$A_{\eta_0}e_{\eta_0}=g_{\eta_0}$本身是差分方程(组)，而其余的$A_\eta e_\eta$

$=g_\eta$是这差分方程（组）由于舍入误差形成的近似方程．$A_{\eta_0}e_{\eta_0}=g_{\eta_0}$为微积分方程时，$A_\eta e_\eta=g_\eta$也可能仍是微积分方程，只不过要简单或方便研究或方便计算一些．这种观点给我们带来很大方便，使我们可以统一地处理计算数学中方程的截断误差与计算过程中舍入误差对解的收敛性的影响；使网格法和切片法可以同时考虑；且使适定性与各种稳定性也有了某种统一性．

方程族$A_\eta e_\eta=g_\eta$叫做稳定的，是指A_η^{-1}存在并且对η一致连续．传统的关于微分方程和差分方程的适定性与稳定性概念大都可用这种简单的术语来描述．在［5］中把差分方程的适定性与稳定性分开，实际上在那里稳定性只是一种特殊的适定性，即对g_η仅按某些成分扰动时要求A_η^{-1}的连续依赖性，因而可分成依右端的稳定性、依初值的稳定性、依边值的稳定性等等．只要引用一点初等的技巧，就可以把各种定解条件（边值的和初值的）连同原来的方程形成一个新的方程(族)，而原方程（组）的右端、边值、初值只不过是新的方程（族）的右端g_η的某些成分而已．这种技巧最典型的方法是积集的方法(或叫积空间方法)，在定理２的证明中我们就用了这个方法．只要适当地规定(ε)，让它的ε的某些成分为零元（但ε本身为正元)，就可以讨论这些成分不动的情况．

为了对这种观点与技巧有个具体的认识，作为对比，我们仍以［5］中的资料来讨论之．

假设在以Γ为边界的区域D内，给定了微分方程$L_u=f$，其中u为未知函数，f为给定的函数，L为微分算子，并给定了边界(或初值）条件

$$l_i(u)=\varphi_i，在\Gamma_i上\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 5),$$

其中φ_i为给定的函数，l_i为算子，Γ_i为边界Γ的一部分．不同的Γ_i可以有公共的一段，对初值问题，区域D应考虑为含时间t的高维空间中的集合(这时初值问题在形式上化成了边值问题)．在闭区域$D+\Gamma$上，对于任何h（对于$0<h<h_0$或对于$h=h_1,\ h_2,\ \cdots\to 0$)，给定了某个点集，我们叫这个点集为格子网$D_h\subset D+\Gamma$．假设$R_h$为差分算子，或切片法产生的近似于原微分方程的算子，或

是这些算子在计算过程中由舍入误差的影响而产生的另一种近似算子，它们把D_h上的函数u_h(可以适当展延到整个D)变换成$D_h^0 \subset D+\Gamma$上的函数$R_h u_h$。在D_h上考虑近似方程$R_h u_h = f$，其右端定义在D_h^0上并等于原微分方程的右端，并考虑边界（初值）条件

$$r_{hi}(u_h) = \varphi_{hi} \qquad (i=1, 2, \cdots, s)$$

$$\varphi_{hi} = [\varphi_1, \cdots, \varphi_s]_{hi},$$

$[\quad]_{hi}$为已知算子，值域是D_h中某些所谓“边界”点Γ_{hi}上的函数。在D_h上的函数u_h定义了范数$\|u_h\|_{Uh}$；在D_h^0上的函数f定义了范数$\|f\|_{Fh}$；在Γ_{hi}上的φ_{hi}定义了范数$\|\varphi_{hi}\|_{\Phi hi}(i=1, \cdots, s)$。同样对$D$上之函数$u \in U$，$f \in F$，$\varphi_i \in \Phi_i$，相应地定义范数是$\|u\|_U$，$\|f\|_F$，$\|\varphi_i\|_{\Phi i}$，这里$U$，$F$，$\Phi_i$为赋范空间。

这时我们可以定义$-G_0^+$范空间来概括前面的叙述。参数就取为h；$A_0=(L, I_1, \cdots, I_s)$；$Ah=(R_h, r_{h1}, \cdots, r_{hs})$；$E_h^+$为由形如$g_h=(f, \varphi_{h1}, \cdots, \varphi_{hs})$的向量组成，其相应的成分的定义域是不同的；$E_0^+$为由形如$g_0=(f, \varphi_1, \cdots, \varphi_s)$之向量组成；$E_h^-$为由形如$e_h=(u_h, \cdots, u_h)$的$s+1$维向量组成；$E_0^-$为由形如$e_0=(u, \cdots, u)$的$s+1$维向量组成。$A_h$对$e_h$的作用是相应分量的作用，例如$h \neq 0$时

$$A_h e_h = (R_h u_h, r_{h1} u_h, \cdots, r_{hs} u_h)$$

这时$F_\pm$均为R^{s+1}，R为实数集，范数$\|\cdot\|_h^-$定义为

$$\|e_0\|_0^- = (\|u\|_U, \cdots, \|u\|_U), \ \|e_h\|_h^- = (\|u_h\|_{Uh}, \cdots, \|u_h\|_{Uh}),$$

$$\|g_0\|_0^+ = (\|f\|_F, \|\varphi_1\|_{\Phi 1} \cdots, \|\varphi_s\|_{\Phi s}),$$

$$\|g_h\|_h^+ = (\|f\|_{Fh}, \|\varphi_{h1}\|_{\Phi h1}, \cdots, \|\varphi_{hs}\|_{\Phi hs}),$$

这样（$E_h^\pm$，$F_\pm\|\cdot\|_h^\pm$)就成为G_0^+范空间，令$(\varepsilon)_\pm$为$(0, \infty)^{s+1}$，则$(E_h^\pm, F_\pm, \|\cdot\|_h^\pm, (0, \infty)^{s+1})$为$(\varepsilon)G_0^+$范空间。而原微分方程以及相应的差分方程（或其他意义下的近似方程）连同有关的定解条件就化成一个方程族$A_h e_h = g_h$，且原来的适定性和各种意义下的稳定性都化成一个统一的概念：(依右端的)稳定性。当A_h为线性时，在系1，系2相应的条件下，知道这种稳定性与A_h^{-1}的一

致有界性是等价的，或者在更弱的条件下，由A_h^{-1}的一致有界性就保证了方程族的稳定性。Lax 和 Richtmyer在[6]中讨论了取值于Banach空间的一类特殊的微分方程的初值问题，那么方程以及有关的差分逼近式完全是我们这里讨论的算子方程族的特款，而他们所用的稳定性概念恰恰是用我们这里的所谓一致有界性的概念来定义的。定理2和定理2*及其推论非常一般地发掘了稳定性、适定性、逆算子一致有界性的联系，也给出稳定性判据的一般找寻方法，[6]，[7]中的许多具体工作都可看成特例，而且我们可不限于差分方法的近似。

在前面引用[5]的微分方程的差分方程的讨论中，若$F_{\pm}$均为R，$\|e_0\|_0^- = \|u\|_U$，$\|e_h\|_h^- = \|u_h\|_{U_h}$，$\|g_0\|_0^+ = \left(\lambda\|f\|_F^p + \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\|\varphi_i\|_{\Phi_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}$，$\|g_h\|_h^+ = \left(\lambda\|f\|_{F_h}^p + \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\|\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}}^p\right)^{\frac{1}{p}}$，$\lambda,\lambda_i,p>0$，则相应的一致有界性条件就变成：存在某一常数$k>0$，使得

$$\|u_h\|_{U_h}\leqslant k\left(\lambda\|f\|_{F_h}^p + \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\|\varphi_{hi}\|_{\Phi_{hi}}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|u\|_U\leqslant k\left(\lambda\|f\|_F^p + \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\|\varphi_i\|_{\Phi_i}^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

当$p=1$时即[5]中的结果。由此可以看出，由于有关的G空间不同的引入方法，可以讨论不同意义的稳定性，因而有不同的稳定性判据。我们这样一般的讨论有助于发掘一些内在的东西，且这种讨论可以很简明地概括和总结已有的一些工作。

定理2或定理2*的一个应用是下面的定理。

系3 当A_η一致有界（当$(\varepsilon)-\in BC(2)$，A_η一致连续时即如此），若$x_\eta(\delta)\in E_\eta^-$，$\delta\in\Delta$，$\Delta$为任何标量集，并且$\|x_{\eta(\delta)} - x_{\eta(\delta_0)}\|_\eta^-\leqslant\xi(\delta)\varepsilon_-$，则有

$$\|A_\eta(x_{\eta(\delta)} - x_{\eta(\delta_0)})\|_\eta^+\leqslant\|(A_\eta)\|_{(\varepsilon^-;\varepsilon^+)}\xi(\delta)\varepsilon_+. \quad \square$$

下面来讨论方程族的截断（收敛）误差与（近似解的）收敛误差的转化。因为这些概念各家用法不一，所以我们要给这两个

概念定型，特别是我们这里讨论的是一般的方程族，原来所谓截断的概念已没有意义了。

对于方程族$A_\eta e_\eta = g_\eta$，e_η是它们的相应解。则当A_η对E^-_{η}也有意义时，$\|A_\eta(e_\eta - e_{\eta_0})\|^+_\eta$ 或者与之等价的$\|(A_{\eta_0}e_{\eta_0} - g_{\eta_0}) - (A_\eta e_{\eta_0} - g_\eta)\|^+_\eta$叫做原方程族的原（收敛）误差，相当于差分方法中的截断（收敛）误差。这种误差一般是可以直接进行估计的，例如当E^-_η选得同为E_-时，对任何$e \in E^-$，若对$\|(A_\eta e - g_\eta) - (A_{\eta_0} e - g_{\eta_0})\|^+_\eta$的上界有一个估计，则原误差就可以得到估计了。对于微分方程的差分近似或切片近似，一般利用Taylor级数余项估计就可以估计原误差。

方程族$A_\eta e_\eta = g_\eta$的原误差记为$y(\eta)$，而把$c(\eta) = \|e_\eta - e_{\eta_0}\|^-_\eta$叫做次（收敛）误差。

利用关系式$e_\eta - e_{\eta_0} = A^{-1}_\eta(A_{\eta_0}e_{\eta_0} - A_\eta e_{\eta_0} + g_\eta - g_{\eta_0})$，立刻可以得到：

定理3（第一等价定理变形）。 若A_η对$E^-_{\eta_0}$同时有定义，且是线性的，则方程族

$$A_\eta e_\eta = g_\eta$$

的稳定性与A^{-1}_η的一致有界性等价。当它为稳定时，并且$(\varepsilon)+ \in BC(2)$，则由原收敛性导致次收敛性；或者说，若$(\varepsilon)+ \in BC(2)$，并且方程族原收敛，则由稳定性导致次收敛性。同时，倘若$y(\eta) \leqslant \xi(\eta)\varepsilon_+$，则$c(\eta) \leqslant (A^{-1}_\eta)\|_{(\varepsilon_+,\varepsilon_-)}\xi(\eta)\varepsilon_-$。□

这一结果推广了Lax-Richtmyer的等价性定理中关于充分性的论断这一方面，而且给出了误差估计的一般形式，这种估计的形式又以[5]中的许多结果为特例。在[5]中讨论赋范空间中的算子方程（Канторович定理的变形）与讨论具体的差分方程的收敛性时是分开进行的，而在讨论舍入误差对次收敛误差的影响时又另外相似地进行处理。我们这里完全概括了这三种情况。截断误差和舍入误差等等都可以归入原误差的概念之中。而由次收敛（误差)导致原收敛（误差）的估计则已经反映在系3中了。Тамаркин关于微分方程组的近似解的误差估计可看成是定理2的一种

特例.

定理 3 的结果完全可以推广于某种非线性的情况. 下面就是一个例子.

设给定了G^+空间$(E_\eta^\pm, F_\eta^\pm, \rho_\eta^\pm)$, $A_\eta \in (E_\eta^- \to E_\eta^+)$, 同时$A_\eta \in (E_{\eta_*}^- \to E_{\eta_*}^+)$. 所谓$A_\eta^{-1}$存在而有优界$\Phi_\eta$, 是指对任何$x$, $y \in E_\eta^-$, $E_{\eta_*}^-$, 有

$$\rho_\eta^+(A_\eta x, A_\eta y) \leqslant \Phi_\eta(\rho_\eta^-(x, y)),$$

这里$\Phi_\eta(t) \in (F_\eta^- \to F_\eta^+) \cap (\uparrow t)$. 这时,对于方程族$A_\eta e_\eta = g_\eta$的原误差$y(\eta)$类似地定义为$\rho_\eta^-(A_\eta e_{\eta_*}, A_\eta e_\eta)$, 次误差定义为$c(\eta) = \rho_\eta^+(e_{\eta_*}, e_\eta)$.

利用关系式$\rho_\eta^+(e_{\eta_*}, e_\eta) = \rho_\eta^+(A_\eta^{-1} A_\eta e_{\eta_*}, A_\eta^{-1} A_\eta e_\eta)$, 立刻可得到

原次转化引理: 在上述条件下

$$c(\eta) \leqslant \Phi_\eta(y(\eta)). \quad \square$$

这结果可处理非线性问题, 在线性的情况下它不完全是定理 3 的推广, 但在一般赋范空间中这两个估计是一样的. 然而定理 3 有自己的特点, 它是直接从原始的稳定性出发的.

2.2. Lax-Richtmyer的等价性定理我们只推广了它的充分性, 另外包括了一些重要的新的内容. 至于必要性的部分现在还无法突进到象定理3那样对一般的$(\varepsilon)G_0^+$范空间的情况, 但是可以证明对一般线性拓扑空间是成立的.

可以证明 (见[2])

为了数域K上的线性空间E是线性拓扑空间,其充要条件是有一子集族$\Lambda = \{U\}$, 使得

a) U, $V \in \Lambda \Longrightarrow \exists W \in \Lambda$, $W \subset U \cap V$;

b) $U \in \Lambda \Longrightarrow \exists V \in \Lambda$, 使得$V + V \subset U$;

c) $\bigcap_{U \in \Lambda} U = \{\theta_E\}$;

d) 若$U \in \Lambda$, 则有$V \in \Lambda$, 使对$|\alpha| \leqslant 1$, $\alpha \in K$时, 有$\alpha V \subset U$;

e) 对每个$x \in E$及每个$U \in \Lambda$, 有$\alpha \in K$, 使得$x \in \alpha U$.

这时只要令θ_E的基本邻域组$J(\theta_E)$为Λ即可，$J(x)=\{x+V|V\in\Lambda\}$。

若用$-U\cap U$代替U，则我们还可要求Λ中之集都是对称的：$-U=U$。

令I为Λ中按包含关系$\supset$的次序而得到的定向半序集：$V_1>V_2$是指$V_1\subset V_2$。定义线性半序集F为R_+^I，R_+为补充了$\pm\infty$的实数集，令$\|x\|=(\|x\|_V)_{V\in I}$，$\|x\|_V=\inf\{|a|x\in aV\}$，$x\in E$，则容易证明$(E, F, \|\cdot\|)$是$G_0^{++}$范空间。

由条件$a)$—$d)$知$J(\theta_E)$可以选为$\{U_\eta|\eta\in I\times(0, \infty)\}$，这里$U_\eta=\{x|x\in E, \|x\|<\delta_\eta\}$。当$\eta=(d, c)$时，$\delta_\eta=\{\varepsilon_t|t\in I\}$，$\varepsilon_t$的定义是这样的：对$d<t$，$\varepsilon_t=c>0$，否则$\varepsilon_t=+\infty$。

因此可以选(δ_η)为(ε)，相应的(ε)收敛与E中的拓扑收敛是等价的。所以线性拓扑空间必然是$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间，因而是$(\varepsilon)G_{\varepsilon I}^{+}$范空间。

$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间在什么时候又才是线性拓扑空间呢？

我们引入条件$[Q]$，对于G度量ρ，$\rho\in[Q]$是指对任何$x, y, z\in E$，$\rho(x, y)\leqslant Q(\rho(x, z), \rho(z, y))$，这里$Q(\lambda, \xi)\in(F^2\to F)\cap(\uparrow_{\lambda,\xi})$，对$\lambda$，$\xi$对称。条件$[Q]$是三角不等式公理的推广，我们知道，连最简的$G$范数$\|\cdot\|_{L^p}$，$0<p<1$，就无法用三角不等式，所以引入条件$[Q]$是有必要的。而当$Q=h(\lambda+\xi)$时，则简记为$\rho\in P(h)$。以后我们还引用符号$\overset{*}{Q}(\xi)=Q(\xi, \xi)$。$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间满足下列条件时叫做$\overset{*}{(\varepsilon)}G_0^{++}$范空间。

1) $\inf(\varepsilon)=\theta_F$;

2) $\varepsilon_1, \varepsilon_2\in(\varepsilon)\Longrightarrow\exists\varepsilon_3\in(\varepsilon), \varepsilon_3\leqslant\varepsilon_1, \varepsilon_2$;

3) $\varepsilon\in(\varepsilon), 0<a\leqslant1\Longrightarrow a\varepsilon\in(\varepsilon)$;

4) 对任何$f\in F$，$\varepsilon\in(\varepsilon)\Longrightarrow\exists k>0, |f|\leqslant k\varepsilon$;

5) $\|\cdot\|\in[Q]$，并对任何$\varepsilon\in(\varepsilon)$，有$\varepsilon'\in(\varepsilon)$，使得$\overset{*}{Q}(\varepsilon_\Delta)=Q(\varepsilon_\Delta, \varepsilon_\Delta)<\varepsilon$。

取$\Lambda=J(\theta_E)$为$\{\|x\|<\varepsilon|\varepsilon\in(\varepsilon)\}$，可以逐条验证前面关于线性拓扑空间的性质$a)$—$e)$

总结上述，我们可以得到

引理1. 线性拓扑空间必是$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间，而$(\overset{*}{\varepsilon})G_0^{++}$范空间必是线性拓扑空间。□

因此在$(\overset{*}{\varepsilon})G_0^{++}$范空间中共鸣定理与异点凝聚原理成立。

数域K上的线性拓扑空间E中的集合M叫做有界的，是指对任何$V\in J(\theta_E)$，有$a\in K$存在，使得$M\subset aV$。由于线性拓扑空间必是$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间，不难看出，这种有界性的定义与相应的$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间的(ε)有界性的概念等价。

由于一致连续性和一致有界性的概念很难对空间族来建立，所以不可能有象定理2、定理2*、定理3那么广泛的结果。这也可以看出G空间的理论有自己独到的优点。若对所有η，$E_\eta^\pm$同为拓扑空间$E^\pm$，A_η：$E^-\to E^+$，则一致连续性与一致有界性概念可以相应地建立，且用邻域的概念来刻划与用(ε)和G范数的术语来描述是一致的。这时定理2、定理2*、定理3以及有关的讨论对线性拓扑空间成立。

设$A_\eta\in(E^-\to E^+)^*$，$E^\pm$为线性拓扑空间，对它们相应的(ε) G_0^{++}范空间，不难验证条件$BC(i)$，$i=1$，2，都成立，因此由定理2，可得

定理2.** 对线性拓扑空间$E^\pm$，$A_\eta\in(E^-\to E^+)^*$为对η一致连续的充要条件是A_η对η是一致有界的（一致地把有界集变成有界集）。□

同理地，对于方程族$A_\eta e_\eta=g_\eta$，当η定向收敛于η_0时，对于一个M，M为第二纲的，$g_\eta=g\in M$有解e_η在E^-中收敛于e_{η_0}，则叫做次收敛性；而$A_\eta(e_\eta-e_{\eta_0})$在$E^+$中收敛于$\theta_{E^+}$，则叫做原收敛性。$A_\eta^{-1}$存在并对$\eta$一致连续，则叫做稳定性。由定理2**和定理3，则有下面的第一等价定理在线性拓扑空间的变形：

定理3*. 设$E^\pm$为线性拓扑空间，$A_\eta\in(E^-\to E^+)^*$，则方程族$A_\eta e_\eta=g_\eta$的稳定性与A_η^{-1}的一致有界性等价。而且，当$A_\eta e_\eta=g_\eta$稳定时，由原收敛性导致次收敛；而当原收敛时，由稳定性导致次收敛性。□

我们来证明，由次收敛性可以导致稳定性。

实际上，对线性拓扑空间，Banach-Steinhaus的共鸣定理已有推广。因此，当$A_\eta e_\eta=g_\eta$具有次收敛性时，只要证明了$\{A_\eta^{-1}\}$是点式有界的即可，也即对任何$g\in M$，M是E^+中某一第二纲集，$\{A_\eta^{-1}g\}$是E^-中的有界集，这时由共鸣定理就可以断定A_η^{-1}是一致连续的；因而$A_\eta e_\eta=g_\eta$是稳定的，也即A_η^{-1}是一致有界的。另一方面，考虑方程族$A_\eta e_\eta=g$，则由$e_\eta\to e_{\eta_0}$，故$A_\eta^{-1}g\to A_{\eta_0}^{-1}g$（因$A_\eta e_\eta=g_\eta$有次收敛性，则当$g_\eta\equiv g$时就更有次收敛性），因此$\{A_\eta^{-1}g\}$有界。

总结上述有

定理4（第二等价定理）. 设E^-为线性拓扑空间，E^+为第二纲的，$A_\eta: E^-\to E^+$为线性，方程族$A_\eta e_\eta=g_\eta$为原收敛，则稳定性、次收敛性和A_η^{-1}的一致有界性等价。□

从证明中可以看到，由次收敛性导致稳定性并不必引用原收敛性的条件。

2.3. 我们来讨论封闭性与完全性的等价性的问题。

考虑G_0型空间$(E, F, \|*\|, (\varepsilon))$，这里$E$为实线性空间，$F$为备的实半序线性空间，而$E^*$为$E\to F$的所有线连续算子的总体集。

$p: E\to F$，叫做次可加的，若$p(x_1+x_2)\leqslant p(x_1)+p(x_2)$。若对$\lambda\geqslant 0$，$p(\lambda x)=\lambda p(x)$，则叫正齐性的。

局整转化关系1. 设E_1为E之一子空间，$f_1\in E_1^*$，$f_1(x)\leqslant p(x)(x\in E_1)$，这里$p$为$E$上某次可加正齐性算子，则存在保序的线性延拓$f\in E^*$，它在$E_1$上与$f_1$相同，$f(x)\leqslant p(x)(x\in E)$。□

证明与Hahn-Banach定理的证法类同，参看[1,2]。

由此可证

局整转化关系2. 对任何$x_0\in E$，存在$f\in E^*$，使得$f(x_0)=\|x_0\|$，并且$|f(x)|\leqslant\|x\|(x\in E)$。□

局整转化关系3. 设E_1是E之一子空间，$f_1\in E_1^*$，则有延拓$f\in E^*$，$\|f\|_{(a,b)}=\|f_1\|_{(a,b)}$，$a$，$b\in F_+$。□

证明中只要令$p(x)=\|f_1\|_{(a,b)}\|x\|$即可。这里$a$，$b$是任意的

正元素，不同的a，b有不同的$p(x)$，因而有不同的f。但可以定义$\|f\|$为$|f|\leqslant\beta\|x\|$中的β的下确界，这时$\|f\|=\|f\|_{(a;a)}$。

定义。逼近度：$B(x_0,E_1)=\inf\|x_0-x\|(x\in E_1)$。残缺度：$C(x_0,E_1)=\sup|f(x_0)|(f\in E^*,\ \|f\|=1,\ f(x)=0,\ x\in E_1)$（它们都取值于$F$之中）。□

定理5（第三等价定理）。设E_1为E之一线性子空间。则对任何$x_0\in E$，逼近度与残缺度相等：$B(x_0,E_1)=C(x_0,E_1)$。□

证明 对于$f\in E^*$，$\|f\|$，$f(x)=0(x\in E_1)$ 有 $|f(x_0)|=|f(x_0-x)|\leqslant\|f\|\|x_0-x\|=\|x_0-x\|$。取$x=x_n$，$\lim\|x_0-x_n\|=B(x_0,E_1)$，则有$|f(x_0)|\leqslant B(x_0,E_1)$，因此$C(x_0,E_1)\leqslant B(x_0,E_1)$。这时对$B(x_0,E_1)=\theta_F$，定理得证。

当$B(x_0,E_1)\neq\theta_F$时，定义$E_0=\{x+\lambda x_0|x\in E_1,\ \lambda\in K\}$，K为$E$或$F$之系数域。$f_0(x+\lambda x_0)=\lambda B(x_0,E_1)$。这时对$x\in E_1$有$f_0(x)=\theta_F$，而$f_0(x_0)=B(x_0,E_1)$。另外$|f_0(x+\lambda x_0)|=|\lambda|B(x_0,E_1)\leqslant|\lambda|\left\|\frac{x}{\lambda}+x_0\right\|=\|x+\lambda x_0\|$，因而有$\|f_0\|\leqslant1$。而由$f|_0(x_n-x_0)|=|f_0(x_0)|=B(x_0,E_1)\leqslant\|f_0\|\|x_n-x_0\|\Longrightarrow\|f_0\|B(x_0,E_1)$。故又必须$\|f_0\|\geqslant1$。因此得到$\|f_0\|=1$。由局整转化关系，有延拓$f\in E^*$，$\|f\|=1$。由于$f(x)=0$，$x\in E_1$，$\|f\|=1$，而$f(x_0)=B(x_0,E_1)$，故有$C(x_0,E_1)\geqslant B(x_0,E_1)$。结合相反的不等式即证明定理。

2.4. 赋半序范空间的许多结果可以通过锥序转化关系发展成为凸锥理论的形式。下面列述一些结果。

若系数域K为半序线性空间，则在线性空间E中引入的序结构$\geqslant$当$x\geqslant y\Longrightarrow x+z\geqslant y+z(x,\ y,\ z\in E)$；$x\geqslant y$，$\lambda\geqslant\theta_K\Longrightarrow\lambda x\geqslant\lambda y(x,\ y\in E,\ \lambda\in K)$时，称序结构与线性结构协调。

设$B\subset E$，$x\in B$，$\lambda\geqslant\theta_K\Longrightarrow\lambda x\in B$；$x$，$y\in B\Longrightarrow x+y\in B$，则称$B$是$E$的线性半群。若$E$为$G$型空间或拓扑空间，因而可定义内点的概念。当$B$有内点时，叫$B$为实心线性半群。若$x\in B$，$x\neq\theta_E$，则$-x\overline{\in}B$，这时叫$B$是锥性集。

设B为一线性半群，$x\geqslant y$表示$x-y\in B$，则$\geqslant$便是E上的一个广义序结构，当B为锥性集时，则$\geqslant$便是普通的半序集。

记$\mathring{B}$为B之内点集，$x\in\mathring{B}$记为$x\gg\theta_E$。对于$(\varepsilon)G_0^{++}$范空间易证由$x\gg\theta_E$，$\lambda>\theta_K$可导致$\lambda x\gg\theta_E$，而且存在$\varepsilon\in(\varepsilon)$，$\varepsilon=\varepsilon(x)$，使得开球$S(x,\ \varepsilon)=\{x'\mid\|x'-x\|<\varepsilon\}\subset B$，这也可看成$x$为内点的条件。当$B$为实心时，若$B$不全同于$E$，则$x\gg\theta_E$可导致$-x\overline{\in}B$.而凡有$x\in B$使$-x\overline{\in}B$者，称$B$是非不足道的。因而不与$E$相重的实心线性半群对$(\varepsilon)G_0^{++}$空间总是非不足道的，并且可证对任何$x\in E$可表示成$x=x_1-x_2$，$x_1$，$x_2\in\mathring{B}$。这也是一种局整转化关系。

设E为$(\varepsilon)G_0^{++}$型空间$(E,\ F,\ \|*\|,\ F_+)$，F为备半序线性空间，E，F之系数域同为K，它也是一线性半序空间。设B是E之线性半群，记E^*是$f:E\to F$的线性连续映射的总体，B的共轭半群B^*是满足$f(x)\geqslant\theta_F(x\in B)$的$f\in E^*$的总体。这时由$B^*$引伸出$E^*$的半序结构，$f\geqslant g(f,\ g\in E^*)$等价于$f(x)\geqslant g(x)(x\in B)$。为方便计，下设$K$为实域。

定理6． 若B为实心线性半群，$F_+\in BC(2)$，$f:E\to F$，$f(x)\geqslant\theta_F(x\in B)$，当$f$为线性时，则必$f\in B^*$。□

证明． 设$x\in\mathring{B}$，V为θ_E的一邻域，使得$x+V\subset B$，这时有$|f(y)|\leqslant f(x)(y\in V)$。由条件$BC(2)$，对任何$\varepsilon\in F_+$，可选$\lambda>\theta_K$，$\lambda f(x)<\varepsilon$。这时对$y'\in\lambda V$有$|f(y')|<\varepsilon$，故$f$在$\theta_E$处连续，由线性可导致$f\in E^*$。证毕。

定理 6 描述了序结构与连续性的一种转化关系。

定理7． 若B为实心线性半群，$f\in B^*$，$x\in\mathring{B}$，$\{x'\mid\|x'-x\|\leqslant\rho\varepsilon\}\subset B$，$\varepsilon$，$\delta\in F_+$，则必$f(x)\geqslant\rho\delta\|f\|_{(\varepsilon;\delta)}$。□

证明． 因对$\|u\|\leqslant\varepsilon$，有$x\pm\rho u\in B$，故$f(x)\pm\rho f(u)\geqslant\theta_F$，即$f(x)\geqslant\rho|f(u)|$。由$\|f\|_{(\varepsilon,\delta)}$之定义即证明了定理。

类似古典凸锥理论，若$f\in B^*$，$f\neq\theta_E^*$，则对$x\in\mathring{B}$有$f(x)>\theta_F$。

局整转化关系1°． 设$F_+\in BC(2)$，$B\neq E$为实心线性半群，E_1是线性子空间，存在某$x_0\in E_1\cap\mathring{B}$。设$f_1:E_1\longrightarrow F$为线性连续，

$f^1(x) \geqslant \theta_F$ $(x \in B \cap E_1)$，则存在$f: E \longrightarrow F$，它在E_1与f_1相重，并属于B^*。□

证法像古典凸锥理论一样，与 Hahn—Banach 定理证法相似，证明中用到F的备性。

由这关系可证，对于给定的与E不全同的实心线性半群B必使B^*非空，并且B^*有非零元。同时，局整关系 1* 还包括下列分离定理：

定理8．设$F_+ \in BC(2)$，B_1，B_2为线性半群，B_1为实心，B_2与$\overset{\circ}{B}_1$没共同元素，则存在$f \in E^*$，$f \neq \theta_{E^*}$，使得$f(x) \geqslant \theta_F(x \in B_1)$，$f(y) \leqslant \theta_F(y \in B_2)$。□

证法同凸锥理论，主要是对$B = \{x - y \mid x \in B_1, \ y \in B_2\}$应用关系1*，$B^*$非空并包含非零元。

由定理 8 即可推广凸集 Ascoli，Mazur 和Eidelheit 定理，泛函变成一般的E^*中之元，原始的形式参看[1]。

可以推广第三等价定理于线性半群。这时逼近度为$B(x_0,B) = \inf\|x_0 - x\|(x \in B)$，残缺度为$C(x_0,B) = \sup|f(x_0)|(f \in B^*, \|f\| = 1)$。

定理9（广义第三等价定理）．设$F_+ \in BC(2)$，B为E之线性半群，则$B(x_0,B) = C(x_0,B)$。□

证明．像定理 5 的证明一样，易证$C(x_0,B) \leqslant B(x_0, B)$。故$B(x_0,B) = \theta_F$时定理即已证。

当$B(x_0,B) \neq \theta_F$时，令

$$B_1 = \{\lambda(x_0 + e) \mid \lambda \geqslant 0, \ \|e\| < B(x_0,B)\}$$

则B_1为实心半群，并且$\overset{\circ}{B}_1$与B不相交，因此由分离定理，存在$f_1 \in B^*$使$f_1(y) \leqslant \theta_F(y \in B_1)$，$f_1 \neq \theta_{B^*}$。定义$f$为$f_1/\|f_1\|$，则$f \in B^*$，$\|f\| = 1$，$f(y) \leqslant \theta_F(y \in B_1)$。这时可证$|f(x_0)| \geqslant B(x_0, B)$，因此$C(x_0,B) \geqslant B(x_0, B)$。结合已证的相反的不等式，定理得证。

注：若B为线性子空间，对$x \in B$，$f \in B^*$，必定$f(x) = \theta_F$，因$-x \in B$，$f(x) \geqslant \theta_F$，$f(-x) \geqslant \theta_F$。这时广义第三等价定理就转化为定理5。

在定理 9 的条件下，$x\in\bar{B}$(B的闭包）的充要条件是$f\in B^*$包含 $f(x)\geqslant\theta_F$。而$x\in\mathring{B}$的充要条件是$f\in B^*, f\neq\theta_F$，包含$f(x)>\theta_F$。若 $x\in B$，$-x\bar{\in}B$，则有$f\in B^*$，$f(x)>\theta_F$。

利用局整关系可证下列共轭定理。

定理10. 设 $F_+\in BC(2)$，F 为备，B_λ为 E 中之实心线性半群，$\cap B_\lambda$非空，$I=\{\lambda\}$为任何有限参量集，则 $(\cap B_\lambda)^*=\sum B_\lambda^*$。□

证明. 若$f\in\sum B_\lambda^*$，则存在$f_\lambda\in B_\lambda^*$使得$f=\sum f_\lambda$，因而对 $x\in\cap B_\lambda$，$f_\lambda(x)\geqslant\theta_F$，因而有$f(x)\geqslant\theta_F$。这就证明了$\sum B_\lambda^*\subset(\cap B)^*$。

利用积集方法，对$E^I=E\uparrow I$建立G型空间（$E\uparrow I$，$F\uparrow I$，$\|*\|_0$，$F_+\uparrow I$），$B=\Pi B_\lambda$，是其中之实心线性半群，而 $E\uparrow I$ 的对角线子空间D与B之交非空。若$f\in(\cap B_\lambda)^*$，则在D上定义$\hat{f}\in D^*$ 于下：$\hat{f}(\hat{x})=f(x)$，$\hat{x}\in D$，$x\in E$，$\hat{f}$在 $D\cap B$ 上非负。由局整转化关系1*，$\hat{f}$可延拓于$E\uparrow I$ 并在B上非负，$\hat{f}(\hat{x})=\sum f_\lambda(x)=f(x)$ $(x\in E)$，$f_\lambda\in E^*$，容易证明$f_\lambda\in B_\lambda^*$，因此 $(\cap B_\lambda)^*\subset B_\lambda^*$。证毕。

注1： 在一定条件下可推广I为无穷集，只要 $\sum a_\lambda$对$a_\lambda\in F$ 有意即可。

注2： 若$f\in E^*$，$B=\{x|f(x)=\theta_F\}$，由定理 9 易证 $B^*=\{\lambda f|\lambda\in K\}$，$f\neq\theta_{E^*}$时，$B$叫做$E$中的超平面。若$B=\{x|f(x)\geqslant\theta_F\}$时，若$f\neq\theta_{E^*}$，这时$B$叫半空间。

可类似于$F=R$时的情况定义伴算子。若E_1，E_2 为 G_0^{++} 型空间，$E=E_1\times E_2$，$T:E_1\longrightarrow E_2$为连续线性，$B=\{x\in E|x=(x_1,x_2,)\ Tx_1=x_2\}$，则可证 $B^*=\{f\in E^*|f=(f_1,f_2)$，$f_1=-T^*f_2\}$，这里$T^*$ 为T之伴算子，$T^*:E_2^*\longrightarrow E_1^*$，$T^*f_2=f_1$，$f_2(Tx_1)=T^*f_2(x_1)=f_1(x_1)(x_1\in E_1)$，其值均属$F$。

注3： 线性空间E 的子集 A，若 $x\in A$，对任何方向自 x 发射的直线与A之交必含某线段于A之中，则 x 叫做A之辐射点，A的辐射点之总体叫辐射核。在上述的凸锥、半群、凸体的命题中往往要求半群是实心的，这涉及内点的概念，因而必须引入拓扑的概念。但是许多结果即使在一般线性空间也有相应形式，而辐射

核可看成集合内点集的一种推广，延拓与分离定理也有相应的发展（参看[12，13，17，18]）。

§3．模及有关的转化关系

3.1. 模是近世代数的一个重要概念，它是诸如线性空间、理想、代数和群表示等概念的推广。线性空间的系数域K改为环时，就是模。系数环可以左乘，也可以右乘，因而一般有左环模与右环模之分。当系数环是可交换时，左环模与右环模实际等价，因而一般不予区别．下面仅限于这类模进行某些讨论．

设M为一模，系数环为K，具有单位1，称M为K模，也即M为一Abel加法群，与K的乘法 $K\times M\to M$ 满足分配律和结合律等性质：

$$\lambda(x_1+x_2)=\lambda x_1+\lambda x_2;\quad (\lambda_1+\lambda_2)x=\lambda_1 x+\lambda_2 x;$$

$$\lambda_1(\lambda_2 x)=(\lambda_1\lambda_2)x;\quad 1x=x.$$

这里x，x_1，$x_2\in M$；λ_1，λ_2，$1\in K$。

若$L\subset M$也是K模，则L叫M的子模．L在M中的陪集形成——Abel群M/L，并且当x_1，x_2属于相同陪集时，则 $x_1-x_2\in L$，而且有$\lambda\in K$，$\lambda(x_1-x_2)\in L$。以陪集为元素，这时形成的K模叫M之商模，仍记为M/L。由元素到其陪集的映射叫自然映射，这是模间的一种基本的形影转化关系。

设M，N为二K模，若映射 $f:M\longrightarrow N$ 是K线性的，即$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，$f(\lambda x)=\lambda f(x)$，则 叫$K$同态，它也是泛系分析（见第十章）所讲的泛同态或一般形影关系的特例，是模间重要的一种转化。

设M'，N'分别是M，N的子模，设$f:M\to N$使得$f(M')\subset N'$，则易证：若x_1，x_2属于M'之相同陪集，则$f(x_1)$，$f(x_2)$属于N'之相同陪集，这就产生了商模间的一种K同态映射

$$f^*:M/M'\longrightarrow N/N'$$

并称它为f的诱导映射．诱导映射也是一种特殊的泛同态或形影

关系.并且也是模间的一种转化关系，另外，诱导$f\to f^*$本身也是另一类更高级的泛同态与形影转化关系。这些转化的特点使下列箭头图可交换

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ a\downarrow & & \downarrow b \\ M/M' & \xrightarrow{f^*} & N/N' \end{array}$$

这里a, b为自然映射。即$f^*a=bf$相符合。另外，若f为满映射(即$N\subset f(M)$)，则f^*也是满映射。

一一对应的泛同态称为泛同构，也简称同构。这时对满同态有下面转化关系：

若 $f:M\longrightarrow f(M)$ 为K同态，则 $f^*:M/f^{-1}(0)\longrightarrow f(M)$ 为同构。

具有生成基的模叫自由模，可以证明，任何模必可赋形为自由模，也即任何模必是自由模的影系统.即模总是潜在自由的。

另外，设G为自由模，$g:G\longrightarrow N$为 K 同态，$h:M\longrightarrow N$为满同态，这时一定存在K同态$f:G\longrightarrow M$，使得g与hf效果相同。

模的一类重要转化是直积。若M_λ，$\lambda\in I$，为K模族，在直积$M=\Pi M_\lambda$中按坐标成分的相应方式定义加法与以K为系数的乘法，并构成一K模。除有限个坐标成分外，均为零的元素形成M的子模M'，叫诸M_λ的直和模，记为$M'=\sum M_\lambda$。当I为有限参量集时，$M=M'$。直积模与直和模都可看成直交展开概念的某种推广。

模的另一类重要转化是张量积，它是直积的某种影系统，它使得直积满足分配律，并使得直积及系数积满足结合律。

由坐标或因子成分的映射可产生直积或直和间的映射，类似产生张量积间的组合同态，这就是同态的张量积的概念，它是模间的转化形成的一种转化系统，是一类结构较复杂的转化。

3.2. 若E为一Abel 群，$A\subset E$，$A+A\subset A$，则A叫E中的泛锥，它是线性半群与锥性集的推广。若$x-y\in A$，则定义$x\geqslant y$，

这时关系$\geqslant$具有传递性，是一种广义的半序性，有时也简称序结构或半序关系，并定义$x\in A$与$x\geqslant 0$（或$x\geqslant\theta_E$）等价。有这类序结构的群叫做泛锥群。对群运算协调的广义序关系也对应某种泛锥$x\geqslant 0$。序结构与泛锥的这种关系即称群的锥序转化关系。

设M为一K模，而M，K均为泛锥群，并且对$x\geqslant y$，$a\geqslant\theta_K$，有$ax\geqslant ay$，则M叫半序模，它是半序线性空间的推广。若$M'\subset M$，$M'+M'\subset M'$，$aM'\subset M'(a\geqslant\theta_K)$，则$M'$叫$M$中的泛锥。具有这种泛锥的模叫做泛锥模。泛锥模与半序模在概念上是等价的，这就是锥序转化关系在模中的表现。

对于半序模可类似半序线性空间一样定义有限备、结（端）、正部分、负部分、绝对值、上界、下界、无限备、σ备、(0)收敛、(0)有界、(0)极限、(ε)收敛、(ε)极限、(ε)有界等概念。因此可以利用一般的半序模作为广义的度量，例如距离、范数、程度的比较，包括引入拓扑性的结构，有界性与收敛性的新概念等。与G型空间对应的定义叫M型空间。例如$(\varepsilon)M_0^{++}$范空间是指一种四元组$(E,F,\|*\|,(\varepsilon))$，$E$与$F$为$K$模，而它们$(E,F,K)$又为泛锥模，$F$为有限备，$\|*\|:E\to F$，满足条件

1) $\|x\|\geqslant\theta_F$，且$\|x\|=\theta_F$与$x=\theta_E$等价；
2) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；
3) $\|ax\|=|a|\,\|x\|(a\in K)$。

而$(\varepsilon)\subset F$，$\varepsilon\geqslant\theta_F$用来描述极限与邻近性质。

若$M(\pm)$为二$(\varepsilon)M_0^{++}$范空间，$f:M_{(-)}\longrightarrow M_{(+)}$，则可按$G$型空间的方式定义$f$的连续性、有界性与线性。这时易证这样的局整转化关系：若f为可加齐次（或线性），f在一点连续包含在整个空间连续。若f的值域复盖某集，则必复盖此集线性组合生成的集合。

3.3. 下面谈第一、二等价定理在$(\varepsilon)M_0^{++}$范空间中的形式。

条件$BC(1)^*$：存在$\theta_n\in K$，而θ_n^{-1}存在并属于K，并且对任何$\varepsilon\in(\varepsilon)$，对充分大的$n$，有$\theta_n\varepsilon\in(\varepsilon)$。

条件$BC(2)^*$：存在$\theta_n\in K$，θ_n^{-1}存在并属于K，并且对任何$\beta\in K$，ε，$\varepsilon'\in(\varepsilon)$，存在$N=(\beta,\varepsilon,\varepsilon')$，使得$n>N$时，$\theta_n\beta\varepsilon\leqslant\varepsilon'$.

设$(E_{(\pm)},F_{(\pm)},\|*\|_{(\pm)},(\varepsilon)_{(\pm)})$为二$(\varepsilon)M_0^{++}$范空间，$f:E_{(-)}\longrightarrow E_{(+)}$。

定理1**．设f为可加齐次，$\varepsilon_{(-)}\in BC(1)^*$，$(\varepsilon)_{(+)}\in BC(2)^*$则$f$之有界性导致$f$的连续性。而当$(\varepsilon)_{(-)}\in BC(2)^*$时，$f$的连续性导致$f$的有界性。□

证明。这只要在定理1*的证明中把r^n，$1/n$改为θ_n即可。

若$E_{(\pm)}$，$\|*\|_{(\pm)}$，f依赖于某参量η，类似定理2和定理2*的证法有

定理2**．若$(\varepsilon)_{(-)}\in BC(1)^*$，$(\varepsilon)_{(+)}\in BC(2)^*$，则由$f$之一致有界性导致它的一致连续性。若$(\varepsilon)_{(-)}\in BC(2)^*$，则由$f$之一致连续性导致一致有界性。□

若由$\|fx\|_{(+)}\leqslant\varepsilon_{(+)}$导致存在$\beta\in K$，使$\|x\|_{(-)}\leqslant\beta\varepsilon_{(-)}$，则称$f$为反有界性。这时上述结果变为

定理2*．设$(\varepsilon)_{(+)}\in BC(1)^*$，$(\varepsilon)_{(-)}\in BC(2)^*$，则由$f$之一致反有界性导致$f^{-1}$的存在及一致连续性。若$(\varepsilon)_{(+)}\in BC(2)^*$，则由$f^{-1}$之一致连续性导致$f$的一致反有界性．□

对于方程族$f_\eta x_\eta=y_\eta$，用相似方法定义稳定性，原收敛性与次收敛性，这时上面的结果导致

定理3*．当f_η一致有界时（若$(\varepsilon)_{(-)}\in BC(2)^*$，$f_\eta$一致连续时即如此），则次收敛性导致原收敛性，当次误差为$\leqslant\xi\varepsilon_{(-)}$时($\varepsilon_{(-)}\in(\varepsilon)_{(-)}$)，原误差$\leqslant\beta\xi\varepsilon_{(+)}$，这里$\beta$: $\|x\|_{(-)}\leqslant\varepsilon_{(-)}\Longrightarrow\|f_\eta x\|_{(+)}\leqslant\beta\varepsilon_{(+)}(\varepsilon_{(+)}\in(\varepsilon)_{(+)})$。□

定理3**．设$(\varepsilon)_{(\pm)}\in BC(1)^*\cap BC(2)^*$，则稳定性与一致反有界等价．当方程族稳定时，原收敛性导致次收敛性．设原误差$\leqslant\xi\varepsilon_{(+)}$，则次误差$\leqslant\alpha\xi\varepsilon_{(-)}$，这里$\alpha$: $\|f_\eta x\|_{(\pm)}\leqslant\varepsilon_{(\pm)}\Longrightarrow\|x\|_{(-)}\leqslant\alpha\varepsilon_{(-)}$。□

§4. 变分与驻值中的一些转化

4.1. 变分实质上是一般映射转化相对线性的近似。一般转化与“变分转化”的关系是一种广义的曲直关系，是多变与少变的关系，是繁简关系，也是一种广义对称与泛对称。只要有了线性概念与收敛的概念就可以一般地引入变分的概念，而微分只是一种特殊的变分。

可以有许多方式来定义环K的零敛性，形式上要求：若λ_1，$\lambda_2\in K$，$\lim\lambda_1=\lim\lambda_2=\theta_K$，则$\lim(\lambda_1+\lambda_2)=\lim\lambda_1\lambda_2=\theta_K$，并对任何$\lambda\in K$有$\lim\lambda_1\lambda=\theta_K$。

有这种性质的环K叫零敛环，相应的模叫半零敛模。半零敛模满足下列条件者叫做零敛模：

1) 若$x,y\in M$，$\lim x=\lim y=\theta_M$，$\lambda,\mu\in K$，则$\lim(\lambda x+\mu y)=\theta_M$；

2) 若$\lambda\in K$，$\lim\lambda=\theta_K$，则对任何$x\in M$有$\lim(\lambda x)=\theta_M$。

设M_x，M_y为二K模，K为一泛锥群，M_x为半零敛模，M_y为零敛模，$G(x_0,h)=G(x_0,\varepsilon,h)=\{x_0+\lambda h|\theta_K\leqslant\lambda<\varepsilon\}\subset M_x$，$f:G(x_0,\varepsilon,h)\longrightarrow M_y$，若存在$f_i(x_0,h)\in M_y$，$1\leqslant i\leqslant n$，使得

$$f(x_0+\lambda h)=f(x_0)+\lambda f_1(x_0,h)+\cdots+\frac{\lambda^n}{n!}f_n(x_0,h)+\lambda^n\Delta$$

并且当$\lambda\to\theta_K(\lambda>\theta_K)$时，$\Delta\to\theta_{M_y}$，则称算子$f$在$x=x_0$处，在$h$方向有$n$阶模变分$f_n(x_0,h)$，并记为$\delta^n f(x_0,h^n)$。这里对于环或模的元素$a$与$1/n!$相乘的意义按一般理解：$\frac{1}{n!}a=b$，即$n!b=a$，而$n!$为整数，$n!b$有意义。

在非线性泛函分析中，通常的Fréchet微分（强微分）。Gateaux微分（弱微分）和Frechet广义变分都是模变分的特例。

若M_x为实域，$x_0=0$，$\delta f(0,1)$存在，则称f在$f(0)$处有切方向$\delta f(0,1)$。流形上切方向的概念是模算子切方向概念的特例，

它是多维流形微分学的基础。

下面我们都要求 M_x，M_y 是能定义模变分的；并且要求对 $0<\lambda<\varepsilon$ 的 λ 有 $\lambda^{-1}\in K$ 存在，这时有

定理11. 若 M_y 为半序模，序与极限协调：$y\geqslant\theta_{M_y}$，则 $\lim y\geqslant\theta_{M_y}$。设 $f:G(x_0,\varepsilon,h)\to M_y$ 于 $x=x_0$ 处有一阶模变分，为了 f 在 $x=x_0$ 处具有相对于 h 的局部极小(极大)，必须

$$\delta f(x_0,h)\geqslant\theta_{M_y}\ \ (\delta f(x_0,h)\leqslant\theta_{M_y}).\ \square$$

证法是显然的。

系1. 在上述定理条件下，若在 $x=x_0$，f 对 h 和 $-h$ 同时有一阶模变分，并且 $\delta f(x_0,h)$ 对 h 是可加的。设 M_y 的序结构为真半序(即 $a\geqslant b$，$b\leqslant a$，必 $a=b$)，则 f 在 $x=x_0$ 有局部极值的必要条件是

$$\delta f(x_0,h)=\theta_{M_y}.\qquad\square$$

系2. 在上述条件下，若二阶模变分 $\delta^2f(x_0,\ h^2)$ 存在，则局部极小（极大）的必要条为 $\delta^2f(x_0,h^2)\geqslant\theta_{M_y}(\delta^2f(x_0,h^2)\leqslant\theta_{M_y})$。$\square$

对于确定的 x_0，$\delta f(x_0,h)$ 可看成作用在 $h\in\{h\}$ 上取值于 M_y 中的算子，叫做导算子，记为 $f'(x_0)$，它的意义是 $f'(x_0)h=\delta f(x_0,h)$，这时 $f'(x_0):\{h\}\longrightarrow M_y$，而 f' 是映 $x_0\in M_x$ 为转化 $\{h\}\longrightarrow M_y$ 的算子，即以算子为值的算子。在非线性泛函中，一般要求 $\delta f(x_0,h)$ 对 h 为连续线性才定义导算子，所以这里的概念是广义的。

由 M_x 到 M_y 的齐次可加映射 M_{xy} 也形成一 K 模，其零元记为 θ_{xy}。若 M_x，M_y 为半序模，$f\in M_{xy}$，对 $x\geqslant\theta_{M_x}$，$f(x)\geqslant\theta_{M_y}$，则记 $f\geqslant\theta_{xy}$，则 M_{xy} 也构成半序模。

设 $g:G\longrightarrow M_y$，$G\subset M_x$，$gh\triangle\theta_{M_y}$，$h\in\{h\}\subset G$，$\triangle\in\{\geqslant,=\leqslant\}$ 导致 $g\triangle\theta_{xy}$，则称 $\{h\}$ 为 $\triangle$ 完全。

系3. M_x，M_y，M_{xy} 满足上述条件，f 于 $x=x_0$ 对 $h\in\{h\}$ 为局部极小(极大)，$\{h\}$ 为 $\geqslant$ 完全（$\leqslant$ 完全），则必有 $f'(x_0)\geqslant\theta_{xy}(f'(x_0)\leqslant\theta_{xy})$。$\square$

系4. M_x，M_y，M_{xy} 满足上述条件，f 于 $x=x_0$ 对 $h\in\{h\}$ 取局

部极值，存在一$h_0 \in \{h\}$使$-h_0 \in \{h\}$，并且$\{h\}$为“=”完全，则必$f'(x_0)=\theta_{xy}$。□

总之，在一定条件下，三种约束关系或泛对称：极值性，$\delta f(x_0,h) \triangle \theta_{M_y}$，$f'(x_0) \triangle \theta_{xy}$，它们是相互转化的。$\delta f(x_0,h) \triangle \theta_{M_y}$或$f'(x_0) \triangle \theta_{xy}$即广义的Euler-Lagrange方程。这一结论统一概括了古典微分学与变分学的有关定理，并包含了近代关于变分不等式或单边变分原理的基本关系。

若$\delta f(x_0,h) \triangle \theta_{M_y}$，称$x_0$为相对于$(h,\triangle)$或$\triangle$的变分型驻值点。若$f'(x_0) \triangle \theta_{xy}$，称$x_0$为相对于$\triangle$的导算子型驻值点。上面的论述表明各类驻值点和极值点这些泛对称在一定条件下是相互转化的。

4.2. 简记θ_{M_y}为θ_y。对$\delta f(x,h)$有定义的情况，定义互易集：

$$M^* = M^*(f) = f(M,*) = \{h \mid \delta f(x,h) = \theta_y, x \in M\},$$

$$M_* = M_*(f) = f(*,M) = \{x \mid \delta f(x,h) = \theta_y, h \in M\}.$$

$M^*(f)$是M相对于$f^{-1}(\theta_y)$的切集或切空间。M是$M_*(f)$相对于$f^{-1}(\theta_y)$的一部分切集。故互易集是切集概念的一种引伸。

定义互易算子

$$f_*(x) = f_*(x,a) = f(x) - \delta f(x, x-a).$$

互易算子与互易集的概念并不依赖M_y是否有序结构，只要有一定的拓扑结构或收敛概念使$\delta f(x,h)$有意义即可，因而只要f在x的h半邻域$G(x,\varepsilon,h)$有定义即可，$f: G(x,\varepsilon,h) \longrightarrow M_y$。为了叙述方便，下面我们限于$M_x$是线性空间，许多情况可以推广到模。

定理12. f于$x_0 \in M$对M^*(或于$x_0 \in M_*$对M)取变分$\{=\}$驻值，并且这时$f_*(x_0) = f(x_0)$对$x_0 \in M, x_0 - a \in M^*$或$x_0 \in M_*$，$x_0 - a \in M$成立。若$\delta f(x,h)$对$h$是可加齐次的，则

$$\delta f_*(x_0,h) = \delta f(x_0,h) - \delta f(x_0+\lambda h, h) - \frac{1}{\lambda}\delta f(x_0+\lambda h, x_0 - a)$$

因而若等式右边$\triangle\theta_y$，则$\delta f_*(x_0,h)\triangle\theta_y$。□

证明 由$\delta f(x_0,x-a)=\theta_y$导致$f_*(x_0)=f(x_0)$来自互易算子的定义。另外若$\delta f$对$h$为可加齐次，则

$$
\begin{aligned}
f_*(x_0+\lambda h)-f_*(x_0)=f(x_0+\lambda h)-f(x_0)\\
-\lambda\delta f(x_0+\lambda h,h)\\
-\delta f(x_0+\lambda h,x_0-a)
\end{aligned}
$$

由变分的定义即求得δf_*的公式。证完。

系1. 在上述定理的条件下，若$\delta f(x,h)$对x为连续，$\delta f(x_0+\lambda h,\ x_0-a)=O(\lambda)$，$x_0\in M\cap(M^*+a)$或$x_0\in M_*\cap(M+a)$，则$f_*(x_0)=f(x_0)$，$\delta f_*(x_0,h)=\theta_y$。□

系2. 若δf对h齐次可加，对x连续，x_0-a与x_0相切，f于x_0对h取变分驻值，则f_*亦然，并且$f_*(x_0)=f(x_0)$。□

若M_y有半序结构，f的定义域为凸，并且δf存在，当$f(x)\geqslant f(x')+\delta f(x',x-x')$成立时，称算子$f$为凸的或变分凸的。把$\geqslant$改为$\leqslant$时，叫变分凹的。普通意义下的凸函数或凸算子在一般条件下(例如M_y的序结构为备)是变分凸的。若f的二阶导算子f''存在连续，并且对任何h，$f''(x+\lambda h)h^2\geqslant\theta_y$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，则$f$必是凸的。

定理13. 设f在有关定义域为变分凸，$B\subset M_x$，则对$x_*\in B_*$，$x\in B+x_*$，有$f(x)\geqslant f(x_*)$，因而若$x_*\in B_*\cap(B+x_*)$，则x_*是f在$B+x_*$中的最小点。若$\delta f(x,h)$对h为可加，$x_*\in B_*$，$x\in B+a$，$x_0\in B_*\cap(B+a)$，则

$$f(x)\geqslant f(x_0)=f_*(x_0)\geqslant f_*(x_*).$$

若x_0是f在$B+a$中的极值点，而且$B+a$包含x_0的x_0-a邻域$G(x_0,\varepsilon,\pm(x_0-a))$，则$x_0\in B_*\cap(B+a)$，并且$x_0$是$f$在$B+a$中的极小点，是$f_*$在$B_*$中的极大点，$\delta f(x_0,x_0-a)=\theta_y$，因而若$\delta f(x_0+\lambda(x_0-a),x_0-a)=O(\lambda)$，则$\delta f_*(x_0,x_0-a)=\theta_y$。□

证明 当$x_*\in B_*$，$x\in B+x_*$时，$\delta f(x_*,x-x_*)=\theta_y$，由$f$之凸性得$f(x)\geqslant f(x_*)$。

若$x_*\in B_*$，$x\in B+a$，则$\delta f(x_*,x-a)=\theta_y$。由$\delta f(x,h)$对$h$

的可加性，$\delta f(x_*,x-x_*)=\delta f(x_*,x-a)-\delta f(x_*,x_*-a)=-\delta f(x_*,x_*-a)$，由凸性定义得 $f(x)\geqslant f(x_*)+\delta f(x_*,x-x_*)=f_*(x_*)$。对公共点$x\in B_*\cap(B+a)$应用这一不等式即得

$$f(x)\geqslant f(x_0)=f_*(x_0)\geqslant f_*(x_*).$$

若x_0是f在$B+a$中的极值点，而且$B+a$包含x_0的x_0-a邻域，这时$\delta f(x_0,x_0-a)=\theta_y$，由前证不等式，知$x_0$是$f$在$B+a$中的极小点，是$f_*$在$B_*$中的极大点。又由定理12，而

$$\delta f(x_0+\lambda(x_0-a),x_0-a)=O(\lambda)$$

故得$\delta f_*(x_0,x-a)=\theta_y$。证完。

古典变分互易定理一般限于有限维空间或Hilbert空间，B限于有限维子空间，互易集概念的引用，更加简明地披露了变分互易的一些内在关系。定理12、13以及下面介绍的定理14及其推论可看成古典变分互易定理的一种发展。

设H：$M_x^2\longrightarrow M_y$，若对系数α，β，

$$H(\alpha x_1+\beta x_2,x')=\alpha H(x_1,x')+\beta H(x_2,x'),$$

$$H(x',\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha H(x',x_1)+\beta H(x',x_2),$$

并且H对各分量是连续的，则称H为双线性的。若$H(x,x')=H(x',x)$，则称H为对称的。

设$B\subset M_x$为M_x中的集合，$A:B\longrightarrow M_y$，若对系数λ有$A(\lambda x)=\lambda A(x)$，称$A$为齐次的。而若$A(x_1+x_2)=A(x_1)+A(x_2)$，称$A$为可加的。如果有$H(Ax,x')=H(x,Ax')$，称$A$对$H$为对称的。若$M_y$有半序结构，$H(Ax,x)\geqslant\theta_y$，则称$A$对$H$为正。

定理14. 设$H,H':M_x^2\longrightarrow M_y$，$H$为双线性对称，$H'$对第二分量为线性，$H'':M_x\longrightarrow M_y$为线性，$g$，$g'\in M_x$，$g_0\in M_y$，$A$为齐次可加并对$H$对称

$$f(x)=H(Ax-2g,x)+H'(g',x)+H''(x)+g_0,$$

则

$$\delta f(x,h)=2H(Ax-g,h)+H'(g',h)+H''(h),$$

$$f_*(x)=2H(Ax-g,a)-H(Ax,x)-H'(g',x-a)-H''(x-a)+g_0$$

$$\delta f_*(x,h)=2H(A(a-x),h)-H'(g',h)-H''(h).$$

若 M_y 为有序结构，A对H为正，则f为变分凸，f_*为变分凹，因而可用定理13的互易关系．□

证明． 经简单计算

$$f(x+\lambda h)-f(x)=2\lambda H(Ax-g,h)+\lambda H'(g',h)$$
$$+\lambda H''(h)+\lambda^2 H(Ah,h),$$

因而算出$\delta f(x,h)$与f_*的公式，而且

$$f_*(x+\lambda h)-f_*(x)=2\lambda H(A(a-x),h)-\lambda H'(g',h)$$
$$-\lambda H''(h)-\lambda^2 H(Ah,h),$$

因而求得$\delta f_*(x,h)$的公式．

若A对H为正，则$H(A(x+x'),x+x')\geqslant\theta_y$，

展开得

$$H(Ax,x)+H(Ax',x')+2H(Ax,x')\geqslant\theta_y,$$

因此有

$$H(Ax-2g,x)\geqslant H(Ax'-2g,x')+H(2Ax'$$
$$-2g,x-x'),$$

补上H'，H''与g_0项即证$f(x)\geqslant f(x')+\delta f(x',x-x')$．

同理，由$H(A(x-x'),x-x')\geqslant\theta_y$展开得

$$H(Ax,x)+H(Ax',x')-2H(Ax',x)\geqslant\theta_y,$$

因此有

$$2H(A(x-x'),a)-H(Ax,x)\leqslant -H(Ax',x')$$
$$+2H(A(a-x'),x-x'),$$

也即

$$2H(Ax-g,a)-H(Ax,x)\leqslant 2H(Ax'-g,a)$$
$$-H(Ax',x')+2H(A(a-x'),x-x'),$$

补上H'，H''与g_0项即证f_*为变分凹．证完．

若$2H(Ax_0-g,h)+H'(g',h)+H''(h)\triangle\theta_y$，$h\in M$，则称$x_0$是广义方程$Ax\triangle g$相对于$M$的$H$广义解或$(H,H',H'')$广义解．当$H'$与$H''$为零映射时，即变为$H(Ax_0-g,h)\triangle\theta_y$．$H$广义解是Ritz–ГаЛёркин变分近似解概念的一种推广．

系1. 在定理14的条件下，$Ax\triangle g$相对于M的H广义解等价于f相对于M的$\triangle$驻值解：$\delta f(x,h)\triangle\theta_y$，$h\in M$，这里对不等式须加$M_y$具序结构的条件。□

系2. 在定理14的条件下，下列三命题等价：

1）$x=x_0$使f对h半邻域为极小(极大)，$h\in M$；

2）$\delta f(x_0,h)\geqslant\theta_y(\leqslant\theta_y)$，$h\in M$；

3）x_0是$Ax\geqslant g(Ax\leqslant g)$相对于$M$的$(H,H',H'')$广义解。□

系3. 在定理14的条件下，若a是方程$Ax=g$对$h\in M$的$(H,0,0)$广义解，则

$$\delta f(x,h)=-\delta f_*(x,h),$$

因而若x_0是f对$h\in M$的$\triangle$驻值点，则必是f_*对$h\in M$的反$\triangle$驻值点：$\delta f_*(x_0,h)\ \overline{\triangle}\theta_y$。这里$\overline{\triangle}$是$\triangle$之反(即$\leqslant$，$\geqslant$变为$\geqslant$，$\leqslant$)，因而极大极小相反，并且$x_0$是$Ax\triangle g$相对于$M$的$(H,0,0)$广义解。而当$\delta f(x_0,h)=\theta_y$时，尚有$f(x_0)=f_*(x_0)$。□

系4. 在定理14的条件下，若x_0是方程$Ax=g$对M的(H,H',H'')广义解，则x_0是相对于M的f的极值点，并且$f(x_0)=f_*(x_0)$。若A相对于H为正，则x_0是相对于$h\in M$的f的极小点和f_*的极大点。□

系5. 在定理14的条件下，若定义域B为闭凸集，A对H为正，则下三命题等价：

1）f于$x=x_0\in B$取极小，

2）$\delta f(x_0,x-x_0)\geqslant\theta_y$，$x\in B$

3）$Ax\geqslant g$对$h=x-x_0$，$x\in B$于x_0有(H,H',H'')广义解。□

系6. 在定理14的条件下，若A对H为正，$B\subset M_x$，则对$x_x\in B_*$，$x\in B+x_*$有$f(x)\geqslant f(x_*)$，因而若$x_*\in B_*\cap(B+x_*)$，则x_*是f在$B+x_*$中的最小点，若$x_*\in B_*$，$x\in B+a$，$x_0\in B_*\cap(B+a)$，则

$$f(x)\geqslant f(x_0)=f_*(x_0)\geqslant f_*(x_*),$$

因而这时$\delta f(x_0,x-x_0)\geqslant\theta_y$，$\delta f_*(x_0,x_*-x_0)\leqslant\theta_y$，并且$x_0$是$Ax\geqslant g$对于$h=x-x_0(x\in B+a)$的$(H,H',H'')$广义解。□

系7. 在定理14的条件下，若A对H为正，$B \subset M_x$，x_0是f在$B+a$中的极值点，而且$B+a$包含x_0的x_0-a邻域$G(x_0, \varepsilon, \pm(x_0-a))$，则$x_0 \in B_* \cap (B+a)$，并且$\delta f(x_0, x_0-a)=\theta_y$，$f$在$x_0 \in B+a$为极小，$f_*$在$x_0 \in B_*$中为极大。

$$f(x) \geqslant f(x_0) = f_*(x_0) \geqslant f_*(x_*)$$

同时x_0是$Ax \geqslant g$对于$h = x - x_0 (x \in B+a)$和是$Ax = g$对于$x_0 - a$的$(H, H, 'H'')$广义解。□

定理14及其推论也是传统二次泛函变分定理及单边变分定理的推广与发展. 由于在传统工作中A的正性与f的凸性的关系没有得到揭示，故即使对 Hilbert 空间的二次泛函，这里的结果也比传统的定理包含更多的内容.

有限单元法的基础是Ritz方法，其推广则是ГаЛёркин 方法，H广义解的概念可看成ГаЛёркин方法进一步的推广，定理14及其推论揭示了这种广义的ГаЛёркин方法与变分原理的联系.

4.3. 变分的转化关系中一种重要的泛对称转化是约束驻值与相应的 Lagrange 算子的鞍点之间的转化，这类转化是古典的Lagrange乘数法的发展.

设 M_x，M_y，M_z，M_t 为线性半序空间，零点分别为θ_x，θ_y，θ_z，θ_t. 对任何半序集 E，其极大集 $\hat{E}$ 定义为$\{x|x \in E$，若$x' \in E$，$x' \geqslant x$，则$x' \leqslant x\}$. 类似定义极小集$\check{E}$.

设B_x，B'_z，$B''_z \subset M_x$，f: $B'_z \longrightarrow M_y$, g: $B''_z \longrightarrow M_z$，$B_z \subset M_z$，$E = f[B_x \cap B'_z \cap g^{-1}(B_z)]$. 这时约束极值在于求$\hat{E}$和$\check{E}$ 或 $f^{-1}(\hat{E})$，$f^{-1}(\check{E})$.

记 M_y^* 为$M_y \longrightarrow M_t$的连续线性映射的总体，类似定义M_z^*. 一般我们要求M_t是序备的，即其序结构为备. 定义Lagrange算子

$$L(x, Z^*) = L(x, Z^*;\ y^*;\ f, g) = y^*[f(x)] + Z^*[g(x)]$$

这里$Z^* \in M_z^*$，$y^* \in M_y^*$.

设$D \subset M_x \times M_z^*$，$(x_0, Z_0^*) \in D$，$(x, Z^*) \in D$，且

$$L(x, Z_y^*;\ y_0^*) \leqslant L(x_0, Z_0^*;\ y_0^*) \leqslant L(x_0, Z^*;\ y_0^*),$$

则称L于(x_0, Z_0^*)处有一鞍点或y_0^*鞍点(相对于D而言)。

按传统偏导数方式定义偏变分，对x和Z^*的偏变分分别记为δ_x和δ_{Z^*}。若

$\delta_x L((x_0, Z_0^*); h) \leqslant \theta_t$, $h = x - x_0$, $\{Z_0^*\} \times G(x_0, \varepsilon, h) \subset D$,
$\delta_{Z^*} L((x_0, Z_0^*); h) \geqslant \theta_t$, $h = Z^* - Z_0^*$, $\{x_0\} \times G(Z_0^*, \varepsilon, h) \subset D$, 则称$(x_0, Z_0^*)$是$L$的变分鞍点。鞍点一般是变分鞍点。

定理15. 若$(x_0, \theta_{Z^*}) \in D$($\theta_{Z^*}$为$M_z^*$的零点)，$(x_0, Z_0^*)$是$L$的$y_0^*$鞍点，则对$(x, Z^*) \in D$有：

1) $(Z^* - Z_0^*)[g(x_0)] \geqslant \theta_t$;

2) $y_0^*[f(x_0) - f(x)] \geqslant Z_0^*[g(x)]$;

3) $y_0^*[f(x_0) - f(x)] \geqslant Z_0^*[g(x) - g(x_0)]$. □

证明 由$L(x_0, Z_0^*) \leqslant L(x_0, Z^*)$导出1)。而2)由$L(x, Z_0^*) \leqslant L(x_0, Z^*)$和$Z^* = \theta_{Z^*}$导出。3)可由条件$L(x, Z_0^*) \leqslant L(x_0, Z^*)$和1)导出。证完。

系1. 若$\{x_0\} \times \{Z^* \geqslant \theta_{Z^*}\} \subset D$，$M_t$为备，则在定理15的条件下，$g(x_0) \geqslant \theta_Z$。若$Z_0^* \geqslant \theta_{Z^*}$，$g(x) \geqslant \theta_Z$，$(x, Z_0^*) \in D$，则$f$于$x_0$对$D$有$y_0^*$型极大：$y_0^*[f(x_0)] \geqslant y_0^*[f(x)]$。□

系2. 若$\{x_0\} \times M_z^* \subset D$，$M_t$为备，则在定理15的条件下，$g(x_0) = \theta_Z$。□

系3. 在定理15的条件下，若$Z_0^*[g(x)] \geqslant Z_0^*[g(x_0)]$，则$y_0^*[f(x_0)] \geqslant y_0^*[f(x)]$，也即$x_0$是$g$的$Z_0^*$极小导致$x_0$是$f$的$y_0^*$极大。□

系4. 在定理15的条件下，记

$$E = \{y_0^*[f(x)] \mid Z_0^*[g(x_0)] \leqslant Z_0^*[g(x)]\}$$

则$y_0^*[f(x_0)] \in \hat{E}$。□

系5. 在定理15的条件下，若$Z_0^* \geqslant \theta_{Z^*}$，

$$E_0 = \{y_0^*[f(x)] \mid g(x_0) \leqslant g(x)\},$$

则$y_0^*[f(x_0)] \in \widehat{E}$。□

系6. 在定理15的条件下，记

$$B = \{y_0^*[f(x)] + z_0^*[g(x)]\},$$

则 $y_0^*[f(x_0)]+z_0^*[g(x_0)]\in\widehat{B}$。□

系7. 在定理15的条件下，若 $F_1=\{y_0^*[f(x)]\}$，$F_2=\{z_0^*[g(x)]\}$，$F_3=\{g(x)\}$，设 $x_0\in(z_0^*g)^{-1}(\check{F}_2)$，则 $y_0^*[f(x_0)]\in\widehat{F}_1$。若 $z_0^*\geqslant\theta_2^*$，$x_0\in g^{-1}[\check{F}_3]$，则 $y_0^*[f(x_0)]\in\widehat{F}_1$。□

系4、系5、系6说明，在一定条件下，$\widehat{E}$ 和 $\widehat{E}_0$ 的问题可转化为 $\widehat{B}$ 的问题，也即约束优化转化为非约束优化，这正是Lagrange乘数法原来的思想。若 $-z_0^*[g(x)]$ 或 $-g(x)$ 表搜索 x 的代价，$y_0^*[f(x)]$ 表搜索到x的可能性，则找寻$\widehat{E}$ 和$\widehat{E}_0$ 的问题即为约束最优搜索问题，它可转化为无约束最优搜索问题$\widehat{B}$。有约束与无约束之间的转化本身也是一种泛对称性。

定义.

$$B_x(f,\ g)=\{(y,\ z)\mid y\in M_y,\ y\leqslant f(x),\ z\in M_z,\ z\leqslant g(x)\text{对某}x\in B_x\}.$$

定理16. 设$f:B_x\longrightarrow M_y$，$g:B_x\longrightarrow M_z$，$B_x(f,\ g)$在$M_y\times M_z$中为凸并有内点，$f(x_0)\geqslant f(x)(x_0\in B_x,\ x\in B_x)$，$g(x_0)\geqslant\theta_z$,$M_t$的序结构为备，则存在不同时为零的$y_0^*\in M_y^*$，$z_0^*\in M_z^*$,$y_0^*\geqslant\theta_{y*}$，$z_0^*\geqslant\theta_{z*}$，使得$L(x,\ z^*;\ y^*;\ f,\ g)$于$(x_0,\ z_0^*)$有$y_0^*$鞍点。□

证明. 因$(f(x_0),\ \theta_z)$是$B_x(f,\ g)$的界点，故存在不全为零的$(y_0^*,\ z_0^*)$，$y_0^*\in M_y^*$，$z_0^*\in M_z^*$使得对$(y,\ z)\in B_x(f,\ g)$有

$$y_0^*(y)+z_0^*(z)\leqslant y_0^*[f(x_0)]+z_0^*(\theta_z).$$

因此有

$$y_0^*[f(x)]+z_0^*[g(x)]\leqslant y_0^*[f(x_0)],\qquad (*)$$

$$z_0^*[z]\leqslant\theta_t(z\leqslant\theta_z),$$

$$y_0^*[y]\leqslant\theta_t(y\leqslant f(x_0)),$$

后二式导致$z_0^*\geqslant\theta_{z*}$，$y_0^*\geqslant\theta_{y*}$。而第一式导致$z_0^*[g(x_0)]=\theta_t$，结合起来即证$(x_0,\ z_0^*)$是$L$的$y_0^*$鞍点。证完。

定理16* 在上定理条件下，若存在$(y_*,\ z_*)\in B_x(f,\ g)$，$z_*>\theta_z$，则必$y_0^*\neq\theta_y^*$。□

证明. 因若$y_0^*=\theta_y^*$，代入定理16证明中之$y_0^*(y_*)+z_0^*(z_*)\leqslant$

$y_0^*[f(x_0)]+z_0^*(\theta_z)$，得到不等式$z_0^*[z_*]\leqslant\theta_t$，因而$z_0^*[z_*]=\theta_t$。但是$z_0^*\geqslant\theta_z^*$，$z_0^*\neq\theta_z^*$，只能$z_0^*[z_*]\neq\theta_t$，矛盾。证毕。

系 (Kuhn-Tucker-Slater-Uzawa-Hurwicz 定理)。设 B_x 为一凸集，f与g为凹，存在$x_*\in B_x$，$g(x_*)>\theta_z$，M_t为备，则x_0为f于B_x中之极大使$g(x_0)\geqslant\theta_z$之充要条件是存在$y_0^*\in M_y^*$，$z_0^*\in M_z^*$，$y_0^*\geqslant\theta_y^*$，$z_0^*\geqslant\theta_z^*$，$y_0^*\neq\theta_y^*$，使 (x_0, z_0^*)是L的y_0^*鞍点。□

证明. 因为这时定理15、16和16*的条件得到满足，故证。

4.4. 在这里我们对 Дубовичкий-Милютин 的极值理论作一些补充的说明。

Дубовичкий和Милютин 的工作是把极值性与约束性这些泛对称用一些凸锥或线性半群B_i来刻划，于是约束极值的一个必要条件是$\cup B_i$为空集.因而导致存在不都恒为0的连续线性泛函 $b_i^*\in B_i^*$，使得$\sum b_i^*=0$。在特殊情况下就可转化为极值控制的Понтрягин原理、多变量分析的条件极值定理、变分法的Euler-Lagrange方程和数学规划中的Kuhn-Tucker定理。

Дубовичкий和Милютин的工作可以这样来推广，一方面目标泛函可以改为一般取值半序线性空间的算子；另一方面，对偶锥B_i^*不是泛函集而是类似的取值半序线性空间的算子集。从本章§2，§3的工作，我们知道，对值空间是序备的情况，传统泛函分析(包括凸锥理论)的大部分结果都可推广，这也包括 Дубовичкий 和 Милютин 的定理。下面引入的概念与分析5传统的有些不同。

设约束集为$B\subset M_x$，$x_0\in B$，R: $G(0, 1)\longrightarrow B$，$R(0)=x_0$，并于$\lambda=0$处可变分，则$\delta R(0, 1)$叫做于$x=x_0$处B的可变分方向，其总体集记为$B(x_0)$，$h\in B(x_0)$表示可在B中引一曲线$R(\lambda)(\lambda\in[0, \varepsilon))$通于$R(0)=x_0$，并在$x_0$处有切方向$h$，或者说，$x_0+\lambda h$邻近有$R(\lambda)\in B$，邻近程度比$\lambda$的阶要高。可变分方向是传统切方向与容许方向（能行方向）概念的统一。

设$B\subset M_x$，$f: B\longrightarrow M_y$，$x_0\in B$，$\delta R(0, 1)\in B(x_0)$，若存在$\varepsilon_0=\varepsilon_0(\delta R(0, 1))>0$，$\delta=\delta(\delta R(0, 1))>0(<0)$，使得对$\lambda\in$

$[0, \varepsilon_0)$有

$$f(R(\lambda)) \geqslant f(x_0) + \lambda \delta$$

$$(f(R(\lambda) \leqslant f(x_0) + \lambda \delta),$$

则$\delta R(0, 1)$叫做f于$x_0 \in B$的升向（降向），并记为$\delta R(0, 1) \in B(x_0, f\uparrow)(\delta R(0, 1) \in B(x_0, f\downarrow)$。显然有

$$B(x_0, f\uparrow), \ B(x_0, f\downarrow) \subset B(x_0).$$

定理17. 若约束$B = \cap D_\lambda$，则$f: D_\lambda \longrightarrow M_y$于$x = x_0 \in B$为极大（极小）的必要条件是

$$\cap D_\lambda(x_0, f\uparrow) = \phi(\cap D_\lambda(x_0, f\downarrow)) = \phi)$$

或者

$$(\cap D_\lambda(x_0)) \cap B(x_0, f\uparrow) = \phi((\cap D_\lambda(x_0)) \cap B(x_0, f\downarrow) = \phi). \ \square$$

证明. 从定义即可推得.

系1. 若M_t为序备，其正部$(M_t)+ \in BC(2)$，M_x为局部凸，$D_\lambda(x_0, f\uparrow)$(相应$D_\lambda(x_0, f\downarrow)$)为凸，并至多除一个"λ"外为实心，则$f$于$x_0$为极大（极小）的必要条件是存在不全为零的$d_\lambda^* \in D_\lambda^*(x_0, f\uparrow)(d_\lambda^* \in D_\lambda^*(x_0, f\downarrow))$，使得

$$\sum d_\lambda^* = \theta_{x^*}. \qquad \square$$

可以证明，因对序备的值空间M_t，凸锥分离定理成立，故对例外的λ_0，若$\bigcap_{\lambda \neq \lambda_0} D_\lambda(x_0, f\uparrow) = D \neq \phi$，则存在不为零的$d^* \in M_t^*$，使得$d^*(x) \geqslant \theta_t(x \in D)$，$d^*(x) \leqslant \theta_t(x \in D_{\lambda_0}(x_0, f\uparrow))$，再利用关系式

$$(\bigcap_{\lambda \neq \lambda_0} D_\lambda(x_0, f\uparrow)^* = \sum_{\lambda \neq \lambda_0} D_\lambda^*(x^0, f\uparrow)$$

知存在$d_\lambda^* \in D_\lambda^*(x_0, f\uparrow)$使得$d^* = \sum d_\lambda^*(\lambda \neq \lambda_0)$，令$d_{\lambda_0}^* = -d^*$，即证。对于$D = \phi$，可用归纳方法证明。对极小问题，证明类似。

系2. 在上定理的条件下，若$D_\lambda(x_0)$，$B(x_0, f\uparrow)$（$B(x_0, f\uparrow)$）均为凸锥，并且至多除一个外其余为实心的，设M_x为局部凸，M_t为序备，$(M_t)_+ \in BC(2)$，则f于x_0为极大（极小）的必要条件是存在不全为零的$d_\lambda^* \in D_\lambda^*(x_0)$，$b^* \in B^*(x_0, f\uparrow)$（$b^* \in B^*(x_0, f\downarrow)$）使得

$b^* + \sum d_\lambda^* = \theta_{x^{**}}$. □

对偶空间的元素可看成微商或变分的一种推广，因而$\sum d_\lambda^* = \theta_{x^{**}}$或$b^* + \sum d_\lambda^* = \theta_{x^{**}}$类似于$\delta f(x_0, h) = \theta_y$，$f'(x_0) = \theta_{x_y}$，可看成Euler-Lagrange方程的一种广义形式.它描述一种对偶型驻值，上面的定理指出极值型驻值以对偶型驻值为必要条件，是一种新的形式的泛对称转化.

4.5. 下面我们来讨论变分方法中的误差转化.

设E为某线性空间中的子集，$E_\lambda \subset E$，$\{\lambda\}$为任何趋于$+\infty$的有序实参数族；$H_\lambda \in (E \longrightarrow E_\lambda)$为投影算子，即$H_\lambda^2 = H_\lambda$.

设$A \in (E \longrightarrow E)$（不一定是线性的），则称方程$u = H_\lambda A u$在$E_\lambda$中的解$u_\lambda$为方程$u = Au$（相对于$E_\lambda$）的（广义的）Галёркин（型）近似解.

原来的Галёркин方法以及后来的Петров的推广都是这种近似解法的特例.

为了估计Галёркин型近似解对真解的误差，我们引入下述条件（G）

1）E为一Banach空间之子集，范数为$\|\cdot\|$，$H_\lambda E = E_\lambda \subset E$；$E_{\lambda_1} \subset E_{\lambda_2}$，$\lambda_1 \leqslant \lambda_2$；$\bigcup_\lambda E_\lambda$在$E$中（对$\|\cdot\|$）稠密；

2）A在E中有Fréchet微商Q，1不是Q之特征值，$\|(I-Q)^{-1}\| = \delta < \infty$，$I$为么算子；$u = Au$有唯一解$u_* \in E$；

3）数序列

$$\xi(\lambda) = \frac{\delta(2a_\lambda + d_\lambda b_\lambda + d_\lambda c_\lambda)}{1 - \delta(a_\lambda + d_\lambda b_\lambda + d_\lambda c_\lambda)}$$

有界，这里$a_\lambda = \|Q - H_\lambda Q\|$，$b_\lambda = \|QH_\lambda - Q\|$，$d_\lambda = \|H_\lambda\|$，$c_\lambda = \|Au_* - Au_\lambda - Q(u_* - u_\lambda)\| \|u_* - u_\lambda\|^{-1}$，$u_\lambda$为$u = Au$相对于$E_\lambda$的Галёркин型近似解.

应该指出，对许多具体场合，条件3）是可以实现的.

d_λ常常是有界的，按Banach空间的双直交基的展式部分和（广义Fourier级数部分和）往往满足类似于直交级数的Bessel不等

式的不等式(这样的基叫做Bessel基)。若$H_\lambda u$就是这样的部分和，d_λ的有界性可以用Bessel型不等式导出，特别对Hilbert 空间更是如此（因这时Bessel不等式必然成立)。

设$M(u, \|E_\lambda\|)$为 E_λ中对u在范数$\|\cdot\|$的意义下的某一最优逼近元素，即使得$\|u-v\|$达到极小的$v\in E_\lambda$。当然$M(u, \|E_\lambda\|)$不一定存在，我们在以后用到这一符号时，总是已默认它是存在的，而且范数$\|\cdot\|$还可以是一般G^+范数，这时$\|\cdot\|$取值的线性半序空间一般要求是备的。

设$H_\lambda u$为$M(u, \|E_\lambda\|)$，当H_λ为线性时，d_λ 也常常是有界的(利用共鸣定理)。条件 (G) 中之1) 往往可帮助我们来判定d_λ是否有界。

当B有界时，若$H_\lambda \longrightarrow I$（么算子），则$a_\lambda$，$b_\lambda \to 0$。

若$Au \equiv Tu+f$，T为线性，这时$B=T$，因而也就有$c_\lambda=0$。

当A为全连续时，即A为映有界集为列紧集的连续算子时，有$\|u_\lambda-u_*\|\to 0$，a_λ，b_λ，$c_\lambda \to 0$，故只要d_λ有界，这时就有$\xi(\lambda)\to 0$（参看[8]）。

有了这样的认识，我们就可以陈述 красно-сеΛЬский 定理的一种形式

G转化引理．若条件(G)成立，则有

$$\|u_\lambda-u_*\|\leqslant(1+\xi(\lambda))\|u_*-H_\lambda u_*\|.$$

证明参看[8]（176页)，这里引用了稍为一般的形式(我们把[8]的证明过程中用到的条件汇集成条件 (G))。

设T为Hilbert空间E中定义在$D(T)$上之线性全连续算子，η_0为其简单的特征值，u^0为对应的特征元，

$$Tu^0=\eta_0 u^0 \tag{1}$$

规定$\|u^0\|=(\eta^0)^{-1}$，则上方程的解化成方程

$$u=\|u\|Tu \tag{2}$$

的解，而且特征元和特征值同时解出。这是一非线性方程，其对于$E_\lambda\subset D(T)$的ГаΛёркин近似解u_λ^0

$$u_\lambda^0-\|u_\lambda^0\|H_\lambda Tu_\lambda^0=0,\ \eta_\lambda=\|u_\lambda^0\|^{-1},$$

也就是（1）对于E_λ之Галёркин近似解．把（2）写成$u=Au$的形式，则条件（G）中之Q（为A在u^0处的Fréchet 微商）有下列形式

$$Qu=\eta_0^2(u,\ u^0)u^0+\frac{1}{\eta_0}Tu$$

只要$\cup E_\lambda$在$D(T)$中稠密，则条件(G)就会得到满足，并且对应的$\xi(\lambda)\to 0$，因而G转化引理变成：

G*转化引理． 在上述条件下

$$\left|\frac{1}{\eta_\lambda}-\frac{1}{\eta_0}\right|\leqslant(1+\xi(\lambda))\|u^0-H_\lambda u^0\|$$

$$\|u_\lambda^0-u^0\|\leqslant(1+\xi(\lambda))\|u^0-H_\lambda u^0\|$$

（参看[8]中182—183页）．□

我们现在来求出一些更深入的结果．

设E为某Hilbert空间，H在E中稠密，线性算子$T=A_0+K$之定义域$D(T)=D(A_0)\subset H$，而A_0在$D(A_0)$上对E之内积（$*$，$\cdot$）是正定的，即存在常数$r>0$，使得$(A_0u,\ u)\geqslant r^2\|u\|^2,\ u\in D(A_0)$．设$D(A_0)$依$A_0$之能量范数$\|u\|_e(A_0)\equiv[u,\ u]^{\frac{1}{2}}\equiv(A_0u,u)^{\frac{1}{2}}$封闭而成$H$．设$E_n$是有限维的．

定理18． 设$E_{n_1}\subset E_{n_2}\subset H$，$n_1\leqslant n_2$，$\bigcup\limits_n E_n$按范数$\|\cdot\|_e(A_0)$在$H$中稠密．设$A_0^{-1}K$（经开拓后）在$H$中（对$\|\cdot\|_e(A_0)$）为全连续，$E_n$对$\|\cdot\|_e(A_0)$为闭，方程

$$Tu\equiv(A_0+K)u=f \tag{3}$$

在H中只有唯一（广义）解u_*，则对E_n（按E之内积($*$，$\cdot$）直交投影H_n而得）的Галёркин近似解u_n满足

$$\begin{aligned}\|u_*-u_n\|_e(A_0)&\leqslant(1+\xi^*(n))\|u_*-H_n^*u_*\|_e(A_0)\\&=(1+\xi^*(n))\inf_{e\in E_n}\|u_*-e\|_e(A_0)\\&=(1+\xi^*(n))\|u_*-M(u_*,\ \|E_n\|_e(A_0))\|_e(A_0)\end{aligned}$$

这里H_n^*为按[$\cdot$，$\cdot$]向E_n之直交投影算子，

$$\xi^*(n)=\frac{\delta(2a_n+b_n)}{1-\delta(a_n+b_n)}\to 0,$$

$\delta = \|(I + A_0^{-1}K)^{-1}\| < \infty$, $a_n = \|A_0^{-1}K - H_n^* A_0^{-1}K\| \to 0$,
$b_n = \|A_0^{-1}KH_n^* - A_0^{-1}K\| \to 0$.

因此由A_0之正定性，可以估计 $\|u_* - u_n\| \leqslant r\|u_* - u_n\|_e(A_0)$。

□

证明．我们知道，方程式（3）的解必是方程

$$u + A_0^{-1}Ku = A_0^{-1}f \tag{4}$$

之解．一般说，反之不然．但若考虑广义解，即按$\|\cdot\|_e(A_0)$扩展封闭的集合中的解，则(3)和(4)是等价的．这时，不难看出，方程$Tu = f$对f对E_n按E之内积直交投影H_n而得的Галёркин近似解和方程(4)对E_n按H之能量内积$[\cdot, \cdot] = (A_0 \cdot, \cdot)$的直交投影$H_n^*$而得的Галёркин近似解是一致的．因已设(3)之解唯一存在，故方程（4）在E中也有唯一解u_*，因此-1不是$A_0^{-1}K$之特征值．由$A_0^{-1}K$之全连续性知$(I + A_0^{-1}K)^{-1}$存在有界（Riesz–Schauder 定理），即$\delta < \infty$。这时，在条件(G)中之$G = -A_0^{-1}K$，$c_\lambda = c_n = 0$（因为$A \equiv -A_0^{-1}K$是线性的），$d_\lambda = d_n = \|H_n^*\| \leqslant 1$。故由$G$转化引理即得本定理之证明．证毕．

这一定理实际上精密化了Михлин关于Галёркин方法收敛性的判定定理[9]，而且和最优逼近理论联系了起来，用简明的形式实现了误差的转化，[9]在同样的条件下只断言了收敛性，而没有误差估计．

G 转化引理一般说不便于直接处理无界算子的方程，而定理18在一定程度上解除了这一限制．

在定理18中关于$A_0^{-1}K$的全连续性的条件是很重要的，下面我们来具体地研究一下，在什么条件下$A_0^{-1}K$在H中为全连续．

引理1．设A_0^{-1}按E之范数$\|\cdot\|$为全连续，对$u \in H$，$\|Ku\| \leqslant c\|u\|_e(A_0)$，$c$为常数，则$A_0^{-1}K$按$H$之范数$\|\cdot\|_e(A_0)$为全连续．□

证明．设$\{u_n\}$对$\|\cdot\|_e(A_0)$为有界，因而$\|Ku_n\|$有界，故有一子序列$\{u_{n_i}\}$，使得$A_0^{-1}Ku_{n_i}$按$\|\cdot\|$收敛

$$\lim_{i, j \to \infty} \|A_0^{-1}Ku_{n_i} - A_0^{-1}Ku_{n_j}\| = 0$$

而这时

$$\|A_0^{-1}K(u_{ni}-u_{nj})\|_e(A_0)=(A_0A_0^{-1}K(u_{ni}-u_{nj}),\ A_0^{-1}K(u_{ni}-u_{nj}))$$
$$=(K(u_{ni}-u_{nj}),\ A_0^{-1}K(u_{ni}-u_{nj}))$$
$$\leqslant\|K(u_{ni}-u_{nj})\|\|A_0^{-1}K(u_{ni}-u_{nj})\|$$
$$\leqslant c\|u_{ni}-u_{nj}\|_e(A_0)\|A_0^{-1}K(u_{ni}-u_{nj})\|$$
$$\leqslant\text{常数}\cdot\|A_0^{-1}K(u_{ni}-u_{nj})\|\to 0,\ i,\ j\to\infty.$$

引理证毕。

我们知道，若A_0^{-1}对$\|\cdot\|$全连续，K对$\|\cdot\|$为有界，则$A_0^{-1}K$对$\|\cdot\|_e(A_0)$也为全连续。所以判定在什么时候A_0^{-1}对$\|\cdot\|$为全连续是很重要的。

由[9]中的结果知道，若A_0之谱是离散的，并且A_0之所有特征向量对$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_{e(A_0)}$都是完全的（即它们的线性组合按$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_{e(A_0)}$在$D(A_0)$中稠密），则A_0^{-1}对$\|\cdot\|$为全连续([9],386页)。

因此，判定在什么时候A_0的谱是离散的就很重要。下面我们来考虑一种对微分方程很重要的情况。

设D是R^m中之区域，泛函空间$W_p^{(l)}$（或写成$W_p^{(l)}(D)$)是采用范数

$$\|f\|_{W_p^{(l)}}=\{\|f\|_{\angle^p(D)}^p+\sum\|f^{(l)}\|_{\angle^p(D)}^p\}^{1/p}$$

封闭而形成的Banach空间，这里$f\in\angle^p(D)$，$f^{(l)}$为f的l阶广义偏导数，和号Σ是对所有l阶偏导数来取的(参看[10])。

引理2. 设 $D(A_0)\subset H\subset E\subset W_2^{(l)}(D)$，$E$ 之内积定义为$(\cdot,\ \cdot)_{W_2^{(l)}(D)}=(\cdot,\ \cdot)_{L^2(D)}+\sum(D^{(l)}\cdot,\ D^{(l)}\cdot)$，$D^{(l)}$为 l 阶广义偏导数，并且$D(A_0)\subset W_2^{(l+1)}(D)$，而且对$u\in D(A_0)$有

$$(A_0u,\ u)_{W_2^{(l)}(D)}\geqslant c\|u\|_{W_2^{(l+1)}(D)}^2. \tag{5}$$

c为不依赖于u的正常数，则(不仅$A_0u=f$在H中对$\|\cdot\|_{e(A_0)}$有解，即A_0^{-1}存在，而且)A_0之谱是离散的，因而A_0^{-1}对$\|\cdot\|_{W_2^{(l)}(D)}$和$\|\cdot\|_{e(A_0)}$都是全连续的。故当K为有界时，则$A_0^{-1}K$是全连续的，因而可以用于定理18。 □

证明. 实际上，这时A_0在$D(A_0)$上对$W_2^{(l)}(D)$之内积是正定的。另一方面，若对集合$\{u\}\subset H$，$(A_0u,\ u)_{W_2^{(l)}(D)}=\|u\|_{e(A_0)}^2$

有界，则 $\|u\|_{W_2^{(l+1)}(D)}$ 也就有界，再由 $W_2^{(l+1)}(D)$ 嵌入 $W_2^{(l)}(D)$ 之Кондрашов型定理(参看[10])，知道这时 $\{u\}$ 在 $W_2^{(l)}(D)$ 中强列紧。由 $\{u\}$ 之强列紧就可得到 A_0 之谱的离散性（参看[9]195页之命题）。证毕。

注：对于一般椭圆型微分方程，已经有了较好的先验估计的结果[11]。由右端、系数、边界条件的连续性以及边界的光滑性可以估计解的可微性及导数的连续性，因而即使没有求出解，也可以估计高维多项式对解的逼近度。有关的直接定理是已经有了的[20]，因而对这类方程就可以直接估计多项式类中的 Галёркин 近似解的误差。G 转化引理和定理 18 指出，在一定条件下，Галёркин近似解的误差与最优逼近的误差是同级的。利用下面的 P转化引理和M转化引理或者直接由某些嵌入不等式，还可以估计在其他意义下的误差。

4.6. 若算子T 在 $D(T)$ 上为线性正定，利用 Ritz 方法和 Галёркин方法求$Tu=f$ 的近似解是一致的，因而这时前面的讨论皆可用于这种情况下的Ritz方法。

若$E_\lambda\subset D(T)$为闭，则对于E_λ的Ritz（或者Галёркин）近似解u_λ就正好是

$$u_\lambda=M(u_*,\|E_\lambda\|_{e(T)}),$$

n_*为在用$\|\cdot\|_{e(T)}$ 封闭了的空间 $D_{e(T)}$ 中的真解。因而可直接用最优逼近理论来讨论这类问题。

设$\|\cdot\|$为某一G^+范数，对 $u\in D(T)$，记 $\|u\|_{(T)}=\|Tu\|$，则 $\|\cdot\|_{(T)}$ 也是一种G^+范数。若$E_\lambda\subset D(T)$对$\|\cdot\|_{(T)}$为闭，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\|u^n-u\|_{(T)}=\theta_F$，$u_n\in E_\lambda$，则$u\in E_\lambda$，$F$ 为有关的用以赋范的半序空间，极限是有关的极限。这时，E_λ方程$Tu=f$ 的最小二乘方法近似解u_λ定义为$u_\lambda=M(u_*,\|E_\lambda\|_{(T)})$，$u_*\in D(T)$为真解。

因此数学物理中的最小二乘方法从广义上来讲与最优逼近的概念本质上是一致的。对于正定算子（这时自然是指定义域属于某Hilbert空间），Галёркин方法、Ritz方法、最小二乘方法、最优

逼近方法等，从某种意义上讲，它们基本上是一致的。例如这时Ritz 方法可理解为一种特殊意义下的最小二乘方法：范数为$\|\cdot\|_{e(T)}$，算子为么算子。

最小二乘方法自然可用一般的G^+度量来描述，例如E_λ中对u_*在度量ρ的意义下之最优逼近元（若存在的话），可记为$M(u_*, \rho, E_\lambda)$，引入一新的G^+度量$\rho_T(x,y)=\rho(Tx, Ty)$，则最小二乘方法中的逼近元是$M(u_*, \rho_T, E_\lambda)$。

4.7. 现在来讨论用Ritz方法来算特征值近似的误差转化的一种情况。

设T在Hilbert空间E中为正定，T之定义域$D(T)$在H中稠密。设$\eta^{(1)}$为T之第一特征值：

$$Tu^{(1)}=\eta^{(1)}u^{(1)}, \quad \|u^{(1)}\|=1,$$

$\eta^{(1)}$为$\|u\|_{e(T)}=(Tu, u)^{\frac{1}{2}}$，$\|u\|=1$之极小值。

设$\|\cdot\|\leqslant a\|\cdot\|_{e(T)}$，$a>0$（因$T$为正定），$\eta_n^{(1)}$为$(Tu, u)$之极小，但$u\in E_n\subset D(T)$，$\|u\|=1$，$E_n$为线性空间。

定理19. 设e_n为E_n之任何给定的元素，$\|e_n\|>0$，则有

$$0\leqslant\eta_n^{(1)}-\eta^{(1)}\leqslant\frac{1+a\|u^{(1)}\|e(T)}{\|e_n\|}\|u^{(1)}-e_n\|_{e(T)}. \quad \square$$

证明. 设$\dot{\eta}_n^{(1)}=(Tu_n, u_n)$，$\|u_n\|=\|u^{(1)}\|=1$，$u_n\in E_n$，$u_n=e_n/\|e_n\|$，则显然$\eta_n^{(1)}\leqslant\dot{\eta}_n^{(1)}$，所以

$$0\leqslant\eta_n^{(1)}-\eta^{(1)}\leqslant\dot{\eta}_n^{(1)}-(Tu^{(1)}, u^{(1)});$$

另一方面

$$\begin{aligned}(T(u_n-u^{(1)}), (u_n-u^{(1)}))&=(Tu_n, u_n)\\&+(Tu^{(1)}, u^{(1)}-u_n)+(T(u^{(1)}-u_n), u^{(1)})\\&-(Tu^{(1)}, u^{(1)})=(Tu_n, u_n)-(Tu^{(1)}, u^{(1)})\\&-\eta^{(1)}(u_n-u^{(1)}, u_n-u^{(1)}),\end{aligned}$$

因为$\eta^{(1)}\geqslant 0$，故有

$$0\leqslant\eta_n^{(1)}-\eta^{(1)}\leqslant(Tu_n, u_n)-(Tu^{(1)}, u^{(1)})$$

$$= (T(u_n - u^{(1)}),\ u_n - u) - \eta^{(1)}(u_n - u^{(1)},\ u_n - u^{(1)})$$
$$\leqslant \|u_n - u^{(1)}\|_{e(T)} = \|\|e_n\|^{-1}[(e_n - u^{(1)}) + u^{(1)}(\|u^{(1)}\| - \|e_n\|)]\|_{e(T)}$$
$$\leqslant \|e_n\|^{-1}\{\|e_n - u^{(1)}\|_{e(T)} + \|u^{(1)}\|_{e(T)}\|e_n - u^{(1)}\|\}$$
$$\leqslant (1 + a\|u^{(1)}\|_{e(T)})\|e_n\|^{-1}\|u^{(1)} - e_n\|_{e(T)}$$

定理证毕.

§5. P转化引理

在这一节中我们介绍P 转化引理，也叫第一转化引理，它是许多转化定理、反定理和许多嵌入定理的一种统一的抽象形式。

标号集(或参数集) I被我们选为实数区间。对离散的情况，讨论亦是类似的，而且大都可以对有关函数补充以适当的值而化成连续参数的形式。一些估计式用积分形式来描述，自然在离散的情况可用有限和的形式来表示。

我们引入条件(P_1)的定义于下：

1) 设(E,F,ρ)为G^+空间，$\rho\in P(h)$，F为备；

2) (P_λ)为E中序列，I为$[c,\ d)$；

3) 对$c\leqslant\sigma_2\leqslant\sigma_1<d$，有$\rho(P_{\sigma_2},\ P_{\sigma_1})\leqslant H(\sigma_1,\ \sigma_2)$，

这里$H(\eta,\ \xi)\in(I^2\to F)\cap(\uparrow_\eta\downarrow_\xi)$。

引理 P$_1$. 若条件(P_1)成立，$u>1$，$c\leqslant\lambda<\eta$，$u\eta<d$，则有

$$\rho(P_\lambda,\ P_\eta)\leqslant C_h(\lambda)\int_\lambda^{u\eta}h^{g(t)}\,H\left(t,\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t},$$

$$g(t)=\frac{2\lg t}{\lg u};$$

这里当$\eta\geqslant u^{\frac{1}{2}}\lambda$时

$$C_h(\lambda)=2h^3(h^{g(\lambda)}\lg u)^{-1},$$

对一般的$\eta\geqslant\lambda$（特别象 $\lambda\leqslant\eta<u^{\frac{1}{2}}\lambda$时）

$$C_h(\lambda)=4h^3(h^{g(\lambda)}\lg u)^{-1}. \qquad \square$$

证明. 令$u=a^2$，若$\eta\geqslant\lambda$，则选取整数$m_1\leqslant m_2$，使得

$$a^{m_1-1}\leqslant\lambda<a^{m_1},\quad a^{m_2-1}\leqslant\eta<a^{m_2}<a^{-2}d,$$

故有

$$
\begin{aligned}
\rho(P_{a^{m_1}},\ P_{a^{m_2}}) &\leqslant h\rho(P_{a^{m_1}},\ P_{a^{m_1+1}}) \\
&\quad + h^2\rho(P_{a^{m_1+1}},\ P_{a^{m_1+2}}) + \cdots + \\
&\quad + h^{m_2-m_1}\rho(P_{a^{m_2-1}},\ P_{a^{m_2}}) \\
&\leqslant hH(a^{m_1+1},\ a^{m_1}) + h^2H(a^{m_1+2},\ a^{m_1+1}) + \cdots \\
&\quad + h^{m_2-m_1}H(a^{m_2},\ a^{m_2-1}) \\
&\leqslant h^{-m_1}\left\{\int_{m_1+1}^{m_1+2} h^y H(a^y, a^{y-2})dy\right. \\
&\quad + \int_{m_1+2}^{m_1+3} h^y H(a^y,\ a^{y-2})dy + \cdots + \\
&\quad \left. + \int_{m_2}^{m_2+1} h^y H(a^y,\ a^{y-2})dy \right\} \\
&= h^{-m_1}\int_{m_1+1}^{m_2+1} h^y H(a^y,\ a^{y-2})dy,
\end{aligned}
$$

这里是对抽象函数($R\to F$)的积分，由于F为备，及$H(\eta,\ \xi)$的单调性，可像实函数一样证明其存在，并可像实函数积分的估计一样进行如上的不等式估计。

另一方面，

$$
\begin{aligned}
\rho(P_{a^{m_1}},\ P_\lambda) &\leqslant H(a^{m_1},\ \lambda) \leqslant H(a^{m_1},\ a^{m_1-1}) \\
&\leqslant h^{-m_1}\int_{m_1}^{m_1+1} h^y H(a^y,\ a^{y-2})dy, \\
\rho(P_{a^{m_2}},\ P_\eta) &\leqslant H(a^{m_2},\ \eta) \leqslant H(a^{m_2},\ a^{m_2-1}) \\
&\leqslant h^{-m_2}\int_{m_2}^{m_2+1} h^y H(a^y,\ a^{y-2})dy.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\rho(P_\lambda,\ P_\eta) &\leqslant h\rho(P_\lambda,\ P_{a^{m_1}}) + h^2\rho(P_{a^{m_1}},\ P_{a^{m_2}}) \\
&\quad + h^3\rho(P_{a^{m_2}},\ P_\eta) \leqslant 2h^{3-m_1}\int_{m_1}^{m_2+1} h^y H(a^y,\ a^{y-2})dy \\
&\leqslant \frac{2h^{3-m_1}}{\log a}\int_{a^{m_1}}^{a^{m_2+1}} h^{g(t)}\ H\left(t, \frac{t}{a^2}\right)\frac{dt}{t} \\
&\leqslant C_h(\lambda)\int_\lambda^{u_\eta} h^{g(t)}\ H\left(t, \frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}.
\end{aligned}
$$

若$\eta\geqslant a\lambda$，我们就选择$m_1\leqslant m_2$，使得

$$a^{m_1-1}\leqslant\lambda<a^{m_1},\quad a^{m_1}\leqslant\eta<a^{m_1+1},$$

用相似的证法可证引理中对$\eta\geqslant a\lambda$时的不等式。

证毕。

我们定义条件(P)于下：

1）设$(E_\pm,\ F_\pm,\ \rho_\pm)$为二$G^+$空间，$\rho_-\in[Q]$，$\rho_+\in P(h)$，点序列$(P_\lambda)\subset E_-$，$F_+$为备；

2）$A_\lambda\in(E_-\to E_+)$，并对$\lambda_1\leqslant\lambda_2$有

$$\rho_+(A_{\lambda_2}P_{\lambda_2},\ A_{\lambda_1}P_{\lambda_1})\leqslant\Psi(\lambda_2,\ \lambda_1,\ \rho_-(P_{\lambda_2},\ P_{\lambda_1})),$$

这里$\Psi(x,\ y,\ z)\in(I^2\times F_-\to F_+)\cap(\uparrow_2)$；

3）对某给定的$f^-\in E_-$有$\varepsilon(\lambda)\in(I\to F_-)$，

$$\rho_-(f^-,\ P_\lambda)\leqslant\varepsilon(\lambda);$$

4）$\dot{\Psi}(x,\ y)=\Psi(x,\ y,\ Q(\varepsilon(x),\ \varepsilon(y)))\in(\uparrow_x\downarrow_y)$。

P转化引理．若条件(P)成立，则

$$\rho_+(A_\lambda P_\lambda,\ A_\eta P_\eta)\leqslant C_h(\lambda)\int_\lambda^{u\eta}h^{g(t)}\dot{\Psi}\left(t,\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t},\qquad (1)$$

这里$c\leqslant\lambda\leqslant\eta<u\eta<d$。□

证明．因为$\rho_-(f^-,\ P_\sigma)\leqslant\varepsilon(\sigma)$，故可得到

$$\rho_-(P_{\sigma_1},\ P_{\sigma_2})\leqslant Q^-(\varepsilon(\sigma_1),\ \varepsilon(\sigma_2)),\quad \sigma_2\leqslant\sigma_1,$$

因此有

$$\rho_+(A_{\sigma_1}P_{\sigma_1},\ A_{\sigma_2}P_{\sigma_2})\leqslant\dot{\Psi}(\sigma_1,\ \sigma_2)$$

由引理P_1即得本引理的证明。

下面考虑线性空间的情况。设E为线性空间，$\{E_\lambda\}_{\lambda\in J}$($J$为任何标号集)，为$E$之一子集族，给定$\sigma(\lambda)\in(J\to J)$，如果$e_1,\ e_2\in E_\lambda\Longrightarrow\pm(e_1-e_2)\in E_{\sigma(\lambda)}$，则记$\{E_\lambda\}\in A[\sigma]$。

我们定义条件$(\dot{P})$或$(\dot{P})(\varphi,\ \|\cdot\|_+,[c,\ d))$如下：

1）设$(E_\pm,\ F_\pm,\ \|\cdot\|_\pm)$为二$G^+$范空间，$\|\cdot\|_-\in[Q]$，$\|\cdot\|_+\in P(h)$，$F_+$为备；

2）$E_{\sigma_1}\subset E_{\sigma_2}\subset E_-$，$\sigma_1\leqslant\sigma_2$，$\{E_\lambda\}\in A[\sigma]$；

3）$A\in(\bigcup_\lambda E_\lambda\to E_+)^*$，对$e\in E_\lambda$，有

$$\|Ae\|_+\leqslant\varphi(\lambda,\ \|e\|_-),$$

$\varphi(x, y) \in (I \times F_{-} \to F_{+}) \cap (\uparrow x, y)$;

4) 对某给定的$f^{-} \in E_{-}$，有$P_{\lambda} \in E_{\lambda}$，使得

$$\|f^{-} - P_{\lambda}\|_{-} \leqslant \varepsilon(\lambda),$$

$\varepsilon(t) \in (I \to F_{-}) \cap (\downarrow_{t})$。

P转化引理. 在条件$(\dot{P})$下，则对于$c \leqslant \lambda \leqslant \eta < u\eta < d$，有

$$\|AP_{\lambda} - AP_{\eta}\|_{+} \leqslant C_{h}(\lambda) \int_{\lambda}^{u\eta} h^{g(t)} \varphi\Big[\sigma(t),$$

$$^{*}Q\Big(\varepsilon\Big(\frac{t}{u}\Big)\Big)\Big]\frac{dt}{t}, \tag{2}$$

$^{*}Q(t) = Q(t, t)$。□

证明. 因为对于 $c \leqslant \sigma_2 \leqslant \sigma_1 < d$ 有

$$\|P_{\sigma_1} - P_{\sigma_2}\|_{-} \leqslant Q(\|f^{-} - P_{\sigma_1}\|_{-}, \|f^{-} - P_{\sigma_2}\|_{-})$$

$$\leqslant Q(\varepsilon(\sigma_1), \varepsilon(\sigma_2)) \leqslant {}^{*}Q(\varepsilon(\sigma_2)),$$

另一方面，因P_{σ_1}，$P_{\sigma_2} \in E_{\sigma_1}$，故$P_{\sigma_1} - P_{\sigma_2} \in E_{\sigma(\sigma_1)}$，因此有

$$\|AP_{\sigma_1} - AP_{\sigma_2}\|_{+} \leqslant \varphi(\sigma(\sigma_1), \|P_{\sigma_1} - P_{\sigma_2}\|_{-})$$

$$\leqslant \varphi(\sigma(\sigma_1), {}^{*}Q(\varepsilon(\sigma_2))),$$

令$\varphi(\sigma(x), {}^{*}Q(\varepsilon(y)))$为引理$P_1$中的$H(x, y)$，或$P$转化引理中的$\dot{\Psi}(x, y)$，即得本引理的证明。证毕。

E_{+}对$\|\cdot\|_{+}$为完备，是指$\{e_n\} \subset E_{+}$，

$$\lim_{n, m \to \infty} \|e_n - e_m\|_{+} = \theta_{F+},$$

导致$\exists e \in E_{+}$，$\lim\limits_{n \to \infty} \|e - e_n\|_{+} = \theta_{F+}$。

系1. 若条件$(\dot{P})(\varphi, \|\cdot\|_{+}, [c, \infty))$成立，$E_{+}$对$\|\cdot\|_{+}$为完备，并且对于某$\lambda_0 \in [c, \infty)$，

$$D(\lambda_0) = \int_{\lambda_0}^{\infty} h^{g(t)} \varphi\Big[\sigma(t), {}^{*}Q\Big(\varepsilon\Big(\frac{t}{u}\Big)\Big)\Big]\frac{dt}{t}$$

在F_{+}中有界（即有限），则存在$f^{+} \in E_{+}$，使得

$$\|f^{+} - AP_{\lambda}\|_{+} \leqslant hC_{h}(\lambda)D(\lambda), \tag{3}$$

特别当$h = 1$时有

$$\|f^{+} - AP_{\lambda}\|_{+} \leqslant \frac{2}{\lg u} \int_{\lambda}^{\infty} \varphi\Big[\sigma(t),$$

$$\cdot Q\left(\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\right)\Big]\frac{dt}{t}. \qquad (4) \ \square$$

证明. 由$\dot{P}$转化引理，我们有

$$\|AP_\lambda - AP_\eta\|_+ \leqslant C_h(\lambda)D(\lambda),$$

因此有

$$(0) - \lim_{\lambda_1,\lambda_2\to\infty} \|AP_{\lambda_1} - AP_{\lambda_2}\|_+ = \theta_{F+}$$

因为E_+是完备的，故知存在$f^+ \in E_+$，使得

$$(0) - \lim_{\eta\to\infty} \|f^+ - AP_\lambda\|_+ = \theta_{F+}.$$

另一方面

$$\|f^+ - AP_\lambda\|_+ \leqslant h\{\|f^+ - AP_\eta\|_+ + \|AP_\eta - AP_\lambda\|_+\},$$

令$\eta\to\infty$，即得引理的不等式.

注：1) 关系式(3)就是逼近论中关于误差估计的转化定理的一般形式. 概括地说，在一定条件下，由 $\|f^- - P_\lambda\|_- \leqslant \varepsilon(\lambda)$，可导致估计$\|f^+ - AP_\lambda\|_+ \leqslant hC_h(\lambda)D(\lambda)$. 当$E_+$对$\|\cdot\|_+$ 不封闭时，我们可用泛函分析的一般方法加入理想元素使之封闭，这时A 的概念也推广了. 有关的f^-也成了A 之定义域中的元素，而且往往可认为$Af^- = f^+$，即A之定义域可能扩展了，而A成了广义算子. 一般说来，即使A为么算子，f^+也不见得在原来意义下等于f^-，而可能是f^-的某种延拓和修订. 近代文献中的大部分有关逼近转化的定理都可概括在(3)的形式中，$\{E_\lambda\}$ 可以是多项式族，整函数族，特征函数族张成的线性空间，以及各种各样泛函空间中的函数族. 特别可以选为族$\{M(\|\cdot\|^* \leqslant \lambda)\}$，$\|\cdot\|^* \in (E_\Delta \to [0, \infty))$为某$G^+$范数. 例如多项式的次数，整函数的级和型，概周期函数的指数的上确界，等等. E_Δ为E中某一子集，而 $M(\|\cdot\|^* \leqslant \lambda)$ 是E_Δ中满足$\|x\|^* \leqslant \lambda$的集. 只要找到一个形如$\|Ae\|_+ \leqslant \varphi(\|e\|^*, \|e\|_-)$的嵌入不等式就可以（至少形式地）写出一个逼近误差转化的定理，以及后面的反定理和下节的M转化引理关于最优逼近的结果. 这样的不等式式是很多的[20].

2) 条件$A[\sigma]$是不难判别的，若$\|\cdot\|^* \in [Q^*]$，则$\{M(\|\cdot\|^* \leqslant$

$\lambda)\}\in A[\sigma]$，$\sigma(\lambda)=Q^{\bullet}(\lambda,\ \lambda)$，当 $\|\cdot\|^{\bullet}$ 是集合的维数时，则 $Q^{\bullet}(\eta,\ \xi)=\max(\eta,\ \xi)$，$\sigma(\lambda)=\lambda$。

系2 在系1的条件下或者存在 $f^{+}\in E_{+}$ 使得

$$(0)-\lim_{\lambda\to\infty}\|f^{+}-AP_{\lambda}\|_{+}=\theta_{F+},$$

设 $(E_{+},\ F_{\xi},\ \|\cdot\|_{\xi})$ 为 G^{+} 范空间，$\|\cdot\|_{\xi}\in P\in(h_{\xi})$，条件

$$(\dot{P})(\varphi_{\xi},\ \|\cdot\|_{\xi},\ [c,\ \infty))$$

成立，并且对 $e\in E_{+}$ 有 $\|e\|_{\xi}\leqslant G_{\xi}(\|e\|_{+})$，$G_{\xi}(t)\in(F_{+}\to F_{\xi})\cap(\uparrow_{t})$，则

$$\|f^{+}-AP_{\lambda_{0}}\|_{\xi}\leqslant h_{\xi}G_{\xi}(\|f^{+}-P_{\lambda(\xi)}\|_{+})$$

$$+h_{\xi}C_{h}(\lambda_{0})\int_{\lambda_{0}}^{u\lambda(\xi)}h^{\sigma(t)}\varphi[\sigma(t),$$

$$\cdot Q\left(\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\right)\frac{dt}{t}, \tag{5}$$

这里 $\xi\in J$，J 为任何标号集，$\lambda(\xi)\in(J\to[\lambda_{0},\ \infty))$ 是任给的。□

证明．实际上，对不等式

$$\|f^{+}-AP_{\rho_{0}}\|_{\xi}\leqslant h_{\xi}\|f^{+}-AP_{\lambda(\xi)}\|_{\xi}+h_{\xi}\|AP_{\lambda(\xi)}-AP_{\lambda_{0}}\|_{\xi}$$

中的末项，根据条件 $(\dot{P})(\varphi_{\xi},\ \|\cdot\|_{\xi},\ [c,\ \infty))$ 直接引用 $\dot{P}$ 转化引理，并注意到不等式

$$\|f^{+}-AP_{\lambda(\xi)}\|_{\xi}\leqslant G_{\xi}(\|f^{+}-AP_{\lambda(\xi)}\|_{+})$$

就得到本定理的证明．证毕。

注：1）特别是在系1的条件下，当 $h=h_{\xi}=1$ 时，对 $\lambda(\xi)\in[\lambda_{0}u^{\frac{1}{2}},\ \infty)$，有

$$\|f^{+}-AP_{\lambda_{0}}\|_{\xi}\leqslant G_{\xi}\left(\frac{2}{\lg u}\int_{\lambda(\xi)}^{\infty}\varphi\left[\sigma(t),\ \cdot Q\left(\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\right)\right]\frac{dt}{t}\right)$$

$$+\frac{2}{\lg u}\int_{\lambda_{0}}^{u\lambda(\xi)}\varphi_{\xi}\left[\sigma(t),\ \cdot Q\left(\varepsilon\frac{t}{u}\right)\right]\frac{dt}{t}, \tag{6}$$

而当 $\|\cdot\|_{\pm}=\|\cdot\|$，$E_{\pm}=E$，$f^{\pm}=f$ 时，若 $h_{\xi}=h=1$，A 为么算子，则有

$$\|f-P_{\lambda_{0}}\|_{\xi}\leqslant G_{\xi}(\varepsilon(\lambda(\xi)))$$

$$+\frac{2}{\lg u}\int_{\lambda_*}^{u\lambda(\xi)}\varphi_\xi\left[\sigma(t),\ 2\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\right]\frac{dt}{t}. \qquad (7)$$

2）我们知道了$\|f^+-AP_{\lambda_*}\|_\xi$的估计，一般就可以估计$\|f^+\|_\xi\leqslant h_\xi\|f^+-AP_{\lambda_*}\|_\xi+h_\xi\|AP_{\lambda_*}\|_\xi$. 而反定理的古典形式正是由$\|f^--P_\lambda\|_-\leqslant\varepsilon(\lambda)$求$\|f^+\|_\xi$的估计。所谓各种意义下的连续模可以用$\|\cdot\|_\xi$来刻划（也可以用$\|x-y\|$的形式来刻划，像么关系的解释中所说的那样）。近代文献中的反定理大多数都具有（6），（7）的形式。

$\dot{P}$转化引理的关键在于估计函数φ的找寻，有时对有关的E_λ，φ是无法直接找到这种估计函数的。但是，在一定条件下，可以转化到另外的族$\{E_\lambda^\triangle\}$，使相应的φ可以找到，那时作一些难度不大的处理，就可以继续应用$\dot{P}$转化引理。下面举一例子。

我们定义条件$(\overset{\triangle}{P})$于下：

1）条件$(\dot{P})$中1）—3）成立；

2）$f^-\in E_-$，$f_\lambda\in E_-$，$\|f^--f_\lambda\|_-\leqslant\varepsilon(\lambda)$，$\varepsilon(\lambda)\in(I\to F_-)$；

3）有$P_\xi(\lambda)\in E_{\xi(\lambda)}$，$\|f_\lambda-P_{\xi(\lambda)}\|_-\leqslant\eta(\lambda)$，$\eta(\lambda)\in(I\to F_-)$，$\xi(\lambda)\in(I\to I)\cap(\uparrow_\lambda)$；

4）$G(\lambda)=Q(\varepsilon(\lambda),\eta(\lambda))\in(I\to F_-)\cap(\uparrow_\lambda)$.

这时我们有

$\overset{\triangle}{P}$转化引理．若条件$(\overset{\triangle}{P})$成立，则对于$c\leqslant\lambda\leqslant\eta<u\eta<d$有

$$\|AP_{\xi(\eta)}-AP_{\xi(\lambda)}\|_+\leqslant C_h(\lambda)\int_\lambda^{u\eta}h^{g(t)}\varphi\left\{\sigma[\xi(t)],\ {}^*Q\left[G\left(\frac{t}{u}\right)\right]\right\}\frac{dt}{t}. \qquad (18)\ \square$$

证明．　实际上这时有

$$\|f^--P_{\xi(\lambda)}\|_-\leqslant Q\{\|f^--f_\lambda\|_-,\|f_\lambda-P_{\xi(\lambda)}\|_-\}$$
$$\leqslant Q(\varepsilon(\lambda),\eta(\lambda)).$$

由$\dot{P}$转化引理（这里的$P_{\xi(\lambda)}$相当于那里的P_λ，$G_{(\lambda)}$相当于那里的$\varepsilon_{(\lambda)}$），即得本引理．证毕．

注：$\overset{\triangle}{P}$转化引理也有相似于$\dot{P}$转化引理的系1，系2的形式．把

这应用于以有界解析函数来逼近的问题，可以得到 Walsh 和 Russell[21;22]的结果，有的更一般、更精确。

§6. M转化引理和S转化引理

6.1. 从前节的讨论可看出，一切误差估计都与最优逼近元的误差估计有关。下面我们来讨论最优逼近元的误差的转化问题。

我们定义条件(M)于下：

1) 给定了G^{+}范空间族 $(E^{\pm}_{\lambda},F,\|\cdot\|^{\pm}_{\lambda})$，$(E^{\pm}_{\sigma(\lambda)},F,\|\cdot\|^{\pm}_{\lambda})$，$F$为备，$E^{\pm}_{\lambda}\subset E$，$E^{\bullet}_{\lambda}\subset E^{+}_{\lambda}\cap E^{-}_{\lambda}$，$\{E^{\bullet}_{\lambda}\}$，$\{E^{\pm}_{\lambda}\}\in A[\sigma]$，$\|\cdot\|^{\pm}_{\lambda}\in[Q^{\pm}_{\lambda}]$；$\lambda\in I$，$I$为任何标号集；

2)对$e\in E^{\bullet}_{\sigma(\lambda)}$有

$$\|e\|^{+}_{\lambda}\leqslant J_{\lambda}(\|e\|^{-}_{\lambda}),$$

$J_{\lambda}(t)\in(F\to F)\cap(\uparrow t)$；

3) 对于某给定的$f^{\pm}_{\lambda}\in E^{\pm}_{\lambda}$，有共同的$P_{\lambda}\in E^{\bullet}_{\lambda}$，使得$\|f^{\pm}_{\lambda}-P_{\lambda}\|\leqslant\varepsilon^{\pm}(\lambda)$，$\varepsilon^{\pm}(\lambda)\in(I\to F)$。

这时我们有

M转化引理。若条件(M)成立，则有

$$\|f^{+}_{\lambda}-M_{\lambda}(f^{-}_{\lambda})\|^{+}_{\lambda}\leqslant Q^{+}_{\lambda}\{\varepsilon^{+}(\lambda),J_{\lambda}({}^{*}Q^{-}_{\lambda}[\varepsilon^{-}(\lambda)])\},\qquad(1)$$

其中$M_{\lambda}(f^{-}_{\lambda})=M(f^{-}_{\lambda},\|E^{\bullet}_{\lambda}\|^{-}_{\lambda})$，${}^{*}Q^{-}_{\lambda}(t)=Q^{-}_{\lambda}(t,t)$。□

证明。事实上

$$\begin{aligned}\|f^{+}_{\lambda}-M_{\lambda}(f^{-}_{\lambda})\|^{+}_{\lambda}&\leqslant Q^{+}_{\lambda}\{\|f^{+}_{\lambda}-P_{\lambda}\|^{+}_{\lambda},\|M_{\lambda}(f^{-}_{\lambda})-P_{\lambda}\|^{+}_{\lambda}\}\\&\leqslant Q^{+}_{\lambda}\{\varepsilon^{+}(\lambda),J(\|M_{\lambda}(f^{-}_{\lambda})-P_{\lambda}\|^{-}_{\lambda})\}\\&\leqslant Q^{+}_{\lambda}\{\varepsilon^{+}(\lambda),J_{\lambda}[Q^{-}_{\lambda}(\|M_{\lambda}(f^{-}_{\lambda})-f^{-}_{\lambda}\|^{-}_{\lambda},\\&\quad\|f^{-}_{\lambda}-P_{\lambda}\|^{-}_{\lambda})]\}\\&\leqslant Q^{+}_{\lambda}[\varepsilon^{+}(\lambda),J_{\lambda}({}^{*}Q^{-}_{\lambda}[\varepsilon^{-}(\lambda)])].\end{aligned}$$

证毕。

注： 1) M转化引理也叫第二转化引理，而且不难推广到一般G^{+}空间中去；

2) 当$\|\cdot\|^{\pm}_{\lambda}\in P(h^{\pm}_{\lambda})$时，(1)式变成

$$\|f_\lambda^+ - M_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^+ \leqslant h_\lambda^-\{\varepsilon^+(\lambda) + J_\lambda[2h_\lambda^-\varepsilon^-(\lambda)]\}; \qquad (2)$$

3) 若$E_\lambda^\pm \equiv E^\pm$，$\|\cdot\|_\lambda^\pm \equiv \|\cdot\|^\pm$，$f_\lambda^\pm \equiv f^\pm$，$h_\lambda^\pm \equiv h^\pm$，则(2)式变成

$$\|f^+ - M_\lambda(f^-)\|^+ \leqslant h^+\{\varepsilon^+(\lambda) + J_\lambda[2h^-\varepsilon^-(\lambda)]\}. \qquad (3)$$

特别当$f^\pm = f$时有

$$\|f - M_\lambda(f)\|^+ \leqslant h^+\{\varepsilon^+(\lambda) + J_\lambda[2h^-\varepsilon^-(\lambda)]\}; \qquad (4)$$

而当$\|\cdot\|^\pm$均满足三角不等式时，$h^\pm = 1$，则有

$$\|f - M_\lambda(f)\|^+ \leqslant \varepsilon^+(\lambda) + J_\lambda[2\varepsilon(\lambda)];$$

4) 把这些结果与Галёркин方法、Ritz方法、以及最小二乘方法结合，可以得出许多关于变分方法的误差估计的转换。已经验算过，用M转化引理来处理二阶椭圆型方程的一些边值问题 Ritz 近似解，得的结果要比[15]中得的精确一些；

5) 在应用M转化引理时，关键在于找出条件(M)中的$J_\lambda(x)$，$\varepsilon^\pm(\lambda)$。$J_\lambda(x)$反映的是一类嵌入不等式，但它不是要求对全空间来建立的，而是对某一特殊类$E_\lambda^\pm$来建立的，对各种泛函空间已经有大量的工作可资参考。至于$\varepsilon^\pm(\lambda)$的找寻，一种方法是有赖于各种类型的直接定理，另一种方法就是在已知$\varepsilon^\pm(\lambda)$之一时利用P转化引理求取另一的估计，或者直接应用某些嵌入不等式。

6.2. 前面我们所讨论的各种逼近方法都可以视为元素经过某种（依赖于某些参数的）运算后形成的偏离。我们现在来讨论另外一类型的转化关系。

我们定义条件(S)于下：

1) 给定G^+范空间族$(E, F_\lambda^\pm, \|\cdot\|_\lambda^\pm)$，$\|\cdot\|_\lambda^\pm \in [Q_\lambda]$，$E_\lambda^\pm \subset E$，$S_\lambda \in (E \to E)$；$\lambda \in I$，$I$为任何标号集；

2) 对任何e_1，$e_2 \in E$，有

$$\|S_\lambda(e_1) - S_\lambda(e_2)\|_\lambda^+ \leqslant \Psi_\lambda(\|e_1 - e_2\|_\lambda^-),$$

$\Psi_\lambda(t) \in (F_\lambda^- \to F_\lambda^+) \cap (\uparrow t)$；

3) 对某给定的$f_\lambda^\pm \in E$，存在$\mathrm{P}_\lambda \in E_\lambda^\pm$，使得

$$\|f_\lambda^\pm - \mathrm{P}_\lambda\|_\lambda^\pm \leqslant \varepsilon^\pm(\lambda),\quad \|S_\lambda(\mathrm{P}_\lambda) - \mathrm{P}_\lambda\|_\lambda^+ \leqslant \eta(\lambda),$$

$\varepsilon^{\pm}(\lambda)\in(I\to F_{\lambda}^{\pm})$，$\eta(\lambda)\in(I\to F_{\lambda}^{+})$。

这时我们有

S转化引理．若条件（S）成立，则有

$$\|f_{\lambda}^{+}-S_{\lambda}(f_{\lambda}^{-})\|_{\lambda}^{+}\leqslant Q_{\lambda}\{Q_{\lambda}[\varepsilon^{+}(\lambda),\eta(\lambda)],\Psi_{\lambda}(\varepsilon^{-}(\lambda))\}. \tag{6}$$
□

证明． 实际上，我们有

$$\|f_{\lambda}^{+}-S_{\lambda}(f_{\lambda}^{-})\|_{\lambda}^{+}\leqslant Q_{\lambda}\{\|f_{\lambda}^{+}-S_{\lambda}(P_{\lambda})\|_{\lambda}^{+},\|S_{\lambda}(P_{\lambda})-S_{\lambda}(f_{\lambda}^{-})\|_{\lambda}^{+}\}$$
$$\leqslant Q_{\lambda}\{Q_{\lambda}[\|f_{\lambda}^{+}-P_{\lambda}\|_{\lambda}^{+},\ \|S_{\lambda}(P_{\lambda})-P_{\lambda}\|_{\lambda}^{+}],\ \Psi_{\lambda}(\|P_{\lambda}-f_{\lambda}^{-}\|_{\lambda}^{-})\}$$
$$\leqslant Q_{\lambda}\{Q_{\lambda}[\varepsilon^{+}(\lambda),\ \eta(\lambda)],\ \Psi_{\lambda}(\varepsilon^{-}(\lambda)\}.$$

证毕．

注： 1）S 转化引理又称第三转化引理．当 $\|\cdot\|_{\lambda}^{\pm}\equiv\|\cdot\|^{\pm}$，$\|\cdot\|^{+}\in P(h)$，$f_{\lambda}^{\pm}\equiv f^{\pm}$，$\eta(\lambda)=0$ 时，(6)式变成

$$\|f^{+}-S_{\lambda}(f^{-})\|^{+}\leqslant h^{2}[\varepsilon^{+}(\lambda)]+h\Psi_{\lambda}(\varepsilon^{-}(\lambda))； \tag{7}$$

2）当$f_{\lambda}^{\pm}=f_{\lambda}$，$\eta(\lambda)=0$，$\|\cdot\|_{\lambda}^{+}\in P(h_{\lambda})$时，(6)式变成

$$\|f_{\lambda}-S_{\lambda}(f_{\lambda})\|_{\lambda}^{+}\leqslant h_{\lambda}^{2}\varepsilon^{+}(\lambda)+h_{\lambda}\Psi_{\lambda}(\varepsilon^{-}(\lambda)). \tag{8}$$

若更有$\|\cdot\|_{\lambda}^{\pm}=\|\cdot\|_{\lambda}$，$\varepsilon^{\pm}(\lambda)=\varepsilon(\lambda)$，则(8)式变成

$$\|f_{\lambda}-S_{\lambda}(f_{\lambda})\|_{\lambda}\leqslant\varepsilon(\lambda)+\Psi_{\lambda}(\varepsilon(\lambda))； \tag{9}$$

3）同样的问题有时可用M转化引理来处理，但没有用S转化引理来处理的精度高，而S转化引理的条件2）是对整个E来估计的，所以条件要苛刻一些．

对于$(\varepsilon)G_{0}^{+}$范空间中的有界线性算子S_{λ}，S转化引理有更好用的形式．

我们定义条件$(S_{\triangle})$于下：

1）给定$(\varepsilon)G_{0}^{+}$范空间族（E，F_{λ}^{+}，$\|\cdot\|_{\lambda}^{\pm},(\varepsilon)_{\lambda}^{\pm}$），$\|\cdot\|_{\lambda}^{+}\in[Q_{\lambda}]$，$E_{\lambda}^{\pm}\subset E$，$S_{\lambda}\in(E\to E)^{*}$是$(\varepsilon)_{\lambda}^{-}(\varepsilon)_{\lambda}^{+}$连续的；

2）存在S_{λ}之不动点P_{λ}使得

$$\|f_{\lambda}^{\pm}-P_{\lambda}\|_{\lambda}^{\pm}\leqslant\xi^{\pm}(\lambda)\varepsilon_{\lambda}^{\pm},$$

$\varepsilon_{\lambda}^{\pm}\in(\varepsilon)_{\lambda}^{\pm}$，$\xi^{\pm}(\lambda)\in(I\to R)$为数值函数．

这时S转化引理具有形式：

$S_{\triangle}$转化引理．在条件（$S_{\triangle}$）下，有

$$\|f_\lambda^+ - S_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^+ \leqslant Q_\lambda(\xi^+(\lambda)\varepsilon_\lambda^+,\ \delta(\lambda)), \tag{10}$$

$$\delta(\lambda) = \|S_\lambda\|_{(\varepsilon_\lambda^-,\ \varepsilon_\lambda^+)}\xi^-(\lambda)\varepsilon_\lambda^-. \qquad \square$$

证明. 实际上，

$$\|f_\lambda^+ - S_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^+ \leqslant Q_\lambda\{\|f_\lambda^+ - S_\lambda(P_\lambda)\|_\lambda^+, \|S_\lambda(P_\lambda) - S_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^+\}$$
$$\leqslant Q_\lambda\{\|f_\lambda^+ - P_\lambda\|_\lambda^+,\ \delta(\lambda)\}.$$

证毕.

注: 1）当$\|\cdot\|_\lambda^\pm$均为范数时，$\varepsilon_\lambda^\pm$可取为1，S_λ转化引理就变成

$$\|f_\lambda^+ - S_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^+ \leqslant Q_\lambda(\xi^+(\lambda),\ \|S_\lambda\|\xi^-(\lambda)). \tag{11}$$

而当$\|\cdot\|_\lambda^+ \in P(h_\lambda)$时，则变成

$$\|f_\lambda^+ - S_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^+ \leqslant h_\lambda(\xi^+(\lambda) + \|S_\lambda\|\xi^-(\lambda)). \tag{12}$$

当$f_\lambda^\pm = f_\lambda$，$\|\cdot\|_\lambda^\pm = \|\cdot\|_\lambda \in P(1)$时，这时$\xi^\pm(\lambda) = \xi(\lambda)$，则(12)变成

$$\|f_\lambda - S_\lambda(f_\lambda)\|_\lambda \leqslant (\|S_\lambda\| + 1)\xi(\lambda); \tag{13}$$

2）对相应于S转化引理中$\eta(\lambda) \neq \theta_{F_\lambda^+}$的情况也有类似的结果.

6.3. 在S转化引理中也存在要找共同的P_λ的问题，这可同对待M转化引理一样来处理. 有时可以直接解除这一限制，下面就是一种尝试.

我们定义条件$(\dot{S})$于下:

1）设 $(E,\ F_\lambda^\pm,\ \|\cdot\|_\lambda^\pm)$为$G^+$范空间族，$\|\cdot\|_\lambda^\pm \in P(1)$，$E_\lambda^* \subset E$，$\dot{S}_\lambda$，$S_\lambda \in (E \to E)$，$\dot{S}_\lambda S_\lambda = S_\lambda$；$\lambda \in I$，$I$为任意的；

2）对任何$e_1, e_2 \in E$，有

$$\|S_\lambda(e_1) - S_\lambda(e_2)\|_\lambda^\pm \leqslant \Psi_\lambda^\pm(\|e_1 - e_2\|_\lambda^\pm),$$
$$\|\dot{S}_\lambda(e_1) - \dot{S}_\lambda(e_2)\|_\lambda^+ \leqslant \phi_\lambda(\|e_1 - e_2\|_\lambda^-),$$

$\Psi_\lambda^\pm(t) \in (F_\lambda^\pm \to F_\lambda^\pm) \cap (\uparrow t)$，$\Phi_\lambda(t) \in (F_\lambda^- \to F_\lambda^+) \cap (\uparrow t)$与$e_1$，$e_2$无关;

3）对某给定的$f_\lambda^\pm \in E$，存在$P_\lambda^\pm \in E_\lambda^*$，使得有$\varepsilon^\pm(\lambda)$，$\eta^\pm(\lambda) \in (I \to F_\lambda^\pm)$，

$$\|f_\lambda^\pm - P_\lambda^\pm\|_\lambda^\pm \leqslant \varepsilon^\pm(\lambda),\quad \|S_\lambda(P_\lambda^\pm) - P_\lambda^\pm\|_\lambda^\pm \leqslant \eta^\pm(\lambda).$$

这时有第四转化引理

$\dot{S}$转化引理. 若条件（$\dot{S}$）成立，则有

$$\|f_\lambda^\pm - \dot{S}_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^\pm \leqslant \Phi_\lambda\{\varepsilon^-(\lambda)+\eta^-(\lambda)+\Psi_\lambda^-(\varepsilon^-(\lambda))\}+\varepsilon^+(\lambda)$$
$$+\eta^+(\lambda)+\Psi_\lambda^+(\varepsilon^+(\lambda))+\|S_\lambda(f_\lambda^+)-S_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^+; \qquad (14)$$

特别当$\eta^\pm(\lambda)\equiv\theta_{F_\lambda^\pm}$，$f_\lambda^\pm\equiv f_\lambda$时，有

$$\|f_\lambda-\dot{S}_\lambda(f_\lambda)\|_\lambda^+ \leqslant \Phi_\lambda(\varepsilon^-(\lambda)+\Psi_\lambda^-(\varepsilon^-(\lambda)))+\varepsilon^+(\lambda)$$
$$+\Psi_\lambda^+(\varepsilon^+(\lambda)). \qquad (15) \quad \square$$

证明. 只证形为（15）的情况，对一般情况，证法是类似的。

这时，实际上

$$\|f_\lambda-\dot{S}_\lambda(f_\lambda)\|_\lambda^+\leqslant\|f_\lambda-S_\lambda(f_\lambda)\|_\lambda^+ +\|S_\lambda(f_\lambda)-\dot{S}_\lambda(f_\lambda)\|_\lambda^+$$
$$=\|f_\lambda-S_\lambda(f_\lambda)\|_\lambda^+ +\|\dot{S}_\lambda S_\lambda(f_\lambda)-\dot{S}_\lambda(f_\lambda)\|_\lambda^+\leqslant\|f_\lambda$$
$$-S_\lambda(f_\lambda)\|_\lambda^+ +\Phi_\lambda(\|S_\lambda(f_\lambda)-f_\lambda\|_\lambda^-)$$

对$\|f_\lambda-S_\lambda(f_\lambda)\|_\lambda^\pm$分别引用形式（9）的S转化引理即得（15）。证毕。

注： 对一般的$\|\cdot\|_\lambda^\pm\in[Q_\lambda^\pm]$也可以得到类似的结果，只不过形式过于复杂。

我们来考虑$\dot{S}$转化引理在$(\varepsilon)G_0^+$范空间中的形式。

我们定义条件($\dot{S}_\Delta$)如下

1）设$(E,\ F_\lambda^\pm,\ \|\cdot\|_\lambda^\pm,(\varepsilon)_\lambda^\pm)$为$(\varepsilon)G_{q_i}^+$范空间族，$\|\cdot\|_\lambda^\pm\in P(1)$，$E_\lambda^\pm\subset E$，$S_\lambda\in(E\to E)^*$是$(\varepsilon)_\lambda^\pm(\varepsilon)_\lambda^\pm$连续的，$\dot{S}_\lambda\in(E\to E)^*$是$(\varepsilon)_\lambda^-(\varepsilon)_\lambda^+$连续的，并且$\dot{S}_\lambda S_\lambda=S_\lambda$，$\lambda\in I$，$I$为任何标号集；

2）对某给定的$f_\lambda^\pm\in E$，相应存在S_λ之不动点$P_\lambda^\pm$使得

$$\|f_\lambda^\pm-P_\lambda^\pm\|_\lambda^\pm\leqslant\xi^\pm(\lambda)\varepsilon_\lambda^\pm,$$

$\varepsilon_\lambda^\pm\in(\varepsilon)_\lambda^\pm$，$\xi^\pm(\lambda)\in(I\to R)$，为数值函数。

这时有

$\dot{S}_\Delta$转化引理. 在条件($\dot{S}_\Delta$)约制之下有

$$\|f_\lambda^\pm-\dot{S}_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^+\leqslant(\|\dot{S}_\lambda\|_{(\varepsilon_\lambda^-,\varepsilon_\lambda^+)})\delta_-(\lambda)+\delta_+(\lambda)$$

$$+\|S_\lambda(f_\lambda^+ - f_\lambda^-)\|_\lambda^+, \tag{16}$$

$$\delta_\pm(\lambda) = \xi^\pm(\lambda)(\|S_\lambda\|_{(\varepsilon_\lambda^\pm, \varepsilon_\lambda^\pm)} + 1)\varepsilon_\lambda^\pm. \quad \square$$

证明. 把S_Δ转化引理，分别用来估计$\|f_\lambda^+ - S_\lambda(f_\lambda^+)\|_\lambda^+$，$\|f_\lambda^- - S_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^-$，则可得到

$$\|f_\lambda^\pm - S_\lambda(f_\lambda^\pm)\|_\lambda^\pm \leqslant \xi^\pm(\lambda)\ (\|S_\lambda\|_{(\varepsilon_\lambda^\pm, \varepsilon_\lambda^\pm)} + 1)\varepsilon_\lambda^\pm. \tag{17}$$

另一方面

$$\|f_\lambda^+ - \overset{*}{S}_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^+ \leqslant \|f_\lambda^+ - S_\lambda(f_\lambda^+)\|_\lambda^+ + \|S_\lambda(f_\lambda^-) - \overset{*}{S}_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^+$$
$$+ \|S_\lambda(f_\lambda^+ - f_\lambda^-)\|_\lambda^+.$$

第一项即$\delta_+(\lambda)$，第三项与(16) 中第三项相同，对第二项有

$$\|S_\lambda\ (f_\lambda^-) - \overset{*}{S}_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^+ = \|\overset{*}{S}_\lambda S_\lambda\ (f_\lambda^-) - \overset{*}{S}_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^+$$
$$= \|\overset{*}{S}_\lambda(f_\lambda^- - S_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^+.$$

利用$\overset{*}{S}_\lambda$的连续性，则由(17)之估计

$$\|f_\lambda^- - S_\lambda(f_\lambda^-)\|_\lambda^- \leqslant \xi^-(\lambda)\ (\|S_\lambda\|_{(\varepsilon_\lambda^-,\ \varepsilon_\lambda^-)} + 1)\varepsilon_\lambda^-,$$

即得

$$\|\overset{*}{S}_\lambda(f_\lambda^- - S_\lambda(f_\lambda^-)\ \|_\lambda^+ \leqslant (\|\overset{*}{S}_\lambda\|_{(\varepsilon_\lambda^-, \varepsilon_\lambda^+)})\xi^-(\lambda)$$
$$(\|S_\lambda\|_{(\varepsilon_\lambda^-, \varepsilon_\lambda^-)} + 1)\varepsilon_\lambda^+$$
$$= (\|\overset{*}{S}_\lambda\|_{(\varepsilon_\lambda^-, \varepsilon_\lambda^+)})\delta_-(\lambda).$$

证毕.

注：1) 对一般$\|\cdot\|_\lambda^\pm \in [Q_\lambda^\pm]$，以及相应于$\overset{*}{S}$转化引理中$\eta^\pm(\lambda) \neq \theta_{F_\lambda^\pm}$的情况，$\overset{*}{S}_\Delta$引理也有相应的形式，只不过复杂一些；

2) 当$F_\lambda^\pm = R$，$f_\lambda^\pm = f_\lambda$时，取$\varepsilon_\lambda^\pm = 1$，则(16) 变成

$$\|f_\lambda - \overset{*}{S}_\lambda(f_\lambda)\|_\lambda^+ \leqslant (\|S_\lambda\| + 1)\ (\xi^+(\lambda) + \|\overset{*}{S}_\lambda\|\xi^-(\lambda)), \tag{18}$$

3) 在第三、第四转化引理中，对于一些具体的例，S_λ 相当于 Fourier 展开（直交多项式展开）的部分和的算子，$\overset{*}{S}_\lambda$ 相当于某种三角插补(多项式插补)。单独用第三转化引理时，S_λ也可以是部分 Fourier 积分。

§7. 逼近转化嵌入不等式

可以由逼近理论，特别是逼近的转化结果证明一系列嵌入不等式。由下面几个引理所介绍的证明不等式的方法是一种特别的泛对称转化，简称$B\to Q$方法。

引理1. 对于G^+范数$\|\cdot\|_\pm\in P(h_\pm)$，若

$$\|f-T_\lambda\|_\pm\leqslant\varepsilon_\pm(\lambda),\quad \|T_\lambda\|_+\leqslant\varphi(\lambda,\ \|T_\lambda\|_-),$$

$\varphi(x,\ y)\in(\uparrow y)$，则

$$\|f\|_+\leqslant h_+\{\varepsilon_+(\lambda)+\varphi(\lambda,\ h_-[\varepsilon_-(\lambda)+\|f\|_-])\}.\quad\square$$

引理2. 设$\|\cdot\|_\pm$为$E_\pm$中的G^+范数，F为R，$\|f^+\|_+\leqslant C(\lambda^{\theta_1}\|f^-\|_-+\lambda^{-\theta_2}H)$，这里$H\geqslant 0$为和$E_\pm$有关的数，$C$和$H$，$\lambda$，$\|f^\pm\|_\pm$无关，$\theta_1$，$\theta_2>0$为常数，则有

$$\|f^+\|_+\leqslant C^*[H^{\theta_1/\theta}(\|f^-\|_-)^{\theta_2/\theta}],\quad \theta_1+\theta_2=\theta$$

这里$\lambda\in[\lambda_0,\ \infty)$，$H/\|f^-\|_-\geqslant\lambda_0^\theta\geqslant 0$，当$\lambda$为连续参数时，$C^*=C$，当$\lambda$为离散参数时，$C^*$与$C$有关。□

证明. 取$\lambda=(H/\|f^-\|_-)^{1/\theta}$即可。对离散参数，$C^*$再作适当的调整。证毕。

类似可证

引理3. 设对$f^\pm\in E^\pm$有

$$\|f^+\|_+\leqslant C\{\lambda^{\theta_1}\|f\|_-+\lambda^{\theta_2}r^\lambda H\},$$

C和H，$r\in(0,\ 1)$，λ，$\|f^\pm\|_\pm$无关，则对任何$\varepsilon>0$有

$$\|f^+\|_+\leqslant C^*(\varepsilon)H^{1-\varepsilon}\|f^-\|_-^\varepsilon,$$

C，$C^*(\varepsilon)$与λ之说明同引理2，r为常数。□

引理4. 由不等式

$$\|f^+\|_+\leqslant C\{\lambda^{\theta_1}(\lg\lambda)^{\delta_1}\|f^-\|_-+\lambda^{-\theta_2}(\lg\lambda)^{\delta_2}H\},$$

δ_1，$\delta_2\geqslant 0$可导致

$$\|f\|_+\leqslant C^*\{H^{\theta_1/\theta}\|f^-\|_-^{\theta_2/\theta}(\left|\lg\frac{H}{\|f^-\|_-}\right|^\delta)\},$$

这里$\delta=\max(\delta_1,\ \delta_2)$，$H/\|f^-\|_->\max(\lambda_0^\theta,\ e)$，其它符号和关系

与引理2同。□

结合一些泛函空间的具体结果和转化原则，由$B\to Q$方法就可导出一系列嵌入不等式，由所得的不等式，可再利用转化原则得到许多转化定理、反定理和最优逼近在不同范数下的误差估计。

参 考 文 献

〔1〕关肇直，泛函分析讲义，高等教育出版社，1958.

〔2〕关肇直，拓扑空间概论，科学出版社，1958.

〔3〕Л.В.Канторович,В.З.Вулнх и А.Г.Пинскер, Функционалбный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат,1950.

〔4〕Л.В. Канторович, Функциональный Анализ и прикпадная математика,УМН 3,6(1948),89—185.

〔5〕В.С.Рябенький и А.Ф.Филиппов,об устойчивости разностных уравнений,Гостехиздат,1956.

〔6〕R.D.Richtmyer, *Difference Methods for Initial value Problems*,Interscience Publishes,ИС,1957.

〔7〕G.E. Forsythe *and* P.C.Rosenbloom, *Numerical Analysis and Partial Differential Equations*,Wiley,Иew York,1958.

〔8〕М.А.Красносельсий,Топологические Методы в теории Нелинейных Интегральных уравнений,Гостехиздат,1956.

〔9〕С.Г.Михлин,Варицонные Методы В Математическои физике, Гостехиздат,1957.

〔10〕С. Л. Собоаев, Некоторые Применения функционального Апализа в Математической физике,л.,1950.

〔11〕О.В.Гусева,О Краевых задачах для Сильно Эллиптических Систем,ДАН,102 (1955),1069—1072.

〔12〕И.Bourbaki, *Espaces Vectoriels Topologiques*, Actualités Scientifiques et Industrielles 1189 *and* 1229,Hermann, Paris, 1953 *and* 1955.

〔13〕J.L,Kelley,*General Topology*, D, Van Иostrand Co,, Inc,,

Princeton, И.J., 1955.

〔14〕 И. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Van Nostrand, 1951.

〔15〕 М.М. Вайньерг, Вариационные Методы Исследования Нелинейных Операторов, Гостехиздат, 1956.

〔16〕 С.Г. Михлин, Проьлема Минимума Квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952.

〔17〕 J.K. Kelley, I. Namioka, *Linear Topological Spaces*, Van Nostrand, 1961.

〔18〕 K.J. Arrow, L. Hurwicz, H. Uzawa, *studies in Linear and Nonlinear programming*, Stanford University Press, 1958.

〔19〕 吴学谋，（1）转化原则及其应用，暨南大学泛函分析专门化讲义（程文焕编），1964.

（2）转化原则的一种应用和嵌入不等式，国家科技成果，1964.

（3）逼近论与转化分析，1960.

（4）关于转化与逼近的一些结果（I），湖北省数学会年会报告，1978.

（5）逼近转化分析的原理、结果与问题，湖北省数学会年会报告，1961.

（6）变分转化分析(I)，(II)，应用数学与力学，1(1980)，3(1981).

（7）力学中的泛对称与 Noether 型定理(I)（II)，力学与实践，2(1979)，3(1980).

〔20〕 Тр.Матем. Инст.Им.В.А.СтекловА, XXXVIII (1951); LIII (1959); LXVI(1962).

〔21〕 J.L. Walsh, *Note on Approximation by Bounded Analytic function*, Proc. Nat. Acad. Soc, USA, VoL. 37(1951), 821—826.

〔22〕 J.L. Walsh, H.G. Russell, *Integrated Continuity Condition and Degree of Approximation by polynomials or by Bounded Analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 92.2(1959), 355—370.

〔23〕 А.я. Дуьовичкий и А.А. Милютин, задачи на Экстремум при наличии Ограничений, Ж. Выч. Матем. и мат. Физ. 5; 3(1965), 395—453.

〔24〕 Hardy, *Littlewood and pólya, Inequalities*, Cambridge Univ,

Press,1934.

〔25〕 辻正次，复素变数函数论（日文版）

〔26〕 И.П.Натансон, Конструктивная теория функций, Гостехиздат.1949.

〔27〕 吴学谋，复函数逼近的一些研究（I)(II)，武汉建材学院学报，3，4(1980).

〔28〕 吴学谋，解析函数的一些边界性质与嵌入不等式(I)(II)，华中工学院学报，3，4(1959).

〔29〕 吴学谋，Faber级数的误差转化分析，科学通报，9(1981).

第 二 章

实变函数构造转化分析与有关问题

§1. 高维多项式不等式和误差的转化

1.1 为了研究高维空间中的实函数构造理论，我们来推导高维区域上的Марков型不等式。除开平行于座标面的高维矩形外，这种推广是远非显然的。

设D为m维欧氏空间R^m中的一可测集，若用与D相交的、分别与各座标轴平行的直线来截D，如果得到的都是一些线段，并且这些线段的长度的下确界$\lambda(D)$大于零，则称D为U型集合，$\lambda(D)$简称为D的λ－数。

若可测集合D经过一直交变换后能成为－U型集合，则称D为V型集合。其相应的U型集合的λ－数就叫做它的λ－数；它不一定唯一，但我们只选用一个。若可测集合D经过一非导线性变换后能成为－U型集，则称D为V^*型集合。显然，V型集合必为V^*型集合。

一个可测集合D若是由有限个V型集合叠加而成$\sum_{i=1}^{k} D_i$，则D称为W型集合；D之λ－数定义为$\min_i \lambda(D_i)$，它可能不唯一，但我们只选用一个。对于一维空间，有限个线段之和集就看作W集。若D_i均为V^*型集合，则称D为W^*型集合。

下面两类集合是W型集合，只要内域非空即可：

1°. 有限个互不相交的边界为光滑的闭集合；

2°. 有限个互不相交的边界为逐段光滑的、且在非光滑的交棱处之邻域为平直、内交角不小于直角的闭集合.

为了确信这些断言，我们考虑$m=2$的情况. 设Γ为D之边界，则对于每一个光滑点$X\in\Gamma$，由于光滑性，存在一个充分小的矩形A_X，它的一个顶点在Γ外，三个在D内，而$D\cap A_X$与A_X之边平行的直线相截的线段的长度之下确界不为零，也就是说$D\cap A_X$为$-V$型集合而且可要求X属于A_X之内域. 对于每一个非光滑点(即角点) $X\in\Gamma$，就存在有限个充分小的（m维）闭矩形$A_X^{(i)}$，$i=1, 2, \cdots, k(X)$，使得$D\cap A_X^{(i)}$都是V型集合，而Γ在X的某个邻域全包含在$\sum\limits_i A_X^{(i)}$中（对$m=2$，$k(X)=1$即可）. 这时改变覆盖定理的一个形式，就可证只有有限个这种闭矩形就把Γ掩盖了. 因而总可以找到有限个闭矩形把D盖住，而每个矩形和D之交又是V型集合.

当交棱处之内角为任意时（但不为零），则是一般的W^*型集合.

记$X=(x_1, x_2, \cdots, x_m)$为$R^m$中之点，$(BP_n)_m$为多项式族

$$\sum B(X)a_{i_1\cdots i_m}x_1^{i_1}\cdots x_m^{i_m},\quad 0\leqslant i_j\leqslant n,$$

$a_{j_1\cdots j_m}$为常系数，$B(X)$为权函数.

定理1. 若D为m维W型集合，它的λ-数是$\lambda(D)$，则对任何$p_n\in(P_n)_m$有

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n\right\|_{C(D)}\leqslant\frac{2m}{\lambda(D)}n^2\|p_n\|_{C(D)},$$

$$i=1, 2, \cdots, m. \square$$

证明. 首先我们考虑D为U型集合时的情况. 固定x_j, $j\neq i$，而只让座标x_i变动，这是一条平行于x_i轴的直线，若它与D相交，则交集G是由许多线段组成，这些线段的长度都不小于$\lambda(D)$（因为D为U型集合）. 这时p_n在G上属于$(p_n)_1$，即是说为x_i之多项式. 其次数不超过n，故由一维的Марков不定式有

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n\right\|_{C(G)}\leqslant\frac{2n^2}{\lambda(D)}\|p_n\|_{C(G)}$$
$$\leqslant\frac{2n^2}{\lambda(D)}\|p_n\|_{C(D)},$$

不等式右边与G没有关系，因而对任何与x_i轴平行、与D相交的直线组成的G，上面不等式成立，所以有

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n\right\|_{C(D)}\leqslant\frac{2n^2}{\lambda(D)}\|p_n\|_{C(D)}.$$

现在来考虑D为V型集合的情况．这时用直交变换把$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$变成$(x_1', x_2', \cdots, x_m')$，$D$变成$D'$，$D'$为$-U$型集合，而多项式$p_n=p_n(x_1, x_2, \cdots x_m)$变成一次数（对每个变量$x_i'$来说）不大于$n$的多项式$Q_n=Q_n(x_1', x_2', \cdots, x_m')$，而这时有

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i'}Q_n\right\|_{C(D')}\leqslant\frac{2n^2}{\lambda(D')}\|Q_n\|_{C(D')}$$
$$=\frac{2n^2}{\lambda(D)}\|p_n\|_{C(D)},$$
$$i=1, 2, \cdots, m.$$

这里我们选D之λ－数为$\lambda(D')$，因此有

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n\right\|_{C(D)}=\left\|\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial Q_n}{\partial x_j'}\frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\right\|_{C(D')}$$
$$\leqslant\sum_{j=1}^{m}\left\|\frac{\partial Q_n}{\partial x_j'}\right\|_{C(D')}\leqslant\frac{2mn^2}{\lambda(D)}\|p_n\|_{C(D)}.$$

若D为$-W$型集合，这时$D=\sum_{j=1}^{k}D_j$，D_j为某种V型集合．这时显然有

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n\right\|_{C(D)}\leqslant\max_j\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n\right\|_{C(D_j)}$$
$$\leqslant\max_j\frac{2mn^2}{\lambda(D_j)}\|p_n\|_{C(D)}$$
$$\leqslant\frac{2mn^2}{\lambda(D)}\|p_n\|_{C(D)}.$$

定理证毕。

这里我们再给出一个和上定理相似的结果：

定理1*. 若D为m维W型集合，则对任何$p_n\in(P_n)_m$有

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n\right\|_{L^p(D)}\leqslant cn^2\|p_n\|_{L^p(D)},$$

这里$c<4md(D)^{\frac{m-1}{p}}(2+16\pi^2)^{2-\frac{1}{p}}/(\sqrt{3}\lambda(D))$

$\leqslant 356\times md(D)^{\frac{m-1}{p}}/\lambda(D)$，$d(D)$ 为D的直径，$1\leqslant p\leqslant\infty$。□

证明和定理1的相似，只要对一维的结果证明就行了。但是对于一维的情况，Бари已经证明了不等式

$$\|p_n'(x)\|_{L^p(a,b)}\leqslant\frac{c_1n^2}{b-a}\|p_n\|_{L^p(a,b)}$$

（参看〔1〕），根据她的证明知$c_1<\frac{4}{\sqrt{3}}(2+16\pi^2)^{2-\frac{1}{p}}$.若不要求对估计系数有明朗的形式，则用定理1的证法就可以了

定理1.** 若D为m维 W^*型集合，则对任何$p_n\in(P_n)_m$有不因n，p_n而变的常数C使得

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n\right\|_{L^p(D)}\leqslant cn^2\|p_n\|_{L^p(D)},$$

这里$1\leqslant p\leqslant\infty$。□

对于$p_n\in(P_n)_1$，Бернштейн不等式指出对于任何直线段［a, b］及任何（a, b）中之子集e，若e到［a, b］之边界（$x=a$, b）的距离为$\delta>0$，则必有

$$\sup_{x\in e}|p_n'(x)|\leqslant\frac{n}{\delta}\max_{x\in[a,b]}|p_n(x)|$$

从Бернштейн不等式的这一个形式出发，像定理1中对U型集合的证法一样，可以证明：

定理2. 设D为R^m中之闭集，D_+为D之一闭子集。若 D_+到D之边界的距离$\delta>0$，则对任何$p_n\in(P_n)_m$有

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n\right\|_{C(D_+)}\leqslant\frac{n}{\delta}\|p_n\|_{C(D)}\ \square$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

我们现在来证明另一类型重要的不等式。

设D为R^m中之开（闭）集合，$m>1$，若对任何点$X\in D$，有一以X为顶点、半径为r_0、m维立体角为θ_0的m维开（闭）角锥$V(X, r_0, \theta_0)\subset D$，$r_0$，$\theta_0$与$X\in D$无关，则称$D$为$S_m(r_0, \theta_0)$型集合，或简称为$S_m$型集合．对于$m=1$，若对任何$X\in D$有一以$X$为端点长为$r_0$的线段$V(X, r_0, 1)\subset$D，则我们可认为$D\in S_1(r_0, 1)$，这时上面定义对$m=1$也成立．

设D为R^m中之闭集合，若对任何$p_n\in(P_n)_m$有$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n\right\|_{C(D)}\leqslant \sigma_D(n)\|P_n\|_{C(D)}$，$\sigma_D(n)$和，$i=1, \cdots, m$无关，则称$\sigma_D(n)$为$D$之$\sigma-$数，显然$\sigma-$数不是唯一的．

显然，若D为W型集合，则有$\sigma_D(n)\geqslant\frac{2mn^2}{\lambda(D)}$；若$D$为$W^*$型集合，则有$\sigma_D(n)$为$cn^2$，$c$为某一正的常数．

定理3． 若闭集$D\in S_m(r_0, \theta_0)$具有$\sigma-$数$\sigma_D(n)$，则对任何$p_n\in(P_n)_m$，只要n大到$\sigma_D(n)\geqslant(mr_0)^{-1}$，就有

$$\|p_n\|_{L^q(D)}\leqslant k_q\sigma_D(n)^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|p_n\|_{L^p(D)},$$

这里$0<p\leqslant q\leqslant\infty$，$K_q=\left[\frac{m^{m+1}(p+1)2^{m+p-1}}{\theta_0(m+p+1)}\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$．□

证明． 我们可以选到这样的点$X_0\in D$，使得$\|p_n\|_{C(D)}=|p_n(X_0)|$，这时有一$m$维角锥$V(X_0, r_0, \theta_0)\subset D$．对于$X\in V(X_0, r_0, \theta_0)$，由$\sigma-$数的定义知道有

$$|p_n(X)-p_n(X_0)|\leqslant\max_i\left|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n\right|_{C(V(X_0,r_0,\theta_0))}\times\sum_{j=1}^m|x_j-x_j^0|\leqslant m\sigma_D(n)\rho(X, X_0)\|p_n\|_{C(D)},$$

这里x_j，x_j^0分别是X，X_0的位标，$\rho(X, X_0)$是X，X_0间的距离．

因此在$V(X_0, r_0, \theta_0)$中有

$$|p_n(X)|^p\geqslant\|p_n\|_{C(D)}^p(1-m\sigma_D(n)\rho(X, X_0))^p$$

（注意这时$1-m\sigma_D(n)\rho(X, X_0)\geqslant0$）．故有

$$\int\cdots\int_{D} |p_n(X)|^p dv \geq \theta_0 \|p_n\|^p_{C(D)}$$

$$\cdot \int_0^{(m\sigma_D(n))^{-1}} (1 - m\sigma_D(n) r) p \times$$

$$\times r^{m-1} dr \geq \frac{\theta_0(m+p+1)}{m^{m+1}(p+1)2^{m+p-1}} \|p_n\|^p_{C(D)} [\sigma_D(n)]^{-m}.$$

所以得到

$$\|p_n\|_{C(D)} \leq k_\infty \sigma_D(n)^{\frac{m}{p}} \|p_n\|_{L^p(D)}.$$

这时

$$\|p_n\|_{L^q(D)} \leq \|p_n\|^{1-\frac{p}{q}}_{C(D)} \|p_n\|^{\frac{p}{q}}_{L^p(D)}$$

$$\leq k_\infty^{1-\frac{p}{q}} \sigma_D(n)^{m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|p_n\|_{L^p(D)}.$$

定理证毕.

由上面得到的不等式可以导出一系列结果，例如：

若$D\subset R^m$为W^*型集合，当$D\in S_m(r_0, \theta_0)$时，则对任何$p_n\in(p_n)_m$（n充分大时），有

$$\|p_n\|_{L^q(D)} \leq c n^{2m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|p_n\|_{L^p(D)}, \tag{1}$$

这里$0<p\leq q\leq\infty$，c和n，p_n无关，特别当D为W型集合时，$c\leq K_q \dfrac{2m}{\lambda(D)}$.

在定理2的条件下有

$$\|\partial^k p_n\|_{c(D+)} \leq \left[\frac{2n}{\delta}\right]^k \|p_n\|_{c(D)}, \tag{2}$$

∂^k为任何k阶偏导数.

设闭集$D\subset R^m$有σ^-数$\sigma_D(n)$, $D\in S_m(r_0,\theta_0)$, $\sigma_D(n)\geq(mr_0)^{-1}$，则对$p_n\in(P_n)_m$有

$$\|\partial^k p_n\|_{c(D)} \leq K_\infty \sigma_D(n)^{k+\frac{m}{p}} \|p_n\|_{L^p(D)}. \tag{3}$$

特别当$D\in W^*$时有

$$\|\partial^k p_n\|_{c(D)} \leq c n^{2\left(k+\frac{m}{p}\right)} \|p_n\|_{L^p(D)}, \tag{4}$$

c和n，p_n无关，当$D\in W$时$c<K_\infty\times\left(\dfrac{2m}{\lambda(D)}\right)^{k+\frac{m}{p}}$.

若$D\in S_m(r_0,\ \theta_0)$有σ_-数$\sigma_D(n)$，$D_+\subset D$到D之边界的距离$\delta>0$，则

$$\|\partial^k p_n\|_{c(D')}\leqslant K_\infty\left[\frac{2n}{\delta}\right]^k\sigma_D(n)^{\frac{m}{p}}\|p_n\|_{L^p(D)}. \tag{5}$$

特别当D为一般的W^*型集合时，对$p>0$，

$$\|\partial^k p_n\|_{c(D')}\leqslant\frac{c}{\delta^k}n^{k+\frac{2m}{p}}\|p_n\|_{L^p(D)}. \tag{6}$$

这里c和δ，p_n及充分大之$n\left(例如\frac{1}{m\sigma_D(n)}\leqslant r_0\right)$无关，当$D\in W$时$c\leqslant K_\infty 2^{k+\frac{m}{p}}\left(\frac{m}{\lambda(D)}\right)^{k+\frac{2m}{p}}$.

若$D\subset R^m$为W^*型集合，并且$D\in S_m(r_0,\ \theta_0)$，则对充分大的n，$p_n\in(P_n)_m$时有

$$\|\partial^k p_n\|_{L^q(D)}\leqslant cn^{2m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+2k}\|p_n\|_{L^p(D)}. \tag{7}$$

这里$1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$，$c$和$n$，$p_n$无关；当$D\in W$时

$$c\leqslant K_q\left[\frac{4md(D)^{\frac{m-1}{p}}}{\sqrt{3}\lambda(D)}(2+16\pi^2)^{2-\frac{1}{p}}\right]^k.$$

下面我们讨论一种不等式，它类似Бернштейн关于多项式在扩大的区域上的估计式

定理4. 设$D\subset R^m$为W型集，D_d为它的d邻域，则对$p_n\in(P_n)_m$有

$$\|p_n\|_{C(\overline{D}_d)}\leqslant[R(d)]^{mn}\|p_n\|_{C(D)},$$

$$R(d)\leqslant 1+\frac{2d}{\lambda(D)}+\left[\frac{2d}{\lambda(D)}\left(\frac{2d}{\lambda(D)}+2\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$\overline{D}_d$为D_d之闭仓. □

证明的方法和定理1的相同。下面是证明的思想和步骤。

首先证$m=1$时的结论。考虑$D=[-1,\ 1]$时的情况。这时$W=\varphi(z)=z+\sqrt{z^2-1}$等角映射$[-1,\ 1]$之补集为$|W|>1$，而$[-1-d,1+d]$没有跑到曲线$c_R(|W|=R=(1+d+\sqrt{(1+d)^2-1})=(1+d+\sqrt{d(d+2)})$的像集)的外面去。因此由Бернштейн不等

式有

$$\|p_n(z)\|_{c(c_R)} \leqslant R^n \|p_n(z)\|_{c(-1;1)},$$

$p_n(z)$为复平面关于z的n次多项式；

$$\|p_n(x)\|_{c[-1-d;1+d]} \leqslant (1+d+\sqrt{d(d+2)})^n \|p_n(x)\|_{c(-1;1)}.$$

用线性变换转到一般的区间$[a,b]$上去，就证明了一维时的结论。

由证定理1的方法可化成高维的情况。例如，我们考虑$m=2$时的情况。对于U型集合D，让它平行两座标轴展延长度d得一集$D^{(1)}$，这时不难对$p_n \in (P_n)_2$证得

$$\|p_n\|_{c(D^{(1)})} \leqslant [R(d)]^n \|p_n\|_{c(D)}.$$

再把$D^{(1)}$平行两座标轴展延长度d得一集$D^{(2)}$，这时可证

$$\|p_n\|_{c(D^{(2)})} \leqslant [R(d)]^n \|p_n\|_{c(D^{(1)})}$$
$$\leqslant [R(d)]^{2n} \|p_n\|_{c(D)}.$$

不难看到这时$D^{(2)} \supset D_d$。由U型集推广到W型集是容易的。

一般说，上面平行座标轴扩展要连做m次才能掩盖D_d，这就是定理中指数m的来源。

自然，若用另外一些叙述方式，我们的定理会表达得更精确些。

在定理4的条件下，自然可得

$$\|\partial^k p_n\|_{c(\overline{D}_d)} \leqslant \left(\frac{2mn^2}{\lambda(D)}\right)^k [R(d)]^{mn} \|p_n\|_{c(D)}, \tag{8}$$

特别对$D \in S_m$时有

$$\|\partial^k p_n\|_{c(\overline{D}_d)} \leqslant cn^{2\left(k+\frac{m}{p}\right)} [R(d)^{mn} \|p_n\|_{L^p(D)}, \tag{9}$$

$p>0$，c和n，p_n无关。

同样还可以得到一系列不定式。

1.2. 现在来谈逼近度的转化．由于P转化引理已经列出了一般转化定理的形式，所以只要一旦获得有关的不等式，相应的转化定理本质上即可求得．这些推导基本上就像代公式一样．近代文献提供的不等式相当多，一般也能用我们提供的转化引理列出相应的转化定理出来。我们只列出由上面的不等式得到的转化定

理，而且只集中力量讨论一个，其余的读者可自行列出来。

我们只列出不等式(7)所对应的结果，而且估计式将采用简化的（非能行性的）形式．一般说估计式的常系数都是可明朗化的．只要相应的不等式有明晰的估计即可，因为转化引理已经列出了较明朗的估计形式。

在过渡极限的程序中我们需要一些预备定理。

引理1． 若$D\subset R^m$为闭区域，$1\leqslant p,\ q\leqslant\infty$，$f,\ f_n\in L^p(D)$，$g,\ \partial^k f_n/\partial x_i^k\in L^q(D)$，

$$\|f-f_n\|_{L^p(D)}\to 0,\quad \left\|g-\frac{\partial^k f_n}{\partial x_i^k}\right\|_{L^q(D)}\to 0,$$

则有f^*在D上和f几乎处处相等，对于任何x_i和几乎所有的$x_1,\cdots,x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_m$，$\partial^{k-1}f^*/\partial x_i^{k-1}$绝对连续，并且$\partial^k f^*/\partial x_i^k$和$g$相等。□

当$p=q$，D为（高维）矩形时，这结论是由Никольский在[3]中论证了的．注意到闭区域可用（无穷个高维）矩形来掩盖，则不难引导到引理1的形式．利用类似的方法可以证明下面三引理。

引理2． 在上引理的条件下，若$L^p(D)$，$L^q(D)$均改为$c(D)$，则必有$\partial^k f/\partial x_i^k$存在并且在$D$上等于$g$．□

这里函数在区域边界上之导数值是由域内导数值取极限值定义的．以后我们也将采用这一说明。

引理3． 在引理1的条件下，若$L^p(D)$改为$c(D)$，则结论中的f^*就可是f本身。□

引理4． 在引理1的条件下，若$L^q(D)$改为$c(D)$，则f经$-m$维零集上值的修改后得f^*，且$\partial^k f^*/\partial x_i^k$处处和$g$相等。□

这些引理在下面定理的证明中并不全用，但为了读者在用转化引理推导不列在本书中的转化定理或反定理时的方便，我们把这些常用的引理都列出来了。

现在我们可以来引述转化定理了。

定理5． 若对W^*型之闭区域$D\in S_m$和$f\in L^p(D)$，$1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$，

有$p_n \in (P_n)_m$使得

$$\|f-p_n\|_{L^p(D)} \leqslant \varepsilon(n), \quad \varepsilon(t) \searrow 0,$$

$$\int^{\infty} t^{2m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+2k-1} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right) dt < \infty,$$

则必有和f几乎处处相等的f^*，f^*之任何k阶偏导数$\partial^k f^*$存在并属于$L^q(D)$，而且

$$\|\partial^k(f^*-p_n)\|_{L^q(D)} = O\left\{\int_n^{\infty} t^{2m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+2k-1} \left(\frac{t}{u}\right) dt\right\},$$

这里$u>1$为某任给的常数（以后在涉及转化原则的应用时，若不产生误解，我们仍将如此引用这一符号）.□

证明. 首先注意$\{(p_n)_m\} \in A[\sigma(n)]$，这里$\sigma(t) \equiv t$. 取$\|\cdot\|_-$为$\|\cdot\|_{L^p(D)}$；而$\|\cdot\|_+$则由$\|Q\|_+ \equiv \|\partial^k Q\|_{L^q(D)}$的形式定义；$E_\pm$相应对应由对范数$\|\cdot\|_\pm$有意义的函数组成. 这时$\|\cdot\|_\pm \in P(1)$.

为了叙述方便，设∂^k为$\partial^k/\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_m^{k_m}$，而且$k_m \geqslant 1$(对不是这种的情况，证明是相似的)，$k_1+\cdots+k_m=k$. 这时由转化引理知道，对$n_1 \leqslant n_2$，$n_1 \to \infty$，应用不等式(7)（$q=\infty$之结果)有

$$\|p_{n_1}-p_{n_2}\|_{C(D)} = O\left\{\int_{n_1}^{\infty} t^{\frac{2m}{p}-1} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right) dt\right\} \to 0,$$

$$\left\|\frac{\partial k_1+\cdots+k_i}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_i^{k_i}}(p_{n_1}-p_{n_2})\right\|_{C(D)}$$

$$= O\left\{\int_{n_1}^{\infty} t^{\frac{2m}{p}+2b_i-1} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right) dt\right\} \to 0, \quad b_i = k_1+\cdots+k_i,$$

这里$i \neq m$. 注意，这里引用转化引理时，相应的$\|\cdot\|_+$由$\|\cdot\|_+ = \|\cdot\|_{C(D)}$，$\|Q\|_+ = \|\partial^{b_i} Q/\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_i^{k_i}\|_{C(D)}$定义，而转化引理中之$\varphi(x,y)$相应地为$C_1 x^{\frac{2m}{p}} y$，$C_2 x^{\frac{2m}{p}+2b_i} y$. 其中$C_1$，$C_2$为常数，这是由不等式(7)得知的.

由空间$C(D)$之完全性即知存在f^*，$\varphi_{(i)} \in C(D)$，使得

$$\|f^*-p_n\|_{C(D)} \to 0, \quad \left\|\varphi_{(i)} - \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_i}}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_i^{k_i}} p_n\right\|_{C(D)} \to 0,$$

由于$\|f-p_n\|_{L^p(D)} \to 0$，故知f和f^*几乎处处相等.

逐次引用引理2就知道，在D上

$$\frac{\partial^{k_1} f^*}{\partial x_1^{k_1}} = \varphi_{(1)}, \quad \frac{\partial^{k_i} \varphi_{(i-1)}}{\partial x_i^{k_i}} = \varphi_{(i)}, \quad 1 < i < m.$$

注意，这里我们每次引用都不涉及混合导数。也即是说，在D上

$$\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_{m-1}}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_{m-1}^{k_{m-1}}} f^* = \varphi_{(m-1)}.$$

记 $$f_n = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_{m-1}}}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_{m-1}^{k_{m-1}}} p_n,$$

则由转化引理，根据定理的条件，知

$$\left\| \frac{\partial^{k_m}}{\partial x_m^{k_m}} (f_{n_1} - f_{n_2}) \right\|_{L^q(D)}$$

$$= O\left\{ \int_{n_1}^{\infty} t^{2m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+2k-1} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right) dt \right\} \to 0.$$

这里之$\|\cdot\|_+$由$\|Q\|_+ = \|\partial^k Q/\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_m^{k_m}\|_{L^q(D)}$定义，$\varphi(x, y)$为$C_3 x^a y$，$a = 2m\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + 2k$，$C_3$为常数（参看不等式（7））。因而由$L^q(D)$之完全性有$\varphi_{(m)} \in L^q(D)$使得

$$\left\| \varphi_{(m)} - \frac{\partial^{k_m}}{\partial x_m^{k_m}} f_n \right\|_{L^q(D)}$$

$$= O\left\{ \int_n^{\infty} t^{a-1} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right) dt \right\} \to 0.$$

由引理3可知$\partial^{k_m}\varphi_{(m-1)}/\partial x_m^{k_m}$和$\varphi_{(m)}$几乎处处相等。在后一渐近式中以$\partial^k f^*/\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_m^{k_m}$代替$\varphi_{(m)}$即完成了定理的证明。

从论证过程中，我们知道在用第一转化引理时，对参数族$\{\lambda\}$和范数$\|\cdot\|_\pm$的理解是很重要的；在过渡到极限时，相应的极限元素之间具体的分析的关系的论证是主要的困难。有了上面的证明作为借鉴，对各种不等式导出的结论就不难找到了。对一些特定的函数，例如解析函数和广义函数，在不同范数下极限的关系几乎是不证自明的。

§ 2. 直接定理　最优逼近和直交多项式级数

2.1.　现在我们来证一个在高斯光滑流形上用多项式来逼近的直接定理．在某些情况下，它和Xappuk在〔4〕中得到的结论等价，但这里的论证简洁些．

记　$|X-Y|$为X，$Y\in R^m$的距离．

设　$D\subset R^m$为一闭区域，$f(X)$在D上之所有k次偏导数存在并连续，则记$f(X)\in C^{[k]}(D)$，并定义

$$\|f\|_{C^{[k]}(D)}=\max_{0\leq i_1+i_2+\cdots+i_m\leq k}\left\|\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_m}f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\right\|_{C(D)},$$

$$\omega(\delta,f,C^{[k]}(D))=\max_{0\leq i_1+\cdots+i_m\leq k}\max_{\substack{X\in D\\ Y\in D\\ |X-Y|\leq\delta}}\left|\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_m}f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\bigg|_X-\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_m}f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_m^{i_m}}\bigg|_Y\right|$$

若有一定义在一包含D的开区G中的函数$\varphi(X)\in C^{[k]}(\bar{G})$，$\omega(\delta,\ \varphi,\ C^{[k]}(\bar{G}))=0(\delta)$，$\varphi|_\Gamma=0$，$\mathrm{grad}\varphi|_\Gamma\neq0$，对$X\bar{\in}\Gamma$，$\varphi(X)\neq0$，$\Gamma$为$D$之边界，则记$D\in X_m^k(\varphi)$或$D\in X_m^k$．

定理6．　若$D\in X_m^k$，$k\geq1$，$f\in C^{[k]}(D)$，则对任何$\Psi\in C^{[k]}(D)$有不因$r=0$，1，…，k而变的$P_n\in(P_n)_m$，使得

$$\|f-P_n\|_{C^{[r]}(D)}\leq\frac{c_1}{n^{k-r}}\omega\left(\frac{1}{n},\ f,\ c^{[k]}(D)\right),$$

$$\|\Psi(f-P_n)\|_{C^{[r]}(D)}\leq\frac{c_2(\Psi)}{n^{k-r}}\ \omega\left(\frac{1}{n},\ f,\ c^{[k]}(D)\right),$$

这里常数c_1，$c_2(\Psi)$和n，r无关．

当$D\in X_m^1$，$k=0$，$f\in C(D)$，$\Psi\in C(D)$时，结论也成立．□

证明．　第二个不等式显然可以直接由第一个不等式导出．为了叙述方便我们只对$m=2$的情况来证明第一个不等式．

记G_d为矩形：$|x_1|\leqslant d$，$|x_2|\leqslant d$。为不失一般性，我们设$D\subset G_{1-\varepsilon}$，$\varepsilon>0$。

因为$D\in X_m^h$，$f\in C^{[h]}(D)$，则f可以连续展延到G_1，开拓后的函数$f^*\in C^{[h]}(G_1)$。而且对$X\overline{\in}G_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$有$f^*(X)=0$，从而

$$\omega(\delta,\ f^*,\ C^{[h]}(G_1))=0\{\omega(\delta,\ f,\ C^{[h]}(D))\},$$

（参看〔4〕中有关的论述）。

这时$g(\theta_1,\ \theta_2)=f^*(\cos\theta_1,\ \cos\theta_2)\in C^{[h]}(G_\pi)$，并且

$$\omega(\delta,\ g,\ c^{[h]}(G_\pi))=O\{\omega(\delta,\ f^*,\ c^{[h]}(G_1))\}$$
$$=O\{\omega(\delta,\ f,\ c^{[h]}(D))\}.$$

现在对各变量均以2π为周期的$h(\theta_1,\ \theta_2)\in C(G_\pi)$考虑运算子

$$T_nh(\theta_1,\theta_2)=\iint_{G_\pi}h(\theta_1+\lambda,\ \theta_2+\mu)K_n(\lambda)K_n(\mu)d\lambda d\mu,$$

$$K_n(t)=\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin(\xi t/2)}{\sin(t/2)}\right]^4dt\right\}^{-1}\left[\frac{\sin(\xi t/2)}{\sin(t/2)}\right]^4,$$

$$\xi=\left[\frac{n}{2}\right]+1.$$

再定义算子$F_n=I-T_n$，I为恒等变换．可以证明：若$h(\theta_1,\ \theta_2)\in C^{[i]}(G_\pi)$对自变数$\theta_1$，$\theta_2$以$2\pi$为周期，则对任何正整数$l$

$$\omega(\delta,\ F_n^lh,\ C^{[i]}(G_\pi))=O\{\omega(\delta,\ h,\ C^{[i]}(G_\pi))\}$$

（参看〔4〕中关于T_n的性质并注意F_n和T_n的联系）。

这时可以证明，$(I-F_n^{h+1})g(\theta_1,\ \theta_2)$为只含cos的$n$次重三角多项式：$\sum\limits_{p,q=0}^{n}a_{p,q}^{(n)}(\cos\theta_1)^p(\cos\theta_2)^q$。这时$p_n(x_1,x_2)=\sum\limits_{p,q=0}^{n}\times a_{p,q}^{(n)}x_1^px_2^q$就是所求的多项式，我们来证实这一论断。

在〔4〕中已证明，对$h(\theta_1,\ \theta_2)\in C^{[l]}(G_\pi)$，$h(\theta_1+2\pi,\ \theta_2+2\pi)=h(\theta_1,\ \theta_2)$有

$$\|F_n^{l+1}h\|_{C(G_\pi)}\leqslant\frac{c_3^l}{n^l}\,\omega\left(\frac{1}{n},\ h,\ C^{[l]}(G\pi)\right),$$

c_3为与h，n，l无关的常数。这时有

$$\|f-p_n\|_{C^{[r]}(D)}=O\{\|f^*-p_n\|_{C^{[r]}(G_1)}\}$$
$$=O\{\|F_n^{k+1}g\|_{C^{[r]}(G_\pi)}\}$$
$$=O\left\{\max_{0\leq i+j\leq r}\left\|\frac{\partial^{i+j}}{\partial x_1^i\partial x_2^j}F_n^{k+1}g\right\|_{C(G_\pi)}\right\}$$
$$=O\left\{\max_{0\leq i+j\leq r}\left\|F_n^{k+1}\left(\frac{\partial^{i+j}g}{\partial x_1^i\partial x_2^j}\right)\right\|_{C(G_\pi)}\right\}$$
$$=O\left\{\max_{0\leq i+j\leq r}\frac{1}{n^{k-r}}\omega\left(\frac{1}{n},\ F_n^r\left(\frac{\partial^{i+j}g}{\partial x_1^i\partial x_2^j}\right),\ C^{[k-r]}(G_\pi)\right)\right\}$$
$$=O\left\{\max_{0\leq i+j\leq r}\frac{1}{n^{k-r}}\omega\left(\frac{1}{n},\ \frac{\partial^{i+j}g}{\partial x_1^i\partial x_2^j},\ C^{[k-r]}(G_\pi)\right)\right\}$$
$$=O\left\{\frac{1}{n^{k-r}}\omega\left(\frac{1}{n},g,C^{[k]}(G_\pi)\right)\right\}$$
$$=O\left\{\frac{1}{n^{k-r}}\ \omega\left(\frac{1}{n},\ f,\ C^{[k]}(D)\right)\right\}.$$

对$k=0$的情况，证明是相似的（可参看〔4〕中相应特款的论述）。

定理证毕。

2.2. 若建立了直接定理，对于相应的范数，最优逼近的误差估计问题基本上就解决了。第二转化原则是处理最优逼近在另外的范数意义下的误差估计的；若考虑的是多项式逼近（对非多项式逼近的讨论是相似的），要能用上第二转化引理主要要解决的两个问题是：1）找到相应不同范数间的多项不等式，2）找到统一逼近多项式在两种范数意义下的误差估计（统一逼近多项式本身的形式是不关紧要的）。问题：1)在近代文献中已提供不少，本书也提供了一些；2）解决的方案一种是像定理6一样，建立(不同范数同时逼近的）直接定理．一种是已知在一种范数下的误差而用第一转化引理或嵌入定理(若全空间的嵌入不等式存在的话）估计（同一多项式）在另一范数下的误差；而第一种范数意义下的误差则由相应的直接定理解决或者形式上就假定为已知。用后

一种方案得的结果是很多的（因为只要解决了问题1），由第一转化引理导出的结果就多极了），本书只具体讨论几个例子作为代表，其余的读者可根据第二转化引理自行列出来．若统一逼近的两种误差的具体形式是不知道的，而只是形式地假定已知，那结论就是第二转化引理本身，所以这类关于在另一种范数意义最优逼近的误差估计的命题是没有特别谈及的必要的．

下面举几个第二转化引理应用的例子．

定理7． 设$\sigma=k-2l_2+l_1\geqslant 0$，$l_2\geqslant l_1$，$D\in X_m^k$，$f\in C^{[k]}(D)$，$M_n=M(f,\ \|(P_n)_m\|_{C^{[l_1]}(D)})$，则必

$$\|f-M_n\|_{C^{[l_2]}(D)}=O\left\{\frac{1}{n^\sigma}\omega\left(\frac{1}{n},f,C^{[k]}(D)\right)\right\},$$

（对$k=0$，应设$D\in X_m^1$）．□

证明． 根据定理6，这时存在同一的$Q_n\in(P_n)_m$使得

$$\|f-Q_n\|_{C^{[l_1]}(D)}=O\left\{\frac{1}{n^{k-l_1}}\omega\left(\frac{1}{n},\ f,\ C^{[k]}(D)\right)\right\},$$

$$\|f-Q_n\|_{C^{[l_2]}(D)}=O\left\{\frac{1}{n^{k-l_2}}\omega\left(\frac{1}{n},f,C^{[k]}(D)\right)\right\},$$

另一方面，由于D为W型区域，故对$P_n\in(P_n)_m$有

$$\|P_n\|_{C^{[l_2]}(D)}\leqslant cn^{2(l_2-l_1)}\|P_n\|_{C^{[l_1]}(D)},$$

c和n，P_n无关（参看定理1）．

因此，由第二转化引理有

$$\|f-M_n\|_{C^{[l_2]}(D)}=O\left\{\frac{1}{n^{k-l_2}}\omega\left(\frac{1}{n},f,C^{[k]}(D)\right)+\right.$$

$$\left.+n^{2(l_2-l_1)}\frac{1}{n^{k-l_1}}\omega\left(\frac{1}{n},f,c^{[k]}(D)\right)\right\}$$

$$=O\left\{\frac{1}{n^\sigma}\omega\left(\frac{1}{n},f,C^{[k]}(D)\right)\right\}.$$

注意，这时在第二转化引理中$\|\cdot\|_{(\lambda)}^{+}\equiv\|\cdot\|_{C^{[l_2]}(D)}$，$\|\cdot\|_{(\lambda)}^{-}\equiv\|\cdot\|_{C^{[l_1]}(D)}$，参数集$I$为$\{n\}$，$\sigma(t)\equiv t$，$\overset{(\pm)}{f}\equiv f$，$h_\lambda^\pm\equiv 1$，$E_n^*\equiv(P_n)_m$，$J_n(x)=cn^{2(l_2-l_1)}x$，$E_\lambda^+\equiv C^{[l_2]}(D)$，$E_\lambda^-\equiv C^{[l_1]}(D)$（而$E$可

理解为D上定义的函数)。证毕。

定理8. 若W^*型集合$D\in S_m, q\geqslant p\geqslant 1, f\in L^q(D)$，并有 $P_n\in (P_n)_m$使得

$$\|f-P_n\|_{L^q(D)}\leqslant\varepsilon(n),$$

则必

$$\|f-G_n\|_{L^q(D)}=O\left\{n^{2m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\varepsilon(n)\right\},$$

这里 $G_n=M(f, \|(P_n)_m\|_{L^p(D)}$。□

实际上，对同样P_n，我们有

$$\|f-P_n\|_{L^p(D)}=O\{\varepsilon(n)\}$$

这是由于$p\leqslant q$。故像定理7的论证一样，由第二转化引理有

$$\|f-G_n\|_{L^q(D)}=O\left\{\varepsilon(n)+n^{2m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\varepsilon(n)\right\}$$

$$=O\left\{n^{2m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\varepsilon(n)\right\}$$

定理8* 在上定理的条件下，设$\varepsilon(t)\searrow 0$

$$\int t^{2h-1}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt<\infty,$$

若$q>p$，则存在和f几乎处处相等的f^*，$\partial^h f^*\in L^q(D)$，并且

$$\|\partial^h(f^*-G_n)\|_{L^q(D)}=O\left\{n^{2m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+2h}\varepsilon(n)\right\}. \quad \square$$

实际上，f^*的存在是由转化定理决定的。这时对同一的P_n，

$$\|f-P_n\|_{L^p(D)}=O\{\varepsilon(n)\},$$

$$\|\partial^h(f^*-P_n)\|_{L^q(D)}=O\left\{\int_n^\infty t^{2h-1}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt\right\}.$$

故 像 定 理 7 的证明一样，相应的$\|\cdot\|^-_{(\lambda)}$为$\|\cdot\|_{L^p(D)}$，$\|Q\|^+_{(\lambda)}\equiv\|\partial_h Q\|_{L^q(D)}$，由第二转化引理有

$$\|\partial^h(f^*-G_n)\|_{L^q(D)}=O\left\{n^{2m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+2h}\varepsilon(n)\right.$$

$$\left.+\int_n^\infty t^{2h-1}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt\right\}=O\left\{n^{2m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+2h}\varepsilon(n)\right\}.$$

一个有用的结果是

定理8.** 若$D\in X_m^l$，$f\in C^{[l]}(D)l\geq k$，则

$$\|\partial^k(f-G_n)\|_{L^q(D)}=O\left\{n^{\sigma}\omega\left(\frac{1}{n},f,C^{[l]}(D)\right)\right\},$$

这里$\sigma=2m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+2k-l$，$G_n=M(f,\|(P_n)^m\|_{L^p(D)}),1\leq p\leq q$.

(对$l=0$时，还应设$D\in X_m^1$)．□

这是由于有了定理6．这时有共同的$P_n\in(P_n)_m$使得

$$\|f-P_n\|_{L^p(D)}=O\{\|f-P_n\|_{C(D)}\}$$

$$=O\left\{\frac{1}{n^l}\omega\left(\frac{1}{n},f,C^{[l]}(D)\right)\right\},$$

$$\|\partial^k(f-P_n)\|_{L^q(D)}=O\{\|f-P_n\|_{C^{[l]}(D)}\}$$

$$=O\left\{\frac{1}{n^{l-k}}\omega\left(\frac{1}{n},f,C^{[l]}(D)\right)\right\}.$$

而对任何的$Q\in(P_n)_m$ 又有

$$\|\partial^k Q_n\|_{L^q(D)}\leq cn^{2m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+2k}\|Q_n\|_{L^p(D)},$$

C和n，Q_n无关．

2.3．高维的直交多项式一般是很难讨论的，不同的构造方法就会导致不同的理论．下面我们讨论一种构造直交多项式的方法．

设$D\subset R^m$为有界可测．让多项式序列$\{x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_m^{l_m}\}$按$l_1+\cdots+l_m$的大小排列，对相同的和数，多项式排列的次序可以任意．对这样排定的序列$L^2(D)$的内积正规直交化得一直交多项式序列$\{U_n(X)\}$．这时

$$\int\cdots\int_D U_s\cdot U_l dV=\delta_{s,l}=\begin{cases}1, & s=l;\\ 0, & s\neq l.\end{cases}$$

这时对$f\in L(D)$有对应的Fourier展式

$$f\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)U_n,\quad a_n(f)=\int\cdots\int_D f\cdot U_n dV.$$

记其部分和为

$$U_n(f)=U_n(X,f)=\sum_{d(U_i)<n} a_i(f)U_i.$$

在这里，对任何多项式 Q，其中项的指数和的最大数记为 $d(Q)$。

记所有满足不等式$d(a)\leqslant n$的 m 维多项式族为 $(\dot{P}_n)_m$，显然 $(\dot{P}_n)_m\subset(P_n)_m$，$(P_n)_m\subset(\dot{P}_{mn})_m$。

若$f\in L^2(D)$，显然$U_n(f)=M(f,\ \|(\dot{P}_n)_m\|_{L^2(D)})$。因而 $U_n(f)$ 是对f的多项式逼近的一种实现，但往往我们要估计 $U_n(f)$对f的误差，特别是在$C(D)$中的误差，这时定理8、定理8*和定理8**正好解决我们的问题。下面叙述这些定理在这特定情况下的形式：

定理8#. 若W^* 型集合 $D\in S_m$，$q\geqslant 2$，$f\in L^q(D)$，并有$P_n\in(P_n)_m$使得$\|f-p_n\|_{L^q(D)}\leqslant\varepsilon(n)$，则必

$$\|f-U_n(f)\|_{L^q(D)}=O\ \{n^{2m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\varepsilon(n)\}.$$

若更有$\varepsilon(t)\searrow 0$，$\int^\infty t^{2k-1}\varepsilon\left(\dfrac{t}{u}\right)dt<\infty$，$q>2$，则存在和$f$几乎处处相等的$f^*$，$\partial^k f^*\in L^q(D)$，并且

$$\|\partial^k(f^*-U_n(f))\|_{L^q(D)}=O\{n^{2m\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)+2k}\varepsilon(n)\}.$$

若$D\in X_m^l$，$f\in C^{[l]}(D)$，$l\geqslant k$，则

$$\|\partial^k(f-U_n(f)\|_{L^q(D)}=O\{n^\sigma\omega\left(\frac{1}{n},\ f,\ C^{[l]}(D)\right)\},$$

这里$\sigma=2m\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{q}\right)+2k-l, q\geqslant 2$。(对$l=0$，还应设$D\in X_m^1$)。□

特别可以知道，若$D\in X_m^m$，$f\in C^{[m]}(D)$，则f的直交多项式级数在D上一致收敛于f，而且收敛的级是$\omega(\dfrac{1}{n},\ f,\ C^{[m]}(D))$。因此也可以看到，为了保证收敛性，维数越高，则一般说来对函数的连续性的要求也越高。

注意，在定理8#中，$U_n(f)$并不是 $M(f,\ \|(P_n)_m\|_{L^2(D)})$，而是$M(f,\ \|(\dot{P}_n)_m\|_{L^2(D)})$。但由于 $(P_n)_m$

族和 $(\dot{P}_n)_m$的关系，故不妨碍定理8—定理8*的引用，因为只要调整估计式的常数系数即可，而我们的估计式又是以渐近的形式出现的。

到这里我们顺便讨论一下直交级数$\sum C_nU_n$的一些性质。

引理A. 记 $r_n^2=\sum\limits_n^{\infty}C_k^2$，则当

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_{n_k}^2\lg k}{k}<\infty$$

时，必致$\sum\limits_{n=0}^{n_k}C_nW_n$在（可测集）$D$上几乎处处收敛；$\{W_n\}$为$D$上的正规直交系。□

对于一维的区间，这一论断正是古典已知的结果（参看[5]中第五章），用相同的证法可以证明这论断对m维可测集也成立。

若$f\in L^2(D)$，$f\sim\sum a_n(f)U_n$，相应地可以造一新的直交多项式系如下

$$W_n=W_n(f)=W_n(X,\ f)$$

$$=\frac{1}{C_n(f)}\sum_{d(U_i)=n}a_i(f)U_i(X),$$

$$C_n=C_n(f)=\Big(\sum_{d(U_i)=n}a_i(f)^2\Big)^{\frac{1}{2}}=(f,\ W_n(f))$$

但若$C_n(f)=0$，则定义$W_n(f)\equiv 0$。这时有下面展式

$$f\sim\sum_{n=0}^{\infty}C_n(f)W_n(f)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{d(U_i)=n}a_i(f)U_i,$$

$$U_n(f)=\sum_{k=0}^{n}C_k(f)W_k(f).$$

若有 $p_n\in(\dot{P}_n)_m$，$\|f-p_n\|_{L^2(D)}\leqslant\varepsilon(n)$，必有$r_{n+1}\leqslant\varepsilon(n)$，因而有

引理A*. 若$h(t)\nearrow+\infty$，$\varepsilon(t)\searrow 0$，并且

$$\int^{\infty}\varepsilon^2(h(t))\lg t\frac{dt}{t}<\infty,$$

则必$U_{[h(n)]}(X,\ f)$在D上几乎处处收敛于 f，$[h(n)]$为$h(n)$ 的整

数部分·□

定理9. 设$D\in X_m^1$，$f\in C(\overline{D})$，则当$h(t)\nearrow+\infty$，

$$\int^{\infty}\omega^2[h(t)^{-1}]\frac{\lg t}{t}dt<\infty$$

时，$U_{[h(n)]}(X,f)$在D上几乎处处收敛于$f(X)$。这里$\omega(\delta)$为f在D上之连续模$\omega(\delta,f,C(\overline{D}))$。□

特别当$\omega(\delta)=0(|\lg|^{-\sigma})$，$\sigma>1$，时，$f$之直交多项式级数在$D$上几乎处处收敛。

引理B. 若有上升的数序列$\{K(n)\}$，满足

1° $0<K(n)\leqslant K(n+1)\to+\infty$；

2° $\sum|C_n|^2K(n)(\lg n)^2<\infty$；

3° 存在正整数序列$\{n_k\}$使得

$$\sum\frac{1}{K(n_k)}<\infty,\ \lg n_{k+1}<\lambda\lg n_k$$

这里λ为某一正的常数。这时级数ΣC_nW_n在D上按任何排列次序几乎处处收敛。□

这命题的证明与对一维区间的情况的证明相同(参看[5])。

若选$n_k=[\exp(2^k)+1]$，$K(x)=(\lg x)^{\varepsilon}$，$\varepsilon>0$，$\lambda=5$，则引理B的条件显然得到满足。用$\{r_n\}$来表示$C_n:C_n^2=r_n^2-r_{n+1}^2$，则可得一便于应用的形式：

引理B*. 若对$f\in L^2(D)$，有$p_n\in(P_n)_m$使得

$$\|f-p_n\|_{L^2(D)}=0(\varepsilon(n))$$

$\varepsilon(t)\searrow0$，

$$\int^{\infty}\varepsilon(t)^2(\lg t)^{1+\varepsilon}\frac{dt}{t}<\infty,$$

$\varepsilon>0$是任给定的。则必$\Sigma C_n(f)W_n(f)$按任何排列次序在D上几乎处处收敛。□

因此由直接定理（定理6)即得到

定理10. 设$D\in X_m^1$，$f\in C(\overline{D})$，

$$\int^{\infty}\omega^2\left(\frac{1}{t}\right)(\lg t)^{1+\varepsilon}\frac{dt}{t}<\infty,\ \varepsilon>0,$$

这里$\omega(\delta)=\omega(\delta,\ f, C(\overline{D}))$ 则$\Sigma C_n(f)W_n(f)$在D上按任何排列次序几乎处处收敛。□

特别当$\omega(\delta)=0(|\lg\delta|^{-\sigma})$，$\sigma>1$，时，$f$之直交级数$\Sigma C_n(f)\cdot W_n(f)$不只几乎处处收敛，而且按任何排列次序几乎处处收敛。

引理C. 设$\sum_{n=2}^{\infty}C_n^2(\lg\lg n)^2<\infty$，则

$\Sigma C_n W_n$在D上几乎处处可求和$(C,\ \sigma)$，$\sigma>0$。□

证明和对一维区间情况的相同（参看[5]）。

这引理的一个变形就是

引理C*. 设$f\in L^2(D)$，有$p_n\in(P_n)_m$使得

$$\|f-p_n\|_{L^2(D)}=O(\varepsilon(n)),\quad \varepsilon(t)\searrow 0,$$

$$\int^{\infty}\varepsilon^2(t)\frac{\lg\lg t}{t\lg t}dt<\infty,$$

则必$\Sigma C_n(f)W_n(f)$在D上几乎处处可求和，$(C,\ \sigma)$，$\sigma>0$。□

因此由定理6即得

定理11. 设$D\in X_m^1$，$f\in C(\overline{D})$，

$$\int^{\infty}\omega^2\left(\frac{1}{t}\right)\frac{\lg\lg t}{t\lg t}dt<\infty,$$

这里$\omega(\delta)=\omega(\delta,\ f,\ C(\overline{D}))$，则$\Sigma C_n(f)W_n(f)$在$D$上几乎处处可求和，$(C,\ \sigma)$，$\sigma>0$。□

特别当$\omega(\delta)=0\left(\left|\lg\lg\frac{1}{\delta}\right|^{-\theta}\right)$，$\theta>1$时，$\Sigma C_n(f)W_n(f)$几乎处处可求和，$(C,\ \sigma)$，$\sigma>0$。

引理D. 对于$f(X)\in L^2(D)$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|C_{n_k}(f)|\leqslant\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}r_{n_k}(f),$$

$$r_l(f)=\|f-U_{l-1}(X,\ f)\|_{L^2(D)},$$

因而若有 $p_n\in(P_n)_m$ 使得 $\|f-p_n\|_{L^2(D)}=O(\varepsilon(n))$，$\varepsilon(t)\searrow 0$，$h(t)\nearrow\infty$，

$$\int^{\infty}\varepsilon(h(t))t^{-\frac{1}{2}}dt<\infty,$$

则必$\sum C_{[h(n)]}(f)$绝对收敛，因而

$$\sum C_{[h(n)]}W_{[h(n)]}$$

在D上几乎处处绝对收敛．□

对于区间$[a, b]$，这结论的前一节是属于Стечкин[6]的，对一般的D，证明相同。

由定理6即得

定理12．设$D\in X_m^1$，$f\in C(\overline{D})$，$h(t)\nearrow\infty$，

$$\int^{\infty}\omega\left(\frac{1}{h(t)}\right)\frac{dt}{t^{1/2}}<\infty,$$

$\omega(\delta)=\omega(\delta, f, C(\overline{D}))$，则$\sum|C_{[h(n)]}(f)|<\infty$；

$\sum|C_{[h(n)]}(f)W_{[h(n)]}(f)|<\infty$几乎处处成立．□

特别若$\omega(\delta)=0(\delta^{\sigma})\sigma>\frac{1}{2}$，则$\sum C_n(f)$绝对收敛。

至于在什么点上$\sum C_n(f)W_n(X, f)$绝对收敛．这可由下面的结论解答。

设 $\sum r_n(f)n^{-\frac{1}{2}}<\infty$，$\sum\limits_{i=0}^{n}|W_i(X_0, f)|=0(n)$，则$\sum|C_n(f)W_n(X_0, f)|<\infty$。

因而，若有$p_n\in(P_n)_m$，$\|f-p_n\|_{L^2(D)}=O(\varepsilon(n))$，$\varepsilon(t)\searrow 0$，

$$\int^{\infty}\varepsilon(t)\frac{dt}{t^{1/2}}<\infty,$$

$\sum\limits_{i=0}^{n}|W_i(X_0, f)|=O(n)$，则$\sum|C_n(f)W_n(X_0, f)|<\infty$。

这些命题的证明和[6]中对一维情况的证明相似。

所以，若$D\in X_m^1$，$f\in C(\overline{D})$，

$$\int^{\infty}\omega\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^{1/2}}<\infty,$$

$\omega(\delta)=\omega(\delta, f, C(\overline{D}))$，$\sum\limits_{i=0}^{n}|W_i(X_0, f)|=O(n)$，

则$\sum|C_n(f)W_n(X_0,f)|<\infty$。

至于$\sum a_n(f)U_n$(或者 $\sum C_n(f)W_n(f)$)在其他意义下对f的逼近误差，这完全可用§1 中相应的结论来估计（利用第一、第二转化引理）。

2.4. 现在我们再举几个用转化引理来讨论最优逼近的例子。

利用定理4（并采用它的符号的定义）就得

例1. 设D为R^m中的W型集，并且$D\in S_m$。设$f\in C^{[h]}(\overline{D_d})$，并有$p_n\in(P_n)_m$使得

$$\|f-p_n\|_{W_\infty^{(h)}(D_d)}=O\{\varepsilon(n)\},$$

(关于符号$W_q^{(h)}(D)$参看[7]，$\|\cdot\|_{W_\infty^{(h)}(D)}$和$\|\cdot\|_{C^{[h]}(D)}$是等价的)，则必

$$\|f-M_n\|_{W_\infty^{(h)}(D_d)}=O\{n^{2(h+\frac{m}{p})}R(d)^{mn}\varepsilon(n)\}$$

这里$M_n=M(f)$，$\|(P_n)_m\|_{L^p(D)}$，$p>0$。

这是因为这时

$$\|f-p_n\|_{L^p(D)}=O\{\varepsilon(n)\},$$

而且存在不等式

$$\|Q\|_{W_\infty^{(h)}(D_d)}\leqslant Cn^{2(h+\frac{m}{p})}R(d)^{mn}\|Q\|_{L^p}(D),$$

这里C和$Q\in(P_n)_m$无关（参看定理4）。再利用第二转化引理就得到我们的结论。

为了以后的应用，这里我们顺便讨论一下 Fourier 级数的一些性质。它的部分和是一种特殊的最优逼近三角多项式。

设 $f(x)\in L(0,2\pi)$，$f(x+2\pi)=f(x)$，

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx,$$

$$S_n(x,f)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx.$$

若$f(x)\in L^2(0,2\pi)$，则$S_n(x,f)=M(f,\|(T_n\|_{L^2(0;2\pi)})$，$(T_n)$

为所有次数不超过n的三角多项式。因而讨论$S_n(x, f)$对$f(x)$在各种意义下的偏离时可用第二转化引理，但是用第三转化引理（第一章§3 之引理1和引理 1*）得到的估计会更好些。这时我们把$S_n(x, f)$看成f的一种运算。

引理。对$0<p<1$，有

$$\|S_n(x, f)\|_{L^p(0,2\pi)} \leqslant 3^{\frac{1}{p}}\left(2B_p + \frac{1}{2\pi}\right)\|f\|_{L^p(0,2\pi)};$$

对$1<p<\infty$，有

$$\|S_n(x,f)\|_{L^p(0,2\pi)} \leqslant (2A_p + (2\pi)^{-\frac{1}{p}})\|f\|_{L^p(0,2\pi)};$$

对$p=1$，∞，有

$$\|S_n(x,f)\|_{L^p(0,2\pi)} \leqslant (2+\log n)\|f\|_{L^p(0,2\pi)}.$$

这里 A_p，B_p 相应是M.Riesz 常数和 Колмогоров 常数（参看[8]第七章7.21节和7.24节）。

证明。因为

$$S_n(x,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin nt}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nt\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin n(t+x)\cos nx - \cos n(t$$

$$+x)\sin nx]\frac{f(x+t)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nt\,dt$$

$$= -\frac{\sin nx}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)\cos n(x+t)$$

$$-f(x)\cos nx]\frac{dt}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}$$

$$+\frac{\cos nx}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)\sin n(x+t)$$

$$-f(x)\sin nx]\frac{dt}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nt\,dt$$

$$=(\sin nx)f_1(x)-(\cos nx)f_2(x)+f_3(x).$$

这里f_1, f_2分别是$f\cos nx$, $f\sin nx$的共轭函数。由Колмогоров不等式和M.Riesz不等式（参看[8]）即得引理的第一、第二不等式。

另一方面由

$$S_n(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x+2t)+f(x-2t))\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right|dt<\frac{2+\lg n}{2}.$$

利用（一般的）Minkowski 不等式即得引理的第三不等式。

根据这一引理，由第三转化引理即得

例2. 设 $f(x)\in L^p(0,2\pi)$，$1<p<\infty$，并有 $T_n\in(T_n)$ 使得 $\|f-T_n\|_{L^p(0,2\pi)}\leqslant\varepsilon(n)$，则必

$$\|f-S_n(x,f)\|_{L^p(0,2\pi)}\leqslant(2A_p+(2\pi)^{-\frac{1}{p}}+1)\varepsilon(n).$$

设 $f(x)\in L^p(0,2\pi)$，并有$T_n\in(T_n)$使得

$$\|f-T_n\|_{L^p(0,2\pi)}\leqslant\varepsilon_p^*(n),$$

则对 $p=1$，∞，有

$$\|f-S_n(x,f)\|_{L^p(0,2\pi)}\leqslant(3+\log n)\varepsilon_p^*(n),$$

对$p=1$，$0<q<1$，有

$$\|f-S_n(x,f)\|_{L^q(0,2\pi)}\leqslant C_q\varepsilon_1^*(n),$$

这里$C_q=4(2\pi)^{\frac{1}{p}-1}+3^{\frac{1}{q}}\left(4B_q+\frac{1}{\pi}\right)$.

利用第一，第二转化引理可得：

设$f(x)\in L^q(0,2\pi)$，有$T_n\in(T_n)$使得

$$\|f-T_n\|_{L^q(0;2\pi)}\leqslant\varepsilon^{**}(n),\quad 0<q<1,\quad \varepsilon^{**}(t)\searrow 0,$$

$$D(C)=\frac{8}{\lg u}\int_c^\infty t^{\frac{1}{\lambda}-\frac{3}{2}}\varepsilon^{**}\left(\frac{t}{u}\right)dt<\infty,$$

则必

$$\|f-S_n(x,f)\|_{L^q(0,2\pi)}\leqslant\varepsilon^*(n)+3^{\frac{1}{q}}\left(4B_q+\frac{1}{\pi}\right)D(n).$$

因为由 Бернштейн 不等式可证

$$\|T_n^*(x)\|_{L^s(0,2\pi)}\leqslant 2n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}\|T_n^*(x)\|_{L^r(0,2\pi)},$$

$$T_n^*\in(T_n),\quad 0<r\leqslant S\leqslant\infty.$$

（参看定理3的证法）。所以对相同的T_n有

$$\|f-T_n\|_{L^1(0,2\pi)}\leqslant D(n)$$

（根据第一转化引理I），再由第二转化引理即得

$\|f-S_n(x,f)\|_{L^q(0,2\pi)}$之估计。

§3. 反定理(嵌入定理)多变量函数的逼近(续)

3.1. 现在我们来讨论一下反定理和多变数函数构造的一些问题。我们仍仅限于实变函数的问题。关于一般调和逼近和复函数构造的相应问题，我们放到以后的章节去讨论。

从已知的许多（关于多项式的）不等式，由第一转化引理，许多反定理就几乎成了明显的事实。

我们求取反定理（或嵌入定理）的基本思想就是，对于给定的参数δ，把某种意义下元素f的"连续模" $\omega(\delta,f)$ 看成是一种一般意义下的$G^+_{q,i}$范数。于是由$\|f-p_n\|\leqslant\varepsilon(n)$，利用不等式和转化定理就可以求 $\omega(\delta,f-p_n)$ 的估计，因而也就可求出 $\omega(\delta,f)$ 的估计.

为了叙述方便，我们只求出渐近估计式.

定义. 设D为R^m中的可测集，$f(X)\in W_p^{(l)}(D)$(参看[7])，定义$W_p^{(l)}(D)$中的连续模为

$$\omega_k(\delta,f,W_p^{(l)}(D))=\sup_{\substack{D'\subset D\\ X+ih\in D}}$$

$$\sup_{|h|\leqslant\delta}\left\|\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(X+ih)\right\|_{W_p^{(l)}(D')},$$

这里D'是D中所有可能的可测子集：$X\in D'$导致 $X+ih\in D$，$i=0,\cdots,k$，$|h|\leqslant\delta$. h为R^m中之任何向量，$|h|$为h之长度。自然，有时D'是不存在的（有时对充分大的δ，$|h|$充分大时，D'可能不存在，而对充分小的δ才存在），那时$\omega_k(\delta,f,W_p^{(l)}(D))$就不作定义。当$k=1$时，往往省掉下标"$k$"。□

若$D\subset R^m$为（一闭）区域，$f\in C^{[l]}(\bar{D})$，则显然 $\omega(\delta,f,W_\infty^{(l)}(D))$和$\omega(\delta,f,C^{[l]}(\bar{D}))$同级。所以，在这种情况下，往往我们也用$\omega(\delta,f,W_\infty^{(l)}(D))$作为$\omega(\delta,f,C^{[l]}(D))$或$\omega(\delta,f,C^{[l]}(\bar{D}))$的定义。

显然，上面所引的连续模有下面性质：

A) $\omega_k(\delta,f,W_p^{(l)}(D))$对$\delta\in[0,\delta_0)$为非降的，当$1\leqslant p\leqslant\infty$，对确定的参数$\delta$，它是$f$的一种$P(1)$型的范数。一般设，若

$$\|\cdot\|_{W_p^{(l)}(D)}\in P(a_p),$$

则 $$\omega_k(\delta,f,W_p^{(l)}(D))\in P(c_p);$$

B) 对$1\leqslant p\leqslant\infty$，有

$$\omega_k(\delta,f,W_p^{(l)}(D))\leqslant\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\right)\|f\|_{W_p^{(l)}(D)};$$

C) 对$1\leqslant p\leqslant\infty$，$f\in W_p^{(k+l)}(D)$，$D$为区域，则

$$\omega_k(\delta,f,W_p^{(l)}(D))\leqslant\text{cosst.}\ \delta^k\max\|D^{(k)}f\|_{W_p^{(l)}(D)}$$

$$\leqslant\text{con st.}\ \delta^k\|f\|_{W_p^{(k+l)}(D)},$$

这里max是对所有k阶（广义）偏导数$D^{(k)}f$取的.

性质C）之根据是：对$f\in C^{[k+l]}(D),X\in D'$，有

$$\left|\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(X+ih)\right|$$

$$\leqslant\left|\int_0^{|h|}\cdots\int_0^{|h|}\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}f\left(X+\vec{e}\sum_{i=1}^{k}s_i\right)ds_1\cdots ds_k\right|.$$

利用广义 Minkowski 不等式就可证C)对$f\in C^{[k+l]}(D)$成立。再由$C^{[k+l]}(D)$过渡到$W_p^{(k+l)}(D)$即可。这里$\vec{e}$为h之单位向量，$\frac{\partial}{\partial\rho}$是沿$\vec{e}$方向的导数。

根据这三个性质就可以从各种各样的多项式不等式（导出对应的转化定理后）中，利用第一章§1中的引理5、引理6导出各种各样的反定理。几乎对每一个不等式都可列出相应的反定理，这些不等式散见在近代许多文献上（第一章中列出了一部分文献），本章也有不少不等式，我们不打算列出所有能得到的反定理，而只选几个作为例子，其余的读者可根据第一章的原则自己列出来，而且“连续模”的概念还是可作更多的具体的发展的。

例如由定理 5 即得

定理5' 在定理5的条件下有

$$\omega_\sigma(\delta,\partial^k f^*,L^q(D))=O\Big\{\delta^\sigma\int_{n_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}t^{\theta+2\sigma}\varepsilon\Big(\frac{t}{u}\Big)dt$$

$$+\int_{\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}^{\infty}t^{\theta}\varepsilon\Big(\frac{t}{u}\Big)dt\Big\},$$

这里$\theta=2m\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)+2k-1$。$\lambda\Big(\frac{1}{\delta}\Big)$是$\frac{1}{\delta}$任给定的函数，$n_0$为某（正整数）常数（以后我们将沿用这两符号）。

当$k=0$，$p=q$时，还可改进为

$$\omega_\sigma(\delta,f,L^p(D))O=\Big\{\delta^\sigma\int_{n_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}t^{2\sigma-1}\varepsilon\Big(\frac{t}{u}\Big)dt$$

$$+\varepsilon\Big(\lambda\Big(\frac{1}{\delta}\Big)\Big)\Big\}.\ \square$$

这主要是用到不等式：对$Q\in(P_n)_m$有

$$\omega_\sigma(\delta,\partial^k Q,L^q(D))\leqslant\text{const.}\ \delta^k n^{\theta+2\sigma+1}\|Q\|_{L^p(D)}.$$

我们也可以看到，为了能引用第一章反定理的一般形式，性质C）只要对$(P_n)_m$成立即可。

现在我们再介绍另一类型的反定理。

定义 设D为R^m中的可测集，$f(X)\in W_p^{(l)}(D)$，定义f在$W_p^{(l)}(D)$中的"可积度"为

$$\Omega(\delta,f,W_p^{(l)}(D))=\sup_{\substack{D'\subset D\\ \text{mes}\,D'\leqslant\delta}}\|f\|_{W_p^{(l)}(D')},$$

这里D'为D的所有可能之可测子集，但 $\text{mes}D'\leqslant\delta$. □

自然，$\Omega(\delta,f,W_p^{(l)}(D))$也可以看成一种"连续模"，它显然有下面性质：

A*）$\Omega(\delta,f,W_p^{(l)}(D))$对$\delta\in[0,\delta_0)$为非降. 当 $\|\cdot\|_{W_p^{(l)}(D)}\in P(a_p)$时，对于确定的参数$\delta$，$\Omega(\delta,f,W_p^{(l)}(D))$ 是f的一种 $P(a_p)$型的范数；

B*）$\Omega(\delta,f,W_p^{(l)}(D))\leqslant\|f\|_{W_p^{(l)}(D)}$；

C*）对$f\in W_q^{(l)}(D)$，$q\geqslant p$，有

$$\Omega(\delta,f,W_p^{(l)}(D))\leqslant\text{const.}\ \delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{W_q^{(l)}(D)}.$$

性质C*）是根据 Hölder 不等式导出的.

由性质 A*)—C*) 根据文献上刊载的有关不等式和本章的不等式就可列出一系列反定理. 这里我们也只列出一个例子，其余的读者可根据第一转化引理列出来.

由定理 5 可得

定理5** 在定理5的条件下有

$$\Omega(\delta,\partial^k f^*,L^q(D))=O\Big\{\delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}}\int_{\pi_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}t^{\theta_1-1}\,\varepsilon\Big(\frac{t}{u}\Big)dt$$

$$+\int_{\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}^{\infty}t^{\theta_2-1}\,\varepsilon\Big(\frac{t}{u}\Big)dt\Big\},$$

这里$q'\geqslant q$是任给的（可为∞），$\theta_1=2m\Big(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\Big)+2k$,

$$\theta_2=2m\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)+2k.$$

当$k=0$，$p=q$时，可改进为

$$\Omega(\delta,f,L^q(D))=O\Big\{\delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}}\int_{\pi_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}t^{2m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q'}\right)-1}\varepsilon\Big(\frac{t}{u}\Big)dt$$

$$+\varepsilon\left(\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)\Big\}.\ \square$$

这里主要是用到不等式：对$Q\in(P_n)_m$有

$$\Omega(\delta,\partial^k Q,L^q(D))\leqslant\text{const.}\ \delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}}n^{\theta_i}\|Q\|_{L^p(D)}.$$

3.2. 下面我们从另外一种角度来讨论多变量函数的逼近问题。这里我们只考虑(对每个变量都以2π为)周期函数的情况。

仍用$X=(x_1,\cdots,x_m)=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e}_i$来记$R^m$中的点，$\vec{e}_i$为第$i$个坐标的单位向量。

定义. $f\in L^{\vec{p}}$，$\vec{p}=(p_1,\cdots,p_m)$，是指

$$\|f\|_{L^{\vec{p}}}=\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f|^{p_1}dx_1\right\}^{\frac{p_2}{p_1}}\cdots dx_m\right\}^{\frac{1}{p_m}}<\infty,$$

这里要求f在R^m中可测，$p_i>0$，$i=1$，$\cdots$，m。

同时定义

$$\omega_k^*(\delta\vec{e}_i,f,L^{\vec{p}})=\sup_{|h|<\delta}\left\|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f(X+jh\vec{e}_i\right\|_{L^{\vec{p}}},$$

这里h为实数。

记$(T_{\vec{n}})$是m元的三角多项式族，它对于变量x_i的三角多项式对应的次数不大于n_i，这里$\vec{n}=(n_1,\ \cdots,\ n_m)$。□

这时下面的一般的直接定理是成立的：

引理1 对$f\in L^{\vec{p}}$，存在和$\vec{p}$无关的$T_{\vec{n}}\in(T_{\vec{n}})$使得

$$\|f-T_{\vec{n}}\|_{L^{\vec{p}}}\leqslant c\sum_{i=1}^{m}\omega_{k\,i}^*\left(\frac{\vec{e}_i}{n_i},f,L^{\vec{p}}\right),$$

这里$p_i\geqslant1$，$i=1,\cdots m$；c和n_i，f无关。□

当$m=2$，$p_i=\infty$，$i=1$，2，时，这是бернштейн证明的(参看[9])，他的证法可用来证明这里的一般的结论，只要充分地利

用一般的Minkowski不等式即可（注意，对范数$\|\cdot\|_{L^{\vec{p}}}$，$p_i\geqslant 1$，一般的Minkowski不等式是成立的）。

引理2 若$T_{\vec{n}}\in(T_{\vec{n}})$，则

$$\left\|\frac{\partial T_{\vec{n}}}{\partial x_j}\right\|_{L^{\vec{p}}}\leqslant n_j\left\|T_{\vec{n}}\right\|_{L^{\vec{p}}},$$

$$\left\|T_{\vec{n}}\right\|_{L^{\vec{q}}}\leqslant 2^m\left(\prod_{i=1}^{m}n_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}}\right)\left\|T_{\vec{n}}\right\|_{L^{\vec{p}}},$$

这里$1\leqslant p_i\leqslant q_i\leqslant\infty$，$i=1$，…，$m$。□

这定理的特例是已证的（参看[3]），相似地可推广到这里一般的情况。

为了叙述方便，下面我们用的偏导数都是соболев意义下的广义偏导数。这时我们有

引理3 设f，$f_n\in L^{\vec{p}}$，g，$\dfrac{\partial^k f_n}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_m^{k_m}}\in L^{\vec{q}}$，$1\leqslant p_i,q_i\leqslant\infty$，$i=1$，…，$m$，并且

$$\|f-f_n\|_{L^{\vec{p}}}\to 0,\left\|g-\frac{\partial^k f_n}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_m^{k_m}}\right\|_{L^{\vec{q}}}\to 0,$$

则g和f之广义偏导数$\partial^k f/\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_m^{k_m}$（几乎处处）相等。□

这由广义导数的性质可直接导出（注意，соьодев空间的完全性）。

注意到连续模$\omega_\sigma^*(\cdots)$具有性质

$$\omega_{k+j}^*(\delta\vec{e}_i,g,L^{\vec{p}})\leqslant\delta^j\omega_k^*\left(\delta\vec{e}_i,\frac{\partial^j g}{\partial x_i^j},L^{\vec{p}}\right),$$

p_1，…$p_m\geqslant 1$，则由引理2、引理3利用第一转化引理即可导出相应的转化定理和反定理。

设$g_i(t)$，$t>0$，为任给定的非降的，在整数点上取正整数值，$\overrightarrow{g(t)}=(g_1(t),\cdots,g_m(t))$。

所得的转化定理和反定理就是

定理13 设 $f\in L^{\vec{p}}$，$p_i\geqslant 1$，$i=1\cdots,m$,并有$T_{\vec{n}}\in(T_{\vec{n}})$ 使得

$$\|f-T_{\vec{n}}\|_{L^{\vec{p}}}\leqslant E\left(\sum_{i=1}^{m}n_i\vec{e}_i\right)=E(\vec{n}),$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{m}g_i(t)\vec{e}_i\right)=\varphi(t)\searrow 0,$$

$$\int^{\infty}B(t)\frac{dt}{t}<\infty,\quad B(t)=\varphi\left(\frac{t}{u}\right)\prod_{i=1}^{m}g_i(t)^{j_i+\left(\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}\right)},$$

这里$j_i\geqslant 0$，$j=j_1+\cdots+j_m$，$q_i\geqslant p_i$。则必

$\partial^j f/\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_m^{j_m}\in L^{\vec{q}}$，并且

$$\left\|\frac{\partial^j(f-T_{\overrightarrow{g(n)}})}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_m^{j_m}}\right\|_{L^{\vec{q}}}=O\left\{\int_n^{\infty}B(t)\frac{dt}{t}\right\}$$

$$\omega_h^*\left(\delta\vec{e}_i,\ \frac{\partial^j f}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_m^{j_m}},\ L^{\vec{q}}\right)$$

$$=O\left\{\delta^h\int_{n_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}B(t)g_i(t)^h\frac{dt}{t}+\int_{\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}^{\infty}B(t)\frac{dt}{t}\right\},$$

而当$j=0$，$p_i=q_i$，$i=1$，$\cdots$，m，时,后一式可改为

$$\omega_h^*(\delta\vec{e}_i,f,L^{\vec{p}})=O\left\{\delta^h\int_{n_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}B(t)g_i(t)^h\frac{dt}{t}+\right.$$

$$\left.+E\left(\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)\sum_{i=1}^{m}\vec{e}_i\right)\right\}.\ \square$$

实际上，$\partial^j T_{\overrightarrow{g(n)}}/\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_m^{j_m}$对范数$\|\cdot\|_{L^{\vec{q}}}$，当$n\to\infty$时，为一Cauchy序列(根据第一转化引理的估计)，而空间$L^{\vec{q}}$(易证)是完全的。因此，其极限函数 $g\in L^{\vec{q}}$就正是$\partial^j f/\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_m^{j_m}$(根据引理3)。而定理的估计式是直接由转化引理导出来的（反定理的推导方式和定理5*，定理5**的相同）。

利用上面的引理和第二转化引理可得到许多最优逼近多项式误差估计的结果。

例3 设 $q_i \geqslant p_i \geqslant 1$, $i=1, \cdots, m$, $f \in L^{\vec{q}}$, 则

$$\|f - M_{\vec{n}}\|_{L^{\vec{p}}} = O\left\{\left(\prod_{i=1}^{m} n_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_{\sigma_i}^{*}\left(\frac{\vec{e}_i}{n_i}, f, L^{\vec{p}}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m} \omega_{k_i}^{*}\left(\frac{\vec{e}_i}{n_i}, f, L^{\vec{q}}\right)\right\},$$

$$= O\left\{\left(\prod_{i=1}^{m} n_i^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{q_i}}\right)\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_{\sigma_i}^{*}\left(\frac{\vec{e}_i}{n_i}, f, L^{\vec{p}}\right)\right)\right\}.$$

这里 $M_{\vec{n}} = M(f, \|(T_{\vec{n}})\|_{L^{\vec{p}}})$.

由转化定理就可估计在其他意义下 $f - M_{\vec{n}}$ 的误差. 实际上, 利用上面的引理和第一、第二转化引理可以估计 $\|\partial^{k_1}(f - G_{\vec{n}})\|_{L^{\vec{q}}}$ $G_{\vec{n}} = M(f, \|(T_{\vec{n}})\|^{*})$, $\|g\|^{*} = \|\partial^{k_2} g\|_{L^{\vec{p}}}$, 这里 ∂^{k_1}, ∂^{k_2} 分别为 k_1, k_2 阶偏导数 (一般不相同).

利用引理 1 和定理13即可得下面的嵌入定理.

定理14 设 $q_i \geqslant p_i \geqslant 1$, $i=1, \cdots, m$, $\dfrac{\partial^{k_i} f}{\partial x_i^{k_i}} \in L^{\vec{p}}$,

$$\int^{\infty} \sum_{\sigma=1}^{m} B_{\sigma}(t) \frac{dt}{t} < \infty,$$

$$B_{\sigma}(t) = g^{-k_{\sigma}}(t) \omega_{\eta_{\sigma}}^{*}\left(\frac{\vec{e}_{\sigma}}{g_{\sigma}(t)}, \frac{\partial^{k_{\sigma}} f}{\partial x_{\sigma}^{k_{\sigma}}}, L^{\vec{p}}\right)$$

$$\times \prod_{r=1}^{m} g_r(t)^{j_r + \left(\frac{1}{p_r} - \frac{1}{q_r}\right)},$$

则 $\partial^{j} f / \partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_m^{j_m} \in L^{\vec{q}}$, 并且

$$\omega_{k}^{*}\left(\delta \vec{e}_i, \frac{\partial^{j} f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_m^{j_m}}, L^{\vec{q}}\right)$$

$$=O\left\{\delta^{h}\int_{n_{0}}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)} g_{i}^{h}(t)\sum_{\sigma=1}^{m} B_{\sigma}(t)\frac{dt}{t}+\int_{\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}^{\infty}\sum_{\sigma=1}^{m} B_{\sigma}(t)\frac{dt}{t}\right\}. \square$$

其实，这里的$\sum_{\sigma=1}^{m} B_{\sigma}(t)$相当于定理13中的$B(t)$，而

$$\varphi(t)=O\left\{\sum_{\sigma=1}^{m} g_{\sigma}^{-k_{\sigma}}(t)\omega_{\eta_{\sigma}}^{*}\left(\frac{\vec{e}_{\sigma}}{g_{\sigma}(t)}, \frac{\partial^{k_{\sigma}} f}{\partial x_{\sigma}^{k_{\sigma}}}, L^{\vec{p}}\right)\right\}.$$

定义 设$r_{\sigma}>0$，$r_{\sigma}=k_{\sigma}+\eta_{\sigma}$，这里$k_{\sigma}$为非负整数，$0<\eta_{\sigma}\leqslant 1$；设 $\partial^{k_{\sigma}} f/\partial x_{\sigma}^{k_{\sigma}}\in L^{\vec{p}}$ 并且

$$\left\{\int_{0}^{\infty}\left[\omega_{1+[\eta_{\sigma}]}^{*}\left(t\vec{e}_{\sigma}, \frac{\partial^{k_{\sigma}} f}{\partial x_{\sigma}^{k_{\sigma}}}, L^{\vec{p}}\right)\right]^{p'} t^{-p'\eta_{\sigma}-1} dt\right\}^{\frac{1}{p'}}<\infty,$$

$$\sigma=1, \cdots, m,$$

p'，p_{1}，…，$p_{m}\geqslant 1$。这时记$f\in H_{\vec{p}}^{\vec{r}}(p')$。□

利用定理14，令 $g_{\sigma}(t)=t^{\frac{1}{r_{\sigma}}}$，$\theta=1-\sum_{\sigma=1}^{m}\frac{1}{r_{\sigma}}\left(j_{\sigma}+\frac{1}{p_{\sigma}}-\frac{1}{q_{\sigma}}\right)$，则有

系1 设 $\partial^{k_{\sigma}} f/\partial x_{\sigma}^{k_{\sigma}}\in L^{\vec{p}}$，$\sigma=1, \cdots, m$，$p_{1}, \cdots, p_{m}\geqslant 1$。则有

$$\omega_{h}^{*}\left(\delta\vec{e}_{i}, \frac{\partial^{j+l} f}{\partial x_{i}^{l}\partial x_{1}^{j_{1}}\cdots\partial x_{m}^{j_{m}}}, L^{\vec{q}}\right)$$

$$=O\left\{\delta^{h}\int_{n_{0}}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)} t^{h/r_{i}} A(t)dt+\int_{\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}^{\infty} A(t)dt\right\}.$$

即只要右边积分存在并收敛，则左边就有意义并且估计式成立，这里

$$A(t)=t^{\frac{l}{r_{i}}-\theta}\sum_{\sigma=1}^{m} t^{-\frac{k_{\sigma}}{r_{\sigma}}}\omega_{\eta_{\sigma}}^{*}\left(t^{-\frac{1}{r_{\sigma}}}\vec{e}_{\sigma}, \frac{\partial^{k_{\sigma}} f}{\partial x_{\sigma}^{k_{\sigma}}}, L^{\vec{p}}\right),$$

$q_{\sigma}\geqslant p_{\sigma}$，$\sigma=1, \cdots, m$。□

在系1中令 $\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)=\delta^{-r_i}$，当$\theta>0$时，不难看出：若$f\in H^{\vec{r}}_{\vec{p}}(\infty)$，则必$\partial^j f/\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_m^{j_m}\in H^{\theta\vec{r}}_{\vec{q}}(\infty)$。

一般我们可证明：

系2 设 $f\in H^{\vec{r}}_{\vec{p}}(p')$，$p'$，$p_1$，…，$p_m\geqslant 1$，$q_\sigma\geqslant p_\sigma$，$\sigma=1$，…，$m$，$\theta=1-\sum\limits_{\sigma=1}^{m}\frac{1}{r_\sigma}\left(j_\sigma+\frac{1}{p_\sigma}-\frac{1}{q_\sigma}\right)>0$，则对任何$0<q'\leqslant\infty$必有

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_m^{j_m}}\in H^{\theta\vec{r}}_{\vec{q}}(q')。\square$$

证明 设 $r_\sigma=k_\sigma+\eta_\sigma$，$0<\eta_\sigma\leqslant 1$；$\theta r_\sigma=l_\sigma+\xi_\sigma$，$0<\xi_\sigma\leqslant 1$。这时

$$\left\{\int_0^\pi\left[\omega^*_{1+[\xi_i]}\left(x\vec{e}_i,\ \frac{\partial^{l_i+j}f}{\partial x_i^{l_i}\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_m^{j_m}},\ L^{\vec{q}}\right)\right]^{q'}x^{-\xi q'-1}dx\right\}^{\frac{1}{q'}}$$

$$=O\left\{\left[\int_0^\pi\left(\int_{n_0}^{x^{-\lambda}}t^{\frac{1}{r_i}(1+[\xi_i]+l_i)-\theta}\left[\sum_{\sigma+1}^{m}t^{-\frac{k_\sigma}{r_k}}\omega_{(\sigma)}(t^{-\frac{1}{r_\sigma}})\right]dt\right)^{q'}\right.\right.$$

$$\left.\times x^{q'(1+[\xi_i]-\xi_i)-1}\,dx\right]^{\frac{1}{q'}}$$

$$+\left[\int_0^\pi\left(\int_{x^{-\lambda}}^{\infty}t^{\frac{l_i}{r_i}-\theta}\left[\sum_{\sigma=1}^{m}t^{-\frac{k_\sigma}{r_\sigma}}\omega_{(\sigma)}(t^{-\frac{1}{r_\sigma}})\right]dt\right)^{q'}$$

$$\left.\times x^{-q'\xi_i-1}dx\right]^{\frac{1}{q'}}\right\}=O\{I_1+I_2\},$$

这里

$$\omega_{(\sigma)}(\delta)=\omega^*_{1+[\eta_\sigma]}\left(\delta,\ \frac{\partial^{k_\sigma}f}{\partial x_\sigma^{k_\sigma}},\ L^{\vec{p}}\right).$$

这时 $I_1=O\left\{\sum\limits_{\sigma=1}^{m}M_\sigma\right\}$，$I_2=O\left\{\sum\limits_{\sigma=1}^{m}N_\sigma\right\}$，这里

$$M_\sigma=O\left\{\left[\int_0^\pi\left(\int_n^{x^{-\lambda}}t^{\frac{1}{r_i}(1+[\xi_i]+l_i)-\theta-\frac{k_\sigma}{r_\sigma}}\omega_{(\sigma)}(t^{-\frac{1}{r_\sigma}})dt\right]^{q'}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times x^{q'(1+[\xi_i]-\xi_i)-1}\,dx\right]^{\frac{1}{q'}}\right\},$$

$$N_\sigma = O\left\{\left[\int_0^\pi \left(\int_x^\infty {}_{-\lambda} t^{\frac{l_i}{r_i}-\theta-\frac{k_\sigma}{r_\sigma}} \omega_{(\sigma)}(t^{-\frac{1}{r_\sigma}})dt\right)^{q'} x^{-q'\xi_i-1}dx\right]^{\frac{1}{q'}}\right\}.$$

选λ使得

$$\max_\sigma \left\{\frac{\xi_i r_\sigma}{(1+[\eta_\sigma]-\eta_\sigma)r_i+\xi_i r_\sigma}\right\} r_i < \lambda < r,$$

令$y = t^{-\frac{1}{r_\sigma}}$，则有

$$M_\sigma = O\left\{\left[\int_0^\pi \left(\int_{u^{-1}x^{\frac{\lambda}{r_\sigma}}}^\infty y^{\rho_1-1}\omega_{(\sigma)}(y)\ dy\right)^{q'} x^{q'(1+[\xi_i]-\xi_i)-1}dx\right]^{\frac{1}{q'}}\right\}$$

$$= O\left\{\left[\int_0^\pi \left(\int_{u^{-1}x^{\frac{\lambda}{r_\sigma}}}^\infty y^{-\eta_\sigma p'-1}\omega_{(\sigma)}^{p'}(y)dy\right)^{\frac{q'}{p'}} \left(\int_{u^{-1}x^{\frac{\lambda}{r_\sigma}}}^\infty y^{(\rho_1+\eta_\sigma)r'-1}dy\right)^{\frac{q'}{r'}}\right.\right.$$

$$\left.\left. x^{\rho_3}dx\right]^{\frac{1}{q'}}\right\} = O\left\{\left(\int_0^\pi x^{\rho_3}dx\right)^{\frac{1}{q'}}\right\} = O(1),$$

这里$\frac{1}{p'}+\frac{1}{r'}=1$，$\rho_1 = r_\sigma\theta + k_\sigma - \frac{r_\sigma}{r_i}(1+[\xi_i]+l_i) - r_\sigma$，

$\rho_2 = q'(1+[\xi_i]-\xi_i)-1$，$\rho_3 = \frac{\lambda}{r_\sigma}(\rho_1+\eta_\sigma)q + \rho_2$

$$= q\left(1-\frac{\lambda}{r_i}\right)(1+[\xi_i]-\xi_i)-1>1.$$

同样令$y = t^{-\frac{1}{r_\sigma}}$，再令$y = \frac{1}{\pi}x^{\frac{\lambda}{r_\sigma}}z$，则有

$$N_\sigma = O\left\{\left[\int_0^\pi \left(\int_0^{x^{\frac{\lambda}{r_\sigma}}} y^{\rho_4}\omega_{(\sigma)}(y)dy\right)^{q'} \times x^{-q'\xi_i-1}dx\right]^{\frac{1}{q'}}\right\}$$

$$= O\left\{\left[\int_0^\pi \left(\int_0^\pi z^{\rho_4}\omega_{(\sigma)}(z)dz\right)^{q'} x^{\rho_5}dx\right]^{\frac{1}{q'}}\right\},$$

因为

$$\int_0^\pi z^{\rho_4}\omega_{(\sigma)}(z)dz \leqslant \left(\int_0^\pi z^{-\eta_\sigma p'-1}\omega_{(\sigma)}^{p'}(z)dz\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\left(\int_0^\pi z^{\frac{r_\sigma}{r_i}\xi_i r'-1}dz\right)^{\frac{1}{r'}} = O(1),$$

故有

$$N_\sigma = O\left\{\left(\int_0^\pi x^{\rho_6} dx\right)^{\frac{1}{q'}}\right\} = O(1),$$

这里 $\rho_4 = \theta r_\sigma + k_\sigma - \frac{r_\sigma}{r_i} l_i - r_\sigma - 1$，$\rho_5 = -\eta_\sigma - 1 + \frac{r_\sigma}{r_i}\xi_i$，

$$\rho_6 = q\xi_i - 1 + \rho_5 q' \frac{\lambda}{r_\sigma} + \frac{\lambda}{r_\sigma} q' + \frac{\lambda}{r_\sigma} q'(1 + [\eta_\sigma]) > -1,$$

λ之规定如前。

系2证毕。

§4 三角插补及其它

4.1 记$x_j^{(k)} = \frac{2\pi j}{k}$，$j = 0,1,2,\cdots,k-1$，并定义梯形函数

$$\varphi_k(x) = \frac{2\pi j}{k},\quad x_j^{(k)} \leqslant x < x_{j+1}^{(k)},\quad j = 0,1,2,\cdots,k-1.$$

我们知道n次三角多项式

$$U_{n,(r)}(f) = U_{n(r)}(x; u_1, u_2, \cdots, u_r; f)$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) D_n(t - x) d\varphi_{2n+1}(t - u_1 - u_2 - \cdots u_r),$$

在点$x_j^{(2n+1)} + u_1 + \cdots + u_r$，$j = 0,1,\cdots,2n$上和函数$f(x)$相等，这里

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

（参看[10]）。下面用的导数都是普通意义下的导数。

引理 设$f(x) \in L^p(0,2\pi)$，$f(x + 2\pi) = f(x)$，则

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k} U_{n,(r)}(f)\right\|_{p[r]} = \left\{\underbrace{\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi}}_{r}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k} U_{n,(r)}(f)\right|^p dx du_1 \cdots du_r\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant(2\pi)^{\frac{r}{p}}3A_pn^k\|f\|_{L^p(0,2\pi)},\quad 1<p<\infty, r\geqslant 1;$$

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}U_{n(r)}(f)\right\|_{1[r]}\leqslant(2\pi)^r3n^k(2+\lg n)\|f\|_{L(0;2\pi)},$$

$$p=1, r\geqslant 1;$$

$$\|U_{n;(r)}(f)\|_{\mu[r]}\leqslant(2\pi)^{\frac{r}{\mu}}\left(\frac{k}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}\|f\|_{L(0;2\pi)}, p=1, r\geqslant 1,$$

$$0<\mu<1,$$

这里k为与μ无关的常数.

当$f(x)\in C(0,2\pi)$，$f(x+2\pi)=f(x)$时，上面结论对$r=0$也是成立的，并且

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}U_{n;(0)}(f)\right\|_{C(0;2\pi)}\leqslant 3n^k(2+\lg n)\|f\|_{C(0;2\pi)}\ .\ \square$$

证明 我们只证第一个不等式，并让$r=1$。其余结论的证明是相似的(第二、第三、第四不等式的证明和Fourier级数部分和相应的不等式的证明相仿，参看2.4节的引理)。

首先我们知道，对任何$T_n(x)\in(T_n)$有

$$\|T_n\|_{L^p(0;2\pi)}\leqslant 3A_p\left\{\int_0^{2\pi}|T_n(x)|^pd\varphi_{2n+1}(x)\right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$1<p<\infty,$$

(参看[10]).

这时我们有

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}U_{n,(1)}(x;u_1;f)\right|^pdx\leqslant n^{kp}\int_0^{2\pi}|U_{n;(1)}(f)|^pdx$$

$$\leqslant 3^pA_p^pn^{kp}\int_0^{2\pi}|U_{n,(1)}(x;u_1;f)|^pd\varphi_{2n+1}(x)$$

$$=3^pA_p^pn^{kp}\int_0^{2\pi}|f(x-u_1)|^pd\varphi_{2n+1}(x).$$

因此有

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}U_{n,(1)}(f)\right|^pdxdu_1$$

$$\leqslant 3^p A_p^p n^{kp} \int_0^{2\pi} \int_0^2 |f(x-u_1)|^p du_1 d\varphi_{2n+1}(x)$$

$$\leqslant 3^p A_p^p n^{kp} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x-u_1)|^p du_1 dx$$

$$\leqslant (2\pi) \cdot 3^p A_p^p n^{kp} \|f\|_{L^p(0,2\pi)}^p .$$

证毕。

利用本章例2之结论(2.4节)和第一章§3之引理3，我们就可根据上引理导出

定理15. 设$f^{(k)}(x) \in L(0,2\pi)$，$f(x+2\pi)=f(x)$，并有T_n，$T_n^* \in (T_n)$使得

$$\|f-T_n\|_{L^p(0,2\pi)} \leqslant \varepsilon(n), \quad \left\| \frac{d^k}{dx^k}(f-T_n^*) \right\|_{L^p(0,2\pi)}$$

$$\leqslant \varepsilon^*(n),$$

则必

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} U_{n,(r)}(f) - f^{(k)} \right\|_{p[r]} \leqslant C(3A_p n^k \varepsilon(n) + \varepsilon^*(n)),$$

这里 $1<p<\infty, r\geqslant 1, C=(2\pi)^{\frac{r}{p}}(2A_p+ (2\pi)^{-\frac{1}{p}}+1)$，但对$k=0$可取$C=(2\pi)^{\frac{r}{p}}$。

当$f(x)\in C(0,2\pi), f(x+2\pi)=f(x)$时，上面结论对$r=0$也成立。□

这时在第四转化引理中，S_λ相当于Fourier级数部分和构成的运算，S_λ^*相当于$U_{n,(r)}(f)$，$\|f\|_\lambda^*$为$\left\|\frac{d^k}{dx^k}f\right\|_{L^p(0,2\pi)}$。

由定理15立即可得到

系1. 设$f^{(k)}\in L^p(0,2\pi), f(x+2\pi)=f(x)$，并有$T_n\in(T_n)$使得$\|f^{(k)}-T_n\|_{L^p(0,2\pi)}\leqslant\varepsilon(n)$，则必

$$\left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} U_{n,(r)}(f) - f^{(k)} \right\|_{p[r]} \leqslant C(9A_p+1)\varepsilon(n),$$

这里$1<p<\infty, r\geqslant 1, C=(2\pi)^{\frac{r}{p}}(2A_p+(2\pi)^{-\frac{1}{p}}+1)$，对$k>0$；$C=(2\pi)^{\frac{r}{p}}$，对$k=0$。

特别当$f^{(k+1)}(x)\in L^p(0,2\pi)$时有

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}U_{n,(r)}(f)-f^{(k)}\right\|_{[r]p}\leqslant\frac{3C(3A_p+1)}{n^l}\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

这里$\omega(\delta)=\omega^*(\delta,f^{(k+l)},\ L^p(0,2\pi))$。

当$f(x)\in C(0,\ 2\pi)$，$f(x+2\pi)=f(x)$时，上结果对$r=0$也成立。□

同样，根据上面的引理，本章例2和第一章§3之引理3，对$p=1$可得

定理15*. 在定理15的条件下，设$p=1$，则有

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}U_{n,(r)}(f)-f^{(k)}\right\|_{1[r]}\leqslant C(n)[3(2+\lg n)n^k\varepsilon(n)+\varepsilon^*(n)],$$

这里$r\geqslant1$；$C(n)=(2\pi)^r(3+\lg n)$，对$k>0$；$C(n)=(2\pi)^r$对$k=0$。

当$f(x)\in C(0,\ 2\pi)$，$f(x+2\pi)=f(x)$时，结论对$r=0$也成立。□

系2 设$f^{(k)}(x)\in L(0,2\pi)$，$f(x+2\pi)=f(x)$，并有$T_n\in(T_n)$使得$\|f^{(k)}-T_n\|_{L(0,2\pi)}\leqslant\varepsilon(n)$，则必

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}U_{n,(r)}(f)-f^{(k)}\right\|_{1[r]}\leqslant C(n)[9(2+\lg n)+1]\varepsilon(n).$$

若$f^{(k+1)}\in L(0,2\pi)$，则必

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}U_{n,(r)}(f)-f^{(n)}\right\|_{1[r]}\leqslant C(n)[9(2+\lg n)+1]\varepsilon(n).$$

若$f^{(k+l)}\in L(0,2\pi)$，则必

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}U_{n,(r)}(f)-f^{(k)}\right\|_{1[r]}\leqslant3n^{-l}C(n)[3(2+\lg n)+1]\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

这里对r,$C(n)$之规定和定理15*的相同，$\omega(\delta)=\omega_1^*(\delta,f^{(k+l)},L(0,2\pi))$。□

由引理之第三个不等式可得

定理15.** 设$f(x)\in L(0,\ 2\pi)$，$f(x+2\pi)=f(x)$，并有$T_n\in(T_n)$使得$\|f-T_n\|_{L(0,2\pi)}\leqslant\varepsilon(n)$，则对$0<\mu<1$有

$$\|U_{n(r)}(f)-f\|_{\mu[r]}\leqslant C^*(n)\varepsilon(n),$$

这里$r\geqslant1$，$C^*(n)=2(2\pi)^{\frac{r}{\mu}}(3+\lg n)\left[2(2\pi)^{\frac{1}{\mu}-1}+\left(\frac{k}{1-\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}\right]$.

特别当$f^{(l)}\in L(0,2\pi)$时有

$$\|U_{n,(r)}(f)-f\|_{\mu[r]}\leqslant\frac{3C^*(n)}{n^l}\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

这里$\omega(\delta)=\omega_1^*(\delta,f^{(l)},L(0,2\pi))$。

对$f(x)\in C(0,2\pi)$，结论对$r=0$也成立。□

利用引理对于C空间之不等式，由例2和第一章§3之引理3即可得

定理15***. 设$f^{(k)}(x)\in C(0,2\pi),f(x+2\pi)=f(x)$,并有$T_n$，$T_n^*\in(T_n)$使得

$$\|f-T_n\|_{C(0,2\pi)}\leqslant\varepsilon(n),\quad \|f^{(k)}-T_n^*\|_{C(0,2\pi)}\leqslant\varepsilon^*(n),$$

则必致

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}U_{n,(0)}(f)-f^{(k)}\right\|_{C(0,2\pi)}\leqslant(3+\lg n)[3n^k(2+\lg n)\varepsilon(n)+\varepsilon^*(n)].$$

当$k=0$时，上估计式可去掉因子$(3+\lg n)$。□

系3. 设$f^{(k)}(x)\in C(0,2\pi),f(x+2\pi)=f(x)$，并有$T_n\in(T_n)$使得$\|f^{(k)}-T_n\|_{C(0,2\pi)}\leqslant\varepsilon(n)$。则必

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}U_{n,(0)}(f)-f^{(k)}\right\|_{C(0;2\pi)}\leqslant(3+\lg n)[9(2+\lg n)+1]\varepsilon(n).$$

若$f^{(k+l)}\in C(0,2\pi)$，$f(x+2\pi)=f(x)$，则有

$$\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k}U_{n,(0)}(f)-f^{(k)}\right\|_{C(0,2\pi)}\leqslant3n^{-l}(3+\lg n)[3(2+\lg n)+1]\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

这里$\omega(\delta)=\omega_1(\delta,f^{(k+l)},C(0,2\pi))$。这两个估计式对$k=0$可解消因子$(3+\lg n)$。□

我们得到的这些结果是J.Marcinkiewicz, A.zygmund和E.zarantonello所得的一些结果的推广和精确化，他们至多只考虑到$r=1,k=1$,的情况，而且在许多情况下没有误差的明确的估计(参看[11]).

4.2. 这里我们顺便谈谈一些其它方面的结果.

设函数$U(x,y)$, $x\in E_1$, $y\in E_2$, 对x是齐次可加和为正定的(或者为正线性的). 这里E_2为一线性空间, E_1为定义在E_2上(包括常数在内)的函数空间. 设范数$\|\cdot\|^{(1)}\in P(h)$, $\|\cdot\|^{(2)}\in P(1)$满足条件:

$$\|U(g(t_1,t_2),0)\|^{(1)}\leqslant U(\|g(t_1,t_2)\|^{(2)},0),$$

$$t_1\in E_1,\ t_2\in E_2,$$

这里范数对t_2的函数定义. 并且

$$\|cf(t_2)\|^{(1)}\leqslant K(|c|)\|f(t_2)\|^{(1)},$$

这里$K(t)$对t为非降, $K(t)\searrow 0$, $t\to 0$; $K(0)=0$.

定理16. 在上述条件下，对$Q(y)\in E_1$, 则有

$$\|U(Q,\ y)-Q(y)\|^{(1)}$$

$$\leqslant h\alpha+h^2\omega(\delta)(2+\beta)+h^2K(\beta)\|Q\|^{(1)},$$

这里$\delta=U(\|t\|,\ 0)$, $\alpha=\|U(Q(t-y),\ 0)-U(Q(t),\ y)\|^{(1)}$, $\beta=|U(1,\ 0)-1|$, $\omega(\delta)=\sup\limits_{\|t\|\leqslant\delta}\|Q(t+y)-Q(y)\|^{(2)}$, $\|t\|$是E_2中之t的(某种)$P(1)$型的范数. □

实际上,

$$\begin{aligned}\|U(Q(t),\ y)-Q(y)\|^{(1)}&\leqslant h\|U(Q(y+t),\ 0)\\&\quad -U(Q(t),\ y)\|^{(1)}+\\&\quad +h\|U(Q(y+t),\ 0)-Q(y)\|^{(1)}\\&\leqslant h\alpha+h^2\|U(Q(y),\ 0)-Q(y)\|^{(1)}\\&\quad +h^2\|U(Q(y+t),\ 0)-U(Q(y),\ 0)\|^{(1)}\\&\leqslant h\alpha+h^2U(\omega(\|t\|),\ 0)+h^2K(\beta)\|Q\|^{(1)}\\&\leqslant h\alpha+h^2\omega(\delta)U(\delta^{-1}\|t\|+1,\ 0)+h^2K(\beta)\|Q\|^{(1)}\\&\leqslant h\alpha+h^2\omega(\delta)(2+\beta)+h^2K(\beta)\|Q\|^{(1)}.\end{aligned}$$

例如我们考虑Poisson积分

$$U_r(f(t),\ x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}dt,$$

当$f(t)\in L^p(0,\ 2\pi)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，时，由上面的结果可知

$$\|U_r(f,\ x)-f(x)\|_{L^p(0,2\pi)}\leqslant 2\omega_1^*(\delta_r,f,L^p{}_{(0,2\pi)}),$$

$$\delta_r=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}dt.$$

一般说，对R^m中之矩形 $\Delta(a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1,\ \cdots,\ m,)$ 定义了 $f(X)$，$K_\lambda(X)$，它们对 x_i 以 b_i-a_i 为周期．x 为某参数．设 $K_\lambda(X)\geqslant 0$，$K_\lambda(X)=K_\lambda(\|X\|)$，$\|\cdot\|\in P(1)$，$K_\lambda(X)\in L(\Delta)$，

$$V_\lambda(f,\ X)=\int_\Delta f(Y)K_\lambda(Y-X)dY,$$

$$\int_\Delta K_\lambda(Y)dY=1,$$

若$f(X)\in L^p(\Delta)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则有

$$\|V\ (f,\ X)-f(X)\|_{L^p(\Delta)}\leqslant 2\omega(\delta_\lambda),$$

$$\omega(\delta)=\sup_{\|t\|\leqslant\delta}\|f(X+t)-f(X)\|_{L^p(\Delta)},$$

$$\delta_\lambda=\int_\Delta\|Y\|K_\lambda(Y)dY.$$

例如我们可取$\|Y\|=(|y_1|^q+\cdots+|y_m|^q)^{\frac{1}{q}}$，$1\leqslant q<\infty$，这里 $Y=(y_1,\ \cdots,\ y_m)$．

由这里的定理也可以知道：

若$U_\lambda(Q(t+y),\ 0)\equiv U_\lambda(Q(t),\ y)$，

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}U_\lambda(1,\ 0)=1,\quad \lim_{\lambda\to\lambda_0}U_\lambda(\|t\|,\ 0)=0,$$

则对任何对$\|\cdot\|^{(2)}$连续的$Q(t)$ 有

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\|U_\lambda(Q,\ y)-Q(y)\|^{(1)}=0.$$

§5. Соболев 空间中的逼近　有限单元法 Spline　逼近分区多项式　Taylor 余项新估计及统一逼近

5.1. 多项式族$\sum a_{i_1}\cdots{}_{i_m}x_1^{i_1}\cdots x_m^{i_m}$($\sum i_j=n$，系数属实域)记

为 $(\dot{P}_n)_m$。显然 $(\dot{P}_n)_m \subset (P_n)_m \subset (\dot{P}_{mn})_m$。

若多项式仅限于定义于集合D上，相应的族可记为$(P_n)_m(D)$等等。分区（分块、逐段）多项式用$p \in (P_{n_l})_{m_l}(D_l)$等方式来表述，它表示$p$在$D_l$集合上属于$(P_{n_l})_{m_l}$等等。

对于Соболев空间$W_p^l(D)$，采用范数定义

$$\|f\|_{W_p^l(D)} = \left\{ \sum_{\|r\| \leq l} \|D^r f\|_{L^p(D)} \right\}^{\frac{1}{p}}$$

D^r为r阶混合偏导数，$\|r\|$是r之和形成的模。$L^p(D)$即普通的Lebesque空间。$C^{(l)}(D)$指$W_\infty^{(l)}(D) = \lim\limits_{p \to \infty} W_p^{(l)}(D)$。$\dot{W}_p^{(l)}(D)$或$W_p^{(l)}(O)$为在$D$之边界邻域为零的$W_p^{(l)}(D)$中的函数族在$W_p^{(l)}(D)$度量的意义下封闭成功的空间。$f \in C^{(l)}(D)$不一定$f$之$l$阶导数连续，它可能分区连续。

定理17. 若$D \in S_m(h, \theta)$，$p_n \in (P_n)_m$，则有

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} p_n \right\|_{C(D)} \leq \frac{2m!n^2}{\theta h^2} \|p_n\|_{C(D)}. \quad \square$$

证明. 对每一点$X \in D$，有$V_m(X, h, \theta) \subset D$，则以$X$为新坐标的原点，在$V_m(X, h, \theta)$中选$m$个线性独立的向量$\vec{e}_j$，$j = 1, \cdots, m$，为新坐标（斜坐标）的坐标向量，其长选为$h$，顶角为$\theta$。空间的点在$\vec{e}_j$方向的坐标用$\rho_j$来记。由于$V_m(X, h, \theta)$是个$m$维锥体，所以这种选择是可能的。

这时在$V_m(X, h, \theta)$中p_n成了ρ_j，$j = 1, \cdots, m$，的多项式，次数不超过mn，因而由一维的Марков不等式有

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \rho_j} p_n \right\|_{C(0 \leq \rho_j \leq h)} \leq \frac{2(mn)^2}{h} \|p_n\|_{C(0 \leq \rho_j \leq h)}$$

$$\leq \frac{2(mn)^2}{h} \|p_n\|_{C(D)},$$

特别是对点X，即对ρ_j，$j = 1, \cdots, m$，有

$$\left| \frac{\partial}{\partial \rho_j} p_n(X) \right| \leq \frac{2(mn)^2}{h} \|p_n\|_{C(D)}.$$

对点X，采用关系式

$$\frac{\partial}{\partial x_i}p_n=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial p_n}{\partial \rho_j}\frac{\partial \rho_j}{\partial x_i},$$

则得

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n(X)\right|\leqslant\frac{2(mn)^2}{h}\|p_n\|_{C(D)}\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial \rho_j}{\partial x_i}\right|.$$

现在来估计$|\partial\rho_j/\partial x_i|$。记$\{\vec{d}\}$为原直交坐标系的单位标架向量。这时

$$\sum_{i=1}^{m}x_i\vec{d}_i=\sum_{j=1}^{m}\rho_j\vec{e}_j.$$

因此

$$x_i=\sum_{j=1}^{m}\rho_j\cdot\vec{e}_j\cdot\vec{d}_i,\quad \rho_j=\sum_{i=1}^{m}\frac{\Delta_{ij}}{V}x_i.$$

这里V是行列式$|a_{ij}|$，$a_{ij}=\vec{e}_j\cdot\vec{d}_i$，它等于斜坐标架$\{\vec{e}_j\}$张成的平行体的体积，而$\Delta_{ij}$是$V$的行列式$|a_{ij}|$中$a_{ij}$的余子式。

因$|\vec{e}_i|=h$，故$|\Delta_{ij}|\leqslant(m-1)!h^{m-1}$。又由于以$\theta$为$m-1$维容积的超球面对应的角锥在$\{\vec{e}_i\}$平行体内，故有

$$\theta h^m\leqslant V.$$

因此有

$$\left|\frac{\partial \rho_j}{\partial x_i}\right|=\left|\frac{\Delta_{ij}}{V}\right|\leqslant\frac{(m-1)!}{\theta h},\quad \sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial \rho_j}{\partial x_i}\right|\leqslant\frac{m!}{\theta h}.$$

所以

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n(X)\right|\leqslant\frac{2m!m^2n^2}{\theta h^2}\|p_n\|_{C(D)}.$$

由于点X是D中之任意点，故定理之前一命题得证（注意，当X变动时，标架$\{\vec{e}\}$也可能会跟着变动）。对其余命题证法类似。

证毕。

定理17可推广于一般的 Lebesque空间$L^p(D)$。为此我们研究一种常用的区域及区域剖分。若$D\in Sm(h,\theta)$，并有有限数N，使

存在D中之N个角锥$V_m(X_i, h_i, \theta_i)\subseteq D$，$i=1, \cdots, N$，它们复盖$D$，这里$h_i\geqslant h$，$\theta_i\geqslant\theta$。这时$D$叫做是有限锥（形性质）的。对于$D$的一种有限元剖分序列，每种剖分的单元都是有限锥的，并且N不随$h\to 0$而趋于无限，即$N=N(h)$是有界的。则剖分叫做有限锥（性质）剖分。有限锥剖分中单元数随$h\to 0$趋于无穷，但每单元的$N(h)$是有界的。实用的有限单元法都是有限锥剖分。在下面定理17*以及在推论中用到定理17*的定理19等，我们都假定剖分或定义集是具有有限锥性质的（有的定理就不再明显列出这一条件），而只涉及定理17、定理18的结果则不必这一条件。

定理17*. 对于$DeSm(h, \theta)$，设其具有有限锥性质，$p_n\in(P_n)_m V(\dot{P}_n)_m$，$p\geqslant 1$，有

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}p_n\right\|_{L^p(D)}\leqslant\frac{Cn^2}{\theta h^2}\|p_n\|_{L^p(D)},$$

这里$C\leqslant C(p)(m-1)!m^{1/p}N^{1/p}R^{(m-1)/p}$，$C(p)$只与$P$有关，$N$为有限锥性参数，$R$为$D$之直径。□

证明. 在[1]中已经证明了一维的L^p中的Марков不等式

$$\|p_n'(x)\|_{L^p(a,b)}\leqslant\frac{C'n^2}{b-a}\|p_n\|_{L^p(a,b)},$$

$$C'<\frac{4}{\sqrt{3}}(2+16\pi^2)^{1-\left(\frac{1}{p}\right)}$$

因而对于m维矩形体D，其边长为h_i，$i=1, \cdots, m$，

$$h\leqslant h_i\leqslant R,$$

有
$$\left\|\frac{\partial p_n}{\partial x_i}\right\|_{L^p(D)}\leqslant\frac{C''R^{(m-1)/p}n^2}{h}\|p_n\|_{L^p(D)},$$

C''与R，h，n，p_n，m，D无关。注意，平移与旋转不影响不等式之论证。

当D为一般平行体时（仍设$h\leqslant h_i\leqslant R$），设顶角$\geqslant\theta$，则这时用一非异仿射变换把$D$变成直交的矩形体$D'$，$\{x_i\}\to\{\rho_j\}$，这时利用上面矩形体之结果有

$$\int_D\left|\frac{\partial p_n}{\partial x_i}\right|^p dx_1\cdots dx_m$$

$$=\int_{D'}\left|\sum_i \frac{\partial p_n}{\partial x_i}\right|^p\left|\left(\frac{\partial x_i}{\partial \rho_j}\right)\right| d\rho_1\cdots d\rho_m$$

$$\leqslant V\left(\frac{(m-1)!}{\theta h}\right)^p\sum_j\int_{D'}\left|\frac{\partial p_n}{\partial \rho_j}\right|^p d\rho_1\cdots d\rho_m$$

$$\leqslant V\left(\frac{(m-1)!}{\theta h}\right)^p m\frac{(C'')^p n^{2p}}{h^p}R^{m-1}\int_{D'}|p_n|^p d\rho_1\cdots d\rho_m$$

$$\leqslant\left(\frac{(m-1)!}{\theta h}\right)^p m\frac{(C'')^p n^{2p}}{h^p}R^{m-1}\int_D|p_n|^p dx_1\cdots dx_m,$$

故有

$$\left\|\frac{\partial p_n}{\partial x_i}\right\|_{L^p(D)}\leqslant\frac{C''(m-1)!m^{1/p}R^{(m-1)/p}}{\theta h^2}n^2\|p_n\|_{L^p(D)}.$$

当D为有限锥性集时（参数为N），则由上式经简单计算即得

$$\left\|\frac{\partial p_n}{\partial x_i}\right\|_{L^p(D)}\leqslant\frac{Cn^2}{\theta h^2}\|p_n\|_{L^p(D)},$$

$$C\leqslant C''(m-1)!m^{1/p}N^{1/p}R^{(m-1)p},$$

这里R为D之直径.

定理证毕.

定理18. 在定理17的条件下，对$0<p\leqslant q\leqslant\infty$,

$$\|p_n\|_{L^q(D)}\leqslant C\left(\frac{n^2}{\theta^{1+(1/m)}h^2}\right)^{(1/p-1/q)m}\|p_n\|_{L^p(D)},$$

$$C=C(q)=C(\infty)^{1-(q/p)},$$

$$C(\infty)=\left[\frac{m^{6m\pm1}(p+1)2^{2m+p+1}}{m+p+1}\right]^{1/p}$$

正负号$\pm$分别对$(p_n)_m$, $(\dot{p})_m$而言。□

证明. 不妨设D为闭集合。我们可选到这样的点$X_0\in D$，使得

$$\|p_n\|_{C(D)}=|p_n(X_0)|,$$

这时有$-m$维角锥$V(X_0,h,\theta)\subset D$。对于$X\in V(X_0,h,\theta)$，利用定理17有

$$|p_n(X)-p_n(X_0)|$$

$$\leqslant \max_i \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \right\|_{C(V(X_0;h,\theta))} \sum_{j=1}^{m} |x_j - x_j^0|$$

$$\leqslant m \frac{2m^6 n^2}{\theta h^2} \rho(X, X_0) \|p_n\|_{C(D)},$$

这里x_j，x_j^0分别是点X，X_0的位标，$\rho(X, X_0)$是X，X_0的距离。

因此在$V(X_0, h, \theta)$中若$1-\frac{2m^6n^2}{\theta h^2}\rho(X, X_0)\geqslant 0$，

有 $$|p_n(X)|^p \geqslant \|p_n\|_{C(D)}^p \left(1-\frac{2m^6n^2}{\theta h^2}\rho(X, X_0)\right)^p,$$

因此有

$$\int_D \cdots \int |p_n(X)|^p dx_1 \cdots dx_m$$

$$\geqslant \theta \|p_n\|_{C(D)}^p \int_0^{\frac{\theta h^2}{2m^6n^2}} \left(1-\frac{2m^6n^2}{\theta h^2}\right)^p r^{m-1} dr$$

$$\geqslant \frac{\theta(m+p+1)}{m(p+1)2^{m+p+1}} \|p_n\|_{C(D)}^p \left(\frac{\theta h^2}{2m^6n^2}\right)^m.$$

所以得到

$$\|p_n\|_{C(D)} \leqslant C(\infty)\left(\frac{n^2}{\theta^{1+(1/m)} h^2}\right)^{m/p} \|p_n\|_{L^p(D)}.$$

这时 $$\|p_n\|_{L^q(D)} \leqslant \|p_n\|_{C(D)}^{1-(p/q)} \|p_n\|_{L^p(D)}^{p/q}$$

$$\leqslant C(\infty)^{1-(p/q)}\left(\frac{n^2}{\theta^{1+(1/m)}h^2}\right)^{m(1/p-1/q)} \|p_n\|_{L^p(D)}.$$

定理证毕。

由定理17*，定理18及嵌入关系可得

定理19. 设 $D\in S_m(h, \theta)$ 为有限锥（参数为N），$p_n\in(p_n)_m \vee (\dot{p}_n)_m$，则对$q\geqslant p\geqslant 1$，有

$$\|p_n\|_{W_q^{(k)}(D)} \leqslant \frac{Cn^\alpha}{\theta^\beta h^\alpha} \|p_n\|_{W_p^{(l)}(D)}$$

这里

$$\alpha = 2\delta + 2m\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right),\ \ \beta = \delta + (m+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right),$$

$\delta = \max(0,\ k-l)$,
$C = C(p,\ q,\ l, k,\ m, N, R)$ 可选得与h，θ，n，p_n，D无关。□

证明。不妨设$k \geqslant 1$，因为在相反的情况可利用泛函空间的嵌入定理。这时

$$\|p_n\|_{W_q^{(k)}(D)} \leqslant C_1 \sigma^{(k-l)} \|p_n\|_{W_q^{(l)}(D)}$$

$$\leqslant C_2 \sigma^{(k-l)} \eta^{(1/p-1/q)m} \|p_n\|_{W_p^{(l)}(D)}$$

$$\sigma = \frac{n^2}{\theta h^2},\ \ \eta = \frac{n^2}{\theta^{1+(1/m)} h^2},$$

证毕！

由定理19可对分区多项式进行估计。

定理20。设分区多项式$f \in (p_{n_i})_{m_i}(D_i)$，$i$属任何给定的有限的参数族$I$，$I' \subset I$，$D' = \bigcup_{j \in I'} D_j$，$D_j \in S_{m_j}(h_j, \theta_j)$，则对$q \geqslant p \geqslant 1$有

$$\|f\|_{W_q^{(k)}(D)} \leqslant C \sum_{j \in I'} \frac{n_j^{\alpha_j}}{\theta_j^{\beta_j} h_j^{\alpha_j}} \|f\|_{W_p^{(l)}(D)},$$

$$\|f\|_{W_\infty^{(k)}(D')} \leqslant C \sup_{j \in I'} \frac{n_j^{\alpha'_j}}{\theta_j^{\beta'_j} h_j^{\alpha'_j}} \|f\|_{W_p^{(l)}(D)},$$

这里

$$\alpha_j = 2\delta + 2m_j\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right),\ \ \beta_j = \delta + (m_j+1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right),$$

$$\delta = \max(0,\ k-l),\ \ \alpha'_j = 2\delta + 2m_j/p,$$

$$\beta'_j = \delta + (m_j+1)/p,$$

C为与θ_i，h_i，n_i，f无关的常数。□

上定理的特例是

定理21。在上定理的条件下，对$k \leqslant l$

$$\|f\|_{W_\infty^{(k)}(D')} \leqslant C \sup_{j \in I'} n_j^{m_j} \theta_j^{-(1+m_j)/2} h_j^{-m_j} \|f\|_{W_2^{(l)}(D)},$$

特别是对于平面情况，$m=2$，当$n_j = n$，$\theta_j = \theta$，$h_j = h$时

$$\|f\|_{W_\infty^{(k)}(D')} \leqslant Cn^2\theta^{-3/2}h^{-2}\|f\|_{W_2^{(l)}(D)},$$

对于空间情况

$$\|f\|_{W_\infty^{(k)}(D')} \leqslant Cn^2\theta^{-3/2}h^{-2}\|f\|_{W_2^{(l)}(D)}. \quad \square$$

对于一维的情况，$S_1(h, \theta)$ 没有意义，直接由Марков和Бари不等式可证明

定理20*. 对一维分段多项式$f\in(p_{n_i})_1(D_i)$有

$$\|f\|_{W_q^{(k)}(D')} \leqslant C\sum_j n_j^\alpha h_j^{-\alpha/2}\|f\|_{W_p^{(l)}(D)},$$

$$\alpha = 2\delta + 2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right),\ \delta = \max(0,\ k-l),$$

h_j为D_j之长，C与n_j，h_j，f，D无关。当$q=\infty$时有

$$\|f\|_{C^{(k)}(D')} \leqslant C\sup_j n_j^{2\delta+(2/p)}h_j^{-\delta-(1/p)}\|f\|_{W_p^{(l)}(D)}. \quad \square$$

5.2. 利用上节的不等式和P转化引理，就可引伸出一组误差转化定理和逼近的反定理，我们只举出其中一部分作为例子。

例如由定理19，以n为逼近参数有

定理22. 设$D\in S_m$，$f\in W_p^{(l)}(D)$，$1\leqslant p\leqslant q$，并且有$p_n\in(p_n)_m$使得

$$\|f-p_n\|_{W_p^{(l)}(D)} \leqslant \epsilon(n),$$

这里$\epsilon(t)\downarrow 0$，

$$\int^\infty \epsilon(t)t^{\alpha-1}dt<\infty,$$

则$f\in W_q^{(k)}(D)$，并且

$$\|f-p_n\|_{W_q^{(k)}(D)} = O\left\{\int_n^\infty \epsilon\left(\frac{t}{u}\right)t^{\alpha-1}dt\right\}$$

其中$u>1$为某给定常数，其余符号意义与定理19的相同。$\square$

应用定理20，以剖分细密程度$h=1/t$为逼近参数，由P转化引理可得到

定理23. 设参数族$I=I(t), I'=I'(t)\subseteq I, D=\bigcup_{j(t)\in I(t)} D_i(t)$,

$$D' = \bigcup_{j(t)\in I'(t)} D_j(t),\ D_j(t)\in S_{mj(t)}(h_{j(t)},\ \theta_{j(t)}),\ m_{j(t)}\leqslant m,\ \theta_{j(t)}$$

$\geqslant\theta>0$, $h_{j(t)}\geqslant h>0$, $f\in W_p^{(l)}(D)$, $p\geqslant 1$，并且有

$$f_h\in (\mathrm{P}_{n_{i(t)}})_{m_{i(t)}}(D_{i(t)}),\ n_{i(t)}\leqslant n(\text{常数})$$

使得 $\|f-f_h\|_{W_p^{(l)}(\boldsymbol{a})}\leqslant\varepsilon(t)\downarrow 0$,

$$\int^{\infty}\varepsilon(t)t^{a-1}dt<\infty,$$

$$a=2\delta+2m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right),\ \delta=\max(0,\ k-l),$$

则$f\in W_q^{(k)}(D')$，并且

$$\|f-f_h\|_{W_q^{(k)}(D')}=0\left\{\int_{1/k}^{\infty}\in\left(\frac{t}{u}\right)t^{a-1}dt\right\},$$

$u>1$，其余符号与定理20同.

注 在上定理中$h=1/t$虽可变动，但D与D'可以是固定的.

利用其它不等式也可建立类似的误差转化定理，而且可以有更加复杂的形式，例如可以建立以n，h，θ，m同时为逼近参数的转化定理，这里从略.

为了讨论反定理，对$f\in W_p^{(l)}(D)$,定义连续模

$$\omega_k(\delta)=\omega_k(\delta,\ f,\ W_p^{(l)}(D))$$

$$=\sup_{\substack{D'\subset D\\ X+ih}}\sup_{|h|\leqslant\delta}\|\Delta_h^k f(X)\|_{W_p^{(l)}(D')},$$

$$\Delta_h^k f(X)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(X+ih),$$

这里h为任何向量，$|h|$是h的长度，D'为D之任何可测子集使得$X\in D'$导致$X+ih\in D$者. 若$\omega_k(\delta,\ f,\ W_p^{(l)}(D))=0(\delta^a)$，$0<a\leqslant 1$，则称

$$f\in W_p^{(l)}H_k^{(a)}(D)\text{或}W_p^{(l)}H^{(a)}(D).$$

这种一般的连续模，是一种依赖参数δ的广义的范数，又是一种广义对称性的量的刻划，它具有如下的一些性质(设$p\geqslant 1$)：

1) $\omega_k(0)=0$，对δ非降：$\omega_k(\delta)\in(\uparrow_\delta)$；

2) $\omega_i(\delta)\leqslant C\|f\|_{W_p^{(l)}(D)}$；

3）$f\in W_p^{(l+s)}(D)$，其 $l+s-1$ 阶偏导数等价于绝对连续，则

$$\omega_{k+s}(\delta,\ f,\ W_p^{(l)}(D))\leqslant C_1\delta^S\omega_k(\delta,\ f,\ W_p^{(l+S)}(D))$$
$$\leqslant C_2\delta^S\|f\|_{W_p^{(l+S)}(D)},$$

C，C_1，C_2 与 δ，f 无关。

这可由

$$|\Delta_h^{k+S}f(X)|\leqslant\left|\int_0^{|h|}\cdots\int_0^{|h|}\frac{\partial^{k+s}}{\partial\rho^{k+s}}\right.$$
$$\left.\cdot f\left(X+\vec{e}\sum_{i=1}^{k+S}t_i\right)dt_1\cdots dt_{k+s}\right|$$

导出（利用广义的 Minkowski 不等式）。$\vec{e}$ 为向量 h 的单位向量，$\dfrac{\partial}{\partial\rho}$ 是沿 $\vec{e}$ 方向的导数；

4）当 n 为正整数时，$\omega_i(n\delta)\leqslant n^k\omega_k(\delta)$；

5）$|\omega_k(\delta_2)-\omega_k(\delta_1)|\leqslant 2^k\omega_1(k|\delta_2-\delta_1|)$；

6）当 $\omega_k(\delta)/\delta^k\to 0$ 时，D^if 与0等价，$\|i\|\leqslant k$。

有了这些说明，就可用P转化引理（的系）得到反定理，下面是一些选例。

定理22*. 在定理22的条件下

$$\omega_s(\delta,\ f,\ W_q^{(k)}(D))$$
$$=O\left\{\delta^s\int_{\lambda_0}^{u\lambda(1/\delta)}t^{\beta-1}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt+\int_{\lambda(1/\delta)}^{\infty}t^{\alpha-1}\right.$$
$$\left.\in\left(\frac{t}{u}\right)dt\right\},$$

$$\beta=2m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+2max(0,\ k+s-l).$$

当 $k=l$，$q=p$ 时

$$\omega_s(\delta,\ f,\ W_p^{(l)}(D))$$
$$=O\left\{\delta^s\int_{\lambda_1}^{u\gamma(1/\delta)}t^{\beta-1}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt+\in\left(\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)\right\},$$

这里及以后 $\lambda(t)$ 是 t 的非降函数，λ_0 为某一常数，其余符号同定理22。□

证明. 实际上有不等式

$$\omega_s(\delta,\ f,\ W_q^{(k)}(D)) = O\{\|f\|_{W_q^{(k)}(D)}\}.$$

而对$p_n\in(p_n)_m$，由定理19有

$$\omega_s(\delta,\ p_n,\ W_q^{(k)}(D)) = O\{\delta^s\|p_n\|_{W_q^{(k+S)}(D)}\}$$
$$= O\{\delta^s n^{\beta}\|p_n\|_{W_p^{(l)}(D)}\}.$$

利用P转化引理的反定理形式即可证明定理.

定理23*. 在定理23的条件下

$$\omega_s(\delta,\ f,\ W_q^{(k)}(D'))$$
$$= O\left\{\delta^s\int_{\lambda_0}^{u\lambda(1/\sigma)} t^{\beta-1}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt + \int_{\lambda(1/\delta)}^{\infty} t^{\alpha-1}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt\right\}.$$

当$k=l$，$q=p$时

$$\omega_s(\delta,\ f,\ W_p^{(l)}(D'))$$
$$= O\left\{\delta^s\int_{\lambda_0}^{u\lambda(1/\delta)} t^{\beta-1}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt + \in\left(\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)\right\},$$

β与上定理的同，其余符号与定理23的同. □

证明与上定理类似.

注: 定理23*就是高维有限单元法或高维 Spline 逼近的反定理. 对于一维的情况，由 Марков 型定理的原型，指数α，β可以改善一些. $\alpha=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\max(0,\ k-l)$，$\beta=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\max(0,\ k+s-l)$.

而这时的反定理的特例是传统的Spline逼近收敛性限制定理(由$f\in C^{(2n)}[a,\ b]$，$\mu>0$，

$$\|f-S\Delta_N\|_{C[a;\ b]}=O(\|\Delta_N\|^{2n+\mu}),$$

导致 $D^{2n}f=0$（参看[18]第34，96，174页））的推广. 实际上，这时由转化定理可得

$$\|f-S\Delta_N\|_{C^{(k)}[a;\ b]}=O(\|\Delta_N\|^{2n+\mu-k}),$$
$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n.$$

而反定理有如下形式：若$S_{\Delta_N}^{(S+2n-k-1)}$绝对连续，

则 $\omega_S(\delta,\ f,\ C^{(k)}[a,\ b])=0(\delta^\sigma)$，$\sigma=S+2n+\mu-k$.

特别是

$$\omega_1(\delta,\ D^{2n-1}f,\ C[a,\ b])/\delta\to 0.$$

因而$D^{2n}f=0$。其实只要

$$\|f-S_{\Delta_N}\|_{C[a,b]}\leqslant\varepsilon(1/\|\Delta_N\|),$$

$$\int^{\infty}\varepsilon(t)t^{-(2n+1)}dt<\infty$$

即可。

5.3. 有了转化引理，一些特定的直接逼近定理与多项式不等式一样是研究具体问题的关键。本小节具体地证明一些新型的直接定理，并讨论Spline逼近。

定理24. 设$f\in W_p^{(l+r)}([a,\ b])$，$p\geqslant 1$，$l$，$r$为非负整数，则存在对$t$，$p$，$l$统一的一维多项式$p_n\in(\mathrm{P}_n)_1$，使得

$$\|f-p_n\|_{W_p^{(l+t)}([a,b])}$$
$$\leqslant M\left(\frac{b-a}{n}\right)^{r-t}\omega_k\left(\frac{b-a}{n},\ f,\ W_p^{(l+r)}([a,\ b])\right),$$

这里$k\geqslant 1$为某整数，$t=0,\ 1,\ \cdots,\ l$，M为可选得与a，b，n，t无关的常数(但可能与p，l，r，k有关)。□

证明 这与传统的Jackson加强定理

$$E_n^*(f)\leqslant\frac{C_{k+r}}{(n+1)^r}\omega_k\left(\frac{1}{n+1},\ f^{(r)},\ C[a,\ b]\right)$$

(参看[19]第275页) 的证明方法相似，这里叙述一个梗概，详细过程可参看[19, 15, 20]中相似定理的证明。

先是把$[a,\ b]$变为区间$[-1+2\varepsilon,\ 1-2\varepsilon]$。$\varepsilon>0$为充分小的定数，相应的$f$变为$f_1$，再延拓$f_1$于$[-1,\ 1]$，使其在$W_p^{(l+r)}$意义下的连续模$\omega_k$同级(即比在二正常数之间)。延拓得的函数$f_2$在$[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$之外要求为零（这种延拓的方式之可能性已有许多工作，过程是类似的，参看[21, 22]）。再由$y=\cos^{-1}x$转化为$[-\pi,\ \pi]$而成为f_3。它是偶函数，在$W_p^{(l+r)}$中的连续模ω_k与原f的同级(分别对$[-\pi,\ \pi]$，$[a,\ b]$)。

令σ为某满足$2\sigma\geqslant k+r+2$的整数，$\eta=\left[\frac{n}{\sigma}\right]+1$，$\left[\frac{n}{\sigma}\right]$是$\frac{n}{\sigma}$的

整数部分．记

$$K(y)=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\sin(\eta y/2)}{\sin(y/2)}\right]^{2\sigma},$$

$$\Delta=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin ny/2}{\sin y/2}\right]^{2\sigma}dy,$$

则可证$K(y)$是次数不大于 n 的Cosine多项式，并且

$$\int_{-\pi}^{\pi}K(y)dy=1.$$

设
$$T(u)=\int_{-\pi}^{\pi}K(s)\sum_{i=1}^{k+r}(-1)^{i-1}\binom{k+r}{i}f_3(u+is)ds$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}K^*(u-s)f_3(s)ds,$$

$$K^*(s)=\sum_{i=1}^{k+r}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}\binom{k+r}{i}K\left(\frac{s}{i}\right).$$

这时有

$$\|f_3-T\|_{W_p^{(l+t)}([-\pi,\pi])}$$

$$\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}K^*(s)\omega(s)ds$$

$$\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}K^*(s)\omega\left(([ns]+1)\frac{1}{n}\right)ds$$

$$\leqslant\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_{-\pi}^{\pi}(ns+1)^{k+r}K^*(s)ds,$$

$$\omega(s)=\omega_{k+r}(s,\ f_3,\ W_p^{(l+t)}([-\pi,\ \pi])).$$

这时对 n （类似于[19]第五章计算）

$$\int_{-\pi}^{\pi}(ns+1)^{k+r}K^*(s)ds=0(1),$$

故有常数$M'=M(r,\ k)<\infty$使得

$$\|f_3-T\|_{W_p^{(l+t)}([-\pi,\pi])}\leqslant M'\omega\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\leqslant 2^l M' \omega_k\left(\frac{1}{n}, f_3, W_p^{(l+r)}([-\pi, \pi])\right).$$

再转化回原来的f，这时$T\to p_n$，经简单计算即得定理24的证明。

注：定理24的证法沿用传统函数构造理论的论述模式，证法是简单的，虽然细节详细写起来较繁。但是用定理24的方式来表述的直接统一逼近定理还是新的。这一形式可以推广到高维的充分光滑的区域，证法完全类似，证明这里暂从略，高维的处理的例子可参看[15]。

定理24*. 设D为m维光滑区域，其边界的局部参数表示是$l+r+1$阶连续可微的。设D的直径为R，$f\in W_p^{(l+r)}(D)$，$p\geqslant 1$，这时有对t，p，l统一的$p_n\in(P_n)m$，使得

$$\|f-p_n\|_{W_p^{(l+r)}(D)}$$

$$\leqslant M\left(\frac{R}{n}\right)^{r-t}\omega_k\left(\frac{R}{n}, f, W_p^{(l+r)}(D)\right),$$

这里$k\geqslant 1$为整数，$t=0$，1，…，l，l，r为给定的非负整数，M与R，n，t无关。□

注：这一定理的特例即为[15]中之一结果（对所谓$W_p^{(l)}H^a\cdot(D; M)$类）。

但是这一结果对有限单元法关心的逐块光滑的区域意义不大，在讨论有限单元法中我们直接引用定理24以及下面更强的统一逼近定理。

定理25. 设$f^{(l+r)}\in C([a, b])$，l，$r\geqslant 0$，1，…，r，$n\leqslant r-t$，$T_n(f)$为f于任一给定点$x_0\in[a, b]$处的Taylor展式前几项之和，$n<l+r$，这时

$$\|f-T_n\|_{C^{(l+t)}([a; b])}$$

$$\leqslant M_1\left(\frac{b-a}{n}\right)^{r-t}\omega_k\left(\frac{b-a}{n}, f, C^{(l+r)}([a, b])\right),$$

M_1与a，b，t，n无关。□

证明 因为对任何$g^{(l+r)}\in C([a, b])$，有

$$g(x)=\sum_{i=0}^{l+r-1}\frac{(x-x_0)^i}{i!}g^{(i)}(x_0)$$

$$+\frac{(x-x_0)^{l+r}}{(l+r)!}g^{(l+r)}(\theta x),$$

θ_x属于x与x_0之间的某一点(可能随x而变)。这时对$n<l+r$,

$$T_n^{(l+t)}(g)=\sum_{i=l+t}^{n}\frac{(x-x_0)^{i-l-t}}{(i-l-t)!}g^{(i)}(x_0).$$

故有

$$\|T_n^{(l+t)}(g)\|_{C([a,b])}$$

$$\leqslant\sum_{i=l+t}^{n}\frac{(b-a)^{i-l-t}}{(i-l-t)!}\|g\|_{C^{(i)}([a,b])}$$

因此，若令$\|\cdot\|^+=\|\cdot\|_{C^{(l+t)}([a;b])}$,

$$\|\cdot\|^-=\sum_{\lambda=0}^{l+t}\sum_{i=\lambda}^{n}\frac{(b-a)^{i-\lambda}}{(i-\lambda)!}\|\cdot\|_{C^{(i)}([a;b])},$$

则有$\|T_n(g)\|^+\leqslant\|g\|^-$。

另一方面，由定理24，有统一的$P_n\in(P_n)_1$,

$$\|f-p_n\|_{C^{(i)}([a;b])}\leqslant M_2\left(\frac{b-a}{n}\right)^{l+r-i}\omega\left(\frac{b-a}{n}\right),$$

$$\omega(\delta)=\omega_k(\delta,\ f,\ C^{(l+r)}([a,\ b])),\ i=l+t,\ \cdots,\ n,$$

$$\|f-p_n\|_{C^{(l+t)}([a;b])}\leqslant M_2\left(\frac{b-a}{n}\right)^{r-t}\omega\left(\frac{b-a}{n}\right),$$

也即有统一的p_n使得

$$\|f-p_n\|^+\leqslant M_2\left(\frac{b-a}{n}\right)^{r-t}\omega\left(\frac{b-a}{n}\right),$$

$$\|f-p_n\|^-\leqslant M_2(l+t)\sum_{i=l+t}^{n}\frac{(b-a)^{i-l-t}}{(i-l-t)!}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{l+r-i}$$

$$\cdot\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\leqslant M_2(l+t)\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{i=l+t}^{n}\frac{(b-a)^{r-t}}{(i-l-t)!}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{l+r-t}$$

$$\leqslant M_2(l+t)\left(\frac{b-a}{n}\right)^{r-t}\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{j=0}^{n-l-t}\frac{1}{j!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{j}$$

$$\leqslant M_2(l+t)\,e^{1/n}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{r-t}\omega\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

而又对任何$p_n\in(p_n)_1$，$T_n(p_n)=p_n$，故由S转化引理，有

$$\|f-T_n(f)\|^+\leqslant M_2(1+e^{1/n}(l+t))\left(\frac{b-a}{n}\right)^{r-t}\omega\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

令$M_1=M_2(1+e^{1/n}(l+r))$即可。

定理证毕。

注：古典的Taylor展式的余项估计已有许多结果，但是利用转化原理与统一逼近以及连续模的概念而得定理25的估计还是新的。

对于 $C^{(l+r)}([a,b])$这种特殊情况，定理25是定理24的强化，它明确地给出统一逼近多项式 p_n 的构造(即它可选为$T_n(f)$)，这一点对有限单元法的误差估计及有关的问题的研究是非常重要的。利用它，我们不只可得到一维线段上的统一逼近，而且可以得到高维集合的某种多项式的统一逼近,并且能估计有关的误差。

我们来考虑高维统一逼近的一种实现。

我们记$D\in S_{(m)}(X_0)$或$D\in S$，是指D为m维空间的一集合（其本身维数可能小于m或D之某些部分之维数可能小于m），并且对任何$X\in D$，由X到X_0之联线$E=E(X, X_0)$属于集合D:$E\supseteq D$。这样的D叫做（相对于中心为X_0的广义的）星形集。

定理26. 设$D\in S_{(m)}(X_0)$,D上之函数f在E上$l+r$阶导数连续，$E=E(X, X_0)$，X为D中之任何点：$X\in D$,R为D之直径，$T_n(X_0)=T_n=T_n(X_0, f)$为f于X_0处之m维（m元）Taylor展式之$(\overset{*}{P}_n)_m$部分，$n<l+r$，l，$r\geqslant 0$为给定的整数，这时

$$\|f-T_n\|_{C^{(l+t)}(E)}\leqslant M\left(\frac{R}{n}\right)^{r-t}\omega_k\left(\frac{R}{n},\ f,\ C^{(l+r)}(E)\right)$$

这里$k\geqslant1$，$t=0$，1，…，r，M与D，E，R，n，X_0无关。□

注：这里我们要注意的是 $C^{(l+r)}(E)$ 是指沿特定的E上的导数建立的泛函空间，与$C^{(l+r)}(D)$有质的差别，若只除端点X，X_0外，E上之点均为D之内点，可证$g\in C^{(l+r)}(D)$导致$g\in C^{(l+r)}(E)$，并且

$$\|g\|_{C^{(l+r)}(E)}\leqslant(m)^{l+r}\|g\|_{C^{(l+r)}(D)}.$$

一般情况则没有这类关系。当D有低维流形部分时，$C^{(l+r)}(D)$可能没有意义，因D上之函数对坐标之偏导数可能无法定义而只可能谈及沿某些方向的偏导数，但$C^{(l+r)}(E)$总是有意义的。

另一方面，知道了绕X_0转动的每一直线E上之方向导数仍然不能保证求出函数对坐标（一种过X_0处的特殊方向）的偏导数。除非是只限于在X_0处求偏导数，而且要求X_0为内点。

定理26要求对任何E，$f\in C^{(l+r)}(E)$，这对f的要求加多了，但是结论也加强了．这时T_n对一切的E是统一的(但T_n与X_0有关)，M对一切的E也可是统一的。T_n在每一E上扮演相应的一维Taylor展式截段的作用。

证明 由上面的注释，利用定理25即得定理26之证明。

系 1 在上定理条件下($l=0$)，并且$f\in C(D)$，则

$$\|f-T_n\|_{C(D)}\leqslant M\left(\frac{R}{n}\right)^{r}\overset{*}{\omega}_k\left(\frac{R}{n},\ f,\ C^{(r)}(D)\right),$$

$$\|f-T_n\|_{\overset{*}{C}{}^{(t)}(D)}\leqslant M\left(\frac{R}{n}\right)^{r-t}\overset{*}{\omega}_k\left(\frac{R}{n},\ f,\ C^{(r)}(D)\right),$$

这里 $$\overset{*}{\omega}_k\left(\frac{R}{n},\ f,\ C^{(r)}(D)\right)=\sup_{\substack{X\in D\\E=E(X,X_0)}}\omega_k\left(\frac{R}{n},\ f,\ C^{(r)}(E)\right),$$

$$\|*\|_{\overset{*}{C}{}^{(t)}(D)}=\sup_{\substack{X\in D\\E=E(X,X_0)}}\|*\|_{C^{(t)}(E)}.\ \square$$

系 2 设$D=\bigcup D_i$，$D_i\in S(m_i)(X_i)$，f在E_i上l_i+r_i阶连续可微，l_i，$r_i\geqslant0$，$E_i=E(X,\ X_i)$，$X\in D_i$，则有$T=T_{ni}(X_i,f)$，

$n_i < l_i + r_i$，它在D_i中属于$(\overset{*}{P}_{n_i})_{m_i}(D_i)$，

$$\|f-T\|_{C^{(l_i+t_i)}(E_i)}$$
$$\leqslant M\left(\frac{R_i}{n_i}\right)^{r_i-t_i}\omega_{k_i}\left(\frac{R_i}{n_i},\ f,\ C^{(l_i+r_i)}(E_i)\right),$$

$k_i \geqslant 1$，$t_i = 0, 1, \cdots, r_i$，M与D_i，E_i，R_i，n_i无关，R_i 为D_i之直径，m_i是D_i之最高维数．□

注：这里D_i之间可能重叠，这时在重叠部分T是多值的（但这时可应用任一值仍有上述的估计），因此T在整个D上可能不一定连续，也即是不一定相互协调的．即使D_i之间不重叠，这时虽然T保证了单值性，但仍不一定保证整个D上的连续性．所以，一般还不能够直接用于有限单元法之类的逼近问题，除非是取销了协调性（以至单值性）要求的广义的有限单元法．例如，对某种裂隙介质力学的不连续体可能有用．

解决协调性的一种方案就是利用插值法，当参数（例如某阶导数在整个集合D上的连续性）作为附加条件来选定参数．也即协调性的要求越高，附加条件也越多，因而待定参数也应相应增加．对多项式插值就反应为提高次数，插值的点相对少些，它们往往不唯一决定多项式，因而可有多余备用的待定系数．

定理26的Tn的统一性或泛对称表现在不因t，E而变，但是它一般因中心X_0而变，利用插值法还可转化到更广的统一性，可求得某种多项式是不因D之中心而变的，因而对于某些集合就不只可考虑对每一截线段E上$\|\cdot\|_{C(l+t)(E)}$的意义下的逼近，而且可以考虑$\|\cdot\|_{C(l+t)(D)}$的意义下的逼近．也就是说，从定理24起，我们从一个泛对称（统一逼近）转化到另一个泛对称（统一逼近）而不断扩展对称性（统一性、协调性）．

设$X^i \in D$，是一（有限或无限）点列．我们暂时仅限于考虑下列形式的算子：

$$G(f) = G(X,\ f) = \sum_i f(X^i)G_i(X)$$

$G_i(X)$为D上的某一类给定的函数族（它们可能潜在含有某些机动待定的参数）。多项式插值算子大都具有这种形式，特别是有限单元法遇到的插值算子。

定理27. 设$D\in S_{(m)}(X_0)$，E为过X_0的D中之任给的直线截段，$G_i(X)\in C^{(t)}(E)$，$f\in C(D)\cap C^{(r)}(E)$，$t\leqslant r$，并且对$P\in(\dot{P}_n)_m(D)$，$G(P)=P$(即G对n次多项式是精确的)，R为D之直径，则有

$$\|f-G(f)\|_{C^{(t)}(E)}\leqslant M\left(\frac{R}{n}\right)^{r-t}\left\{\omega_k\left(\frac{R}{n},\ f,\ C^{(r)}(E)\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{R}{n}\right)^t\overset{*}{\omega}_k\left(\frac{R}{n},\ f,\ C^{(r)}(D)\right)\sum_i\|G_i\|_{C^{(t)}(E)}\right\},$$

M与E，R，X_0，t，n无关，$k\geqslant 1$。□

证明. 因为对任何g_1，$g_2\in C(D)$，有

$$\|G(g_1)-G(g_2)\|_{C^{(t)}(E)}\leqslant\|g_1-g_2\|_{C(D)}\sum_i\|G_i\|_{C^{(t)}(E)},$$

令$\|\cdot\|^-=\|\cdot\|_{C(D)}$，$\|\cdot\|^+=\|\cdot\|_{C^{(t)}(E)}$，应用定理26(包括系1的第一部分)，并应用$S$转化引理即得本定理的证明。

系1. 若$f\in C^{(r)}(D)$，$G_i\in C^{(t)}(D)$，则

$$\|f-G(f)\|_{C^{(t)}(E)}\leqslant M'\left(\frac{R}{n}\right)^{r-t}\omega_k\left(\frac{R}{n},f,C^{(r)}(D)\right)$$

$$\times\left\{1+\left(\frac{R}{n}\right)^t\sum_i\|G_i\|C^{(t)}(D)\right\},$$

M'与E，R，X_0，t，n无关，$k\geqslant 1$。□

注： 我们知道，如果知道了$\|f-G(f)\|_{C^{(t)}(E)}$的估计，即使对许多E成立，以至对许多星形中心成立，也不是永远能估计$\|f-G(f)\|_{C^{(t)}(D)}$的。因此我们得进一步研究一些问题矛盾的特殊性。

当D之内域(D之内点之集合)的闭包等于或包含D本身时，简称D为拟凸集或具拟凸性质。在一般有限单元法中的单元大都是具有拟凸性质的，利用拟凸集的概念就可较顺利地对一些逼近进行转化。

定理28. 若D为m维拟凸集，R为其直径，$f\in C^{(r)}(D)$，$G_i\in C^{(t)}(D)$，$t\leqslant r$，则

$$\|f-G(f)\|_{C^{(t)}(D)}\leqslant M''\left(\frac{R}{n}\right)^{r-t}\omega_k\left(\frac{R}{n},f,C^{(r)}(D)\right)$$

$$\times\left\{1+\left(\frac{R}{n}\right)^t\sum_i\|G_i\|_{C^{(t)}(D)}\right\},$$

$k\geqslant 1$，M''与R，n，t无关。□

证明. 对于任何D的内点X_0，作过X_0的直线与D相重，并含有X_0的线段E，对E直接应用定理25，定理26，象定理27一样证明，可得估计

$$\|f-G(f)\|_{C^{(t)}(E)}\leqslant M''\left(\frac{R}{n}\right)^{r-t}\omega_k\left(\frac{R}{n},f,C^{(r)}(D)\right)$$

$$\times\left\{1+\left(\frac{R}{n}\right)^t\sum_i\|G_i\|_{C^{(t)}(D)}\right\}.$$

特别当E与坐标轴平行时是成立的，因此在点X_0上

$$\|f-G(f)\|_{C^{(t)}(X_0)}\leqslant M''\left(\frac{R}{n}\right)^{r-t}\omega_k\left(\frac{R}{n},f,C^{(r)}(D)\right)$$

$$\times\left\{1+\left(\frac{R}{n}\right)^t\sum_i\|G_i\|_{C^{(t)}(D)}\right\}.$$

由于上式对任何内点X_0成立，故易证定理中之结论。

注. 1）定理27，定理28中的$\sum_i\|G_i\|_{C^{(t)}(E)}$，$\sum_i\|G_i\|_{C^{(t)}(D)}$只能针对具体情况进行估计，对一般有限单元法的情况，当$D\in S_m(h,\ \theta)$时，往往有估计

$$\sum\|G_i\|_{C^{(t)}(D)}\leqslant M^*(\theta h)^{-t},\tag{Σ}$$

M^*与h，θ，D无关。这种条件简称为(Σ)条件。

2）更一般的条件是

$$\Sigma\|G_i\|_{C^{(t)}(D)}\leqslant J(\theta,h,t).\tag{Σ_J}$$

以后应用(Σ)的命题都可推广成用(Σ_J)的形式，叙述从略。

系1. 设(Σ)条件成立，在定理27的条件下，对$f\in C^{(r)}(D)$有

$$\|f-G(f)\|_{C^{(t)}(E)}\leqslant M\left(\frac{R}{n}\right)^{r-t}\omega_k\left(\frac{R}{n},f,C^{(r)}(D)\right)$$

$$\left\{1+\left(\frac{R}{n\theta h}\right)^t\right\},$$

在定理28的条件下则有

$$\|f-G(f)\|_{C^{(t)}(D)}\leqslant M\left(\frac{R}{n}\right)^{r-t}\omega_k\left(\frac{R}{n},f,C^{(r)}(D)\right)$$

$$\left\{1+\left(\frac{R}{n\theta h}\right)^t\right\},$$

M与t，R，n，θ,h,D无关．□

注：特别当$R/h<M_1<\infty$，M_1为某常数时，上二式分别可改成

$$\|f-G(f)\|_{C^{(t)}(E)}\leqslant M\left(\frac{R}{n}\right)^r\left(\frac{n}{\theta R}\right)^t$$

$$\omega_k\left(\frac{R}{n},f,C^{(r)}(D)\right),$$

$$\|f-G(f)\|_{C^{(t)}(D)}\leqslant M\left(\frac{R}{n}\right)^r\left(\frac{n}{\theta R}\right)^t\omega_k\left(\frac{R}{n},f,C^{(r)}(D)\right).$$

而当$\theta>\theta_0>0$，θ_0为常量时，上二式分别简化成：

$$\|f-G(f)\|_{C^{(t)}(E)}\leqslant M\left(\frac{R}{n}\right)^{r-t}\omega_k\left(\frac{R}{n},f,C^{(r)}(D)\right),$$

$$\|f-G(f)\|_{C^{(t)}(D)}\leqslant M\left(\frac{R}{n}\right)^{r-t}\omega_k\left(\frac{R}{n},f,C^{(r)}(D)\right).$$

有了定理27、定理28，就容易处理分区逼近的类似问题．整个论证是平行的，这时$D=\bigcup_i D_i$，对每一D_i建立上面的定理，相应的$G(f)$，t，r，R，n，$S_{(m)}(X_0)$，E，$C^{(r)}(D)$，θ，h，写成${}^iG(f)$，t_i，r_i，R_i，n_i，$S_{(mi)}({}^iX_0)$，E_i，$C^{(r_i)}(D_i)$，θ_i，h_i，等等．j属于i指数族中的子族：$\{j\}\subseteq\{i\}$，$D'=\bigcup_j D_j$．我们假定D_i间适当划分，并设${}^iG(f)$潜含的参数足够多（例如n_i足够大）使得它们之间充分协调：能定义一$H(f)$，在D_i中与${}^iG(f)$相等，在整个D上有定值（即在D_i相重的地方${}^iG(f)$应相等），并且$H(f)$

$\in C^{(t)}(D')$，$t\geqslant 0$为某非负整数。D'叫协调区域或协调集，t叫协调指数。另外我们设$f\in C^{(r_i)}(D_i)$在D上定义，条件(Σ)成立，并且对$P\in(\dot{P}_{n_i})_{m_i}(D_i)$，在$D_i$上$H(p)=p$。

这里所述的条件总称为条件（Δ）。我们通常处理的问题大都满足条件(Δ)或类似的条件。例如平面三角形剖分中，节点插值只能决定三个参数，而当插值多项式之级大于1时就有多余的参数（多项式系数），它们可在对整体的连续性或一定阶的导数的连续性这些协调条件约制下来待定。对于级为1时，可证明插值是保证整体的连续性的。对高维的划界为平直超平面的多面体剖分，用节点作插补也容易作这类处理。

定理29．在前述(Δ)条件下，设D_i均为拟凸集，则对$f\in C^{(t)}(D')$

$$\|f-H(f)\|_{C^{(t)}(D')}\leqslant M'\sup_j\left(\frac{\mathrm{R}_j}{n_j}\right)^{r_i-t}$$

$$\left\{1+\left(\frac{\mathrm{R}_j}{n_i\theta_j h_j}\right)^t\right\}\omega_j\left(\frac{\mathrm{R}_j}{n_j}\right),$$

这里M'与t，r_j，R_j，θ_j，h_j，n_j无关，

$$\omega_j(\delta)=\omega_k(\delta,\ f,\ C^{(r_j)}(D_j))。\ \square$$

注：1）特别当$\mathrm{R}_j\sim h_j\sim h$，$n_j\geqslant n$，$\theta_j\geqslant\theta$，$r_j=r$时

$$\|f-H(f)\|_{C^{(t)}(D')}\leqslant M'\left(\frac{h}{n}\right)^{r-t}\frac{1}{\theta^t}\omega\left(\frac{h}{n}\right),$$

$$\omega(\delta)=\sup_j\omega_k(\delta,\ f,\ C^{(r)}(D_j))。$$

2）在[22]的附录中证明了一个很细致的结果，它是说对m维的方形网格区D，$f\in C^{(r)}(D)$，则可定义一在格点上的函数$\bar{f}$，它在网格点上与f相同，并且由$\bar{f}$能产生一函数$f_{hl}\in C^{(l)}(D)$，$l\geqslant r$，用[22]中的符号

$$f_{hl}=L_mL_{m-1}\cdots L_1\bar{f},$$

使得 $\|f-f_{hl}\|_{C^{(t)}(D)}\leqslant h^{r-t}C(l)\|f\|_{C^{(r)}(D)}$，

这里$C(l)$为常数，h为超方体的边长。

实际上，作者自己并未悟出，这里的f_{hl}从文中的构造来看，

正是某一分区多项式，而总体又属于$C^{(l)}(D)$，这正是一种高维的Spline。而这些结果显然是定理29的特例，只不过证明方法不同罢了。但是[22]的结果也给我们从另外的角度提供了处理协调性的例子。

3）从定理29来看，对连续性较好的区域D'，以及分割较细的D'（相应用h较小来刻划），$H(f)$ 对f的逼近就较好些。而当连续性较差时，为了一定精度要求，应使相应局部集合 D'分割较细（h较小）来代偿。反映在有限单元法上，对应力、应变或位移梯度较大的地方（例如应力集中附近），分划要密一些，这种做法是很正确的。现在的理论分析与通常的直观想法以及从力学原型来解释是相符的。对连续性较差的地方自然也可提高相应的多项式的级来作另一种补偿。

4）定理29主要是根据定理28的系推导出来的，根据其它的结果（例如定理27），也可得到类似的结果，这里从略。

我们来讨论一下 Spline 的一个特殊问题。

对于一维的样条函数逼近，$S_1(h,\theta)$ 自然没有意义，但是整个定理29处理的方式（从定理27或从定理24，定理25起）可以借用。当然一维的 Spline 还有一些自己的特点，而且在误差估计中曾有一个长久未解决的猜测[18]。作为定理29的补充与旁例，我们较详细一点来讨论它，并作初步推广，同时指出悬而未决的问题的解决。

这时 $D=[a,\ b]$，D_i 之间至多只有一点相重。一种广义的Spline $H(f)$（或写为$H(f,x)$）可以这样来定义：$H(f)\in W_p^{(l)}(D')$，对$p\in(P_{n_i})_1(D_i)$，在D_i上$H(p)=p$。

条件 $H(f)\in W_p^{(l)}(D')$ 是一种推广的总体性的协调要求，而$H(p)=p$可以以如下的方式来达到：

在D_i中有n_i+1个点x_{is}，$S=1,\cdots,n_i+1$，

$$H(f,\ x_{is})=f(x_{is}) \qquad (*)$$

对于传统的 Spline，x_{is}只有两点，即D_i的两个端点，而$n_i=1$。

这时$H(f)$在D_i上可能是一次数为$\bar{n}_i\geqslant n_i$ 的多项式，多余的次

数 $\bar{n}_i - n_i$ 作为保证总体D或D'上协调性的参数。自然也可以用其它潜在参数。

(•)还可作其它推广，例如可改为

$$H^{(q_s)}(f,\ x_{i_s}) = f^{(p_s)}(x_{i_s})$$

为了论述简便计，我们下面只限于以达到 Spline 理论的误差猜测的解决为目标，而这里的方法可以用于更广泛的问题。

定理29*. 设$f \in C^{(r)}([a,\ b])$，$[a,\ b]$分割成区间 $D_i = [X_i,\ X_{i+1}]$，$[a,\ b] = \bigcup_i D_i$，Spline $H(f)$满足条件(•)，$n_i = n$，$\bar{n}_i = \bar{n}$，并且 $H(f) \in C^{(r)}([a,\ b])$，$H^{(\bar{n})}(f) \in C([a,\ b])$，$D_i$ 之长$ah \leqslant h_i \leqslant h$，$a>0$为常数，则有误差估计

$$\|f - H(f)\|_{C^{(t)}([a,\ b])} \leqslant Kh^{r-t}\omega(h),$$

$$\omega(\delta) = \omega_h(\delta,\ f,\ C^{(r)}([a,\ b])),\quad t \leqslant r,$$

K为常数. □

证明. 令F为$C^{(r)}([a,\ b])$之子族，$g \in F$有

$$g(x_{i_s}) = f(x_{i_s}),$$

逐次用 Rolle 定理于$g - H(g)$，可得估计

$$\|g - H(g)\|_{C([a,b])} \leqslant \frac{2^{\bar{n}+1}h^{\bar{n}+1}}{(\bar{n}+1)!}\|g^{(\bar{n}+1)}\|_{C([a,b])}$$

(类似的证法参看〔18〕定理2.3.3之证明，注意这里$H^{(\bar{n}+1)}(g) = 0$)，

因此有

$$\|H(g)\|_{C([a,b])} \leqslant \|g\|_{C([a,b])} + \|g - H(g)\|_{C([a,b])}$$

$$\leqslant \|g\|_{C([a,b])} + \frac{2^{\bar{n}+1}h^{\bar{n}+1}}{(\bar{n}+1)!}\|g^{(\bar{n}+1)}\|_{C([a,b])}.$$

利用 MapkoB 不等式于分段多项式，有

$$\|H(g)\|_{C^{(t)}([a,b])} \leqslant \frac{c_1 \bar{n}^{2t}}{h^t}\Big\{\|g\|_{C([a,b])}$$

$$+ \frac{2^{\bar{n}+1}h^{\bar{n}+1}}{(\bar{n}+1)!}\|g^{(\bar{n}+1)}\|_{C([a,b])}\Big\},$$

这里用到条件$h_i \geqslant ah$.

另一方面，由定理24，有$p \in (\dot{P}_n)_1(D_i)$，使得

$$\|f-p\|_{C([a,b])} \leqslant C_2\left(\frac{h}{n}\right)^r \omega\left(\frac{h}{n}\right),$$

$$\|f-p\|_{C^{(\bar{n}+1)}([a,b])} \leqslant C_3\left(\frac{h}{n}\right)^{r-\bar{n}-1} \omega\left(\frac{h}{n}\right),$$

$$\|f-p\|_{C^{(t)}([a,b])} \leqslant C_2\left(\frac{h}{n}\right)^{r-t} \omega\left(\frac{h}{n}\right),$$

这时令$\|\cdot\|^+ = \|\cdot\|_{C^{(t)}([a,b])}$,

$$\|g\|^- = \frac{C_1 \bar{n}^{2t}}{h^t}\left\{\|g\|_{C([a,b])} + \frac{2^{\bar{n}+1} h^{\bar{n}+1}}{(\bar{n}+1)!}\|g^{(\bar{n}+1)}\|_{C([a,b])}\right\}.$$

因此$\|H(g)\|^+ \leqslant \|g\|^-$，利用S转化引理，有

$$\begin{aligned}\|f-H(f)\|_{C^{(t)}([a,b])} &\leqslant C_2\left(\frac{h}{n}\right)^{r-t} \omega\left(\frac{h}{n}\right) \\ &+ \frac{C_1 \bar{n}^{2t}}{h^t}\left\{C_2\left(\frac{h}{n}\right)^r \omega\left(\frac{h}{n}\right)\right. \\ &\left.+ \frac{C_2 2^{\bar{n}+1} h^{\bar{n}+1}}{(\bar{n}+1)!}\left(\frac{h}{n}\right)^{r-\bar{n}-1} \omega\left(\frac{h}{n}\right)\right\} \\ &\leqslant K h^{r-t} \omega(h).\end{aligned}$$

定理证毕.

注：1）这方法可用于n_i，$\bar{n}_i$是变动的和对一般D'上的估计，并还可用于更广义的Spline逼近，且某些条件还可放宽改善，只不过论述更烦琐一些，这里从略.

2）在已有的工作中，对$\bar{n}_i = 3$，$r = 4$证到

$$\|f-H(f)\|_{C^{(t)}([a,b])} \leqslant K h^{4-t},$$
$$t = 0, 1, \cdots 4.$$

对一般$\bar{n}_i = 2d$，只证到

$$\|f-H(f)\|_{C^{(t)}([a;b])} \leqslant K h^{2d-t-1},$$
$$t = 0, 1, \cdots, 2d-1.$$

人们一直希望得到估计

$$\|f-H(f)\|_{C^{(t)}([a,b])}\leqslant Kh^{2d-t},$$

但只对某些情况证得，而对一般情况并未得证实．定理29*比原希望的结果更好，而对多维的情况，我们还有定理29的一般形式．

5.4. 上节建立的分区多项式$H(f)$一般还不是通常有限单元法所得的解，而其特点更近于传统的Spline．基于变分原理的有限单元法往往是在某$W_p^{(l)}(D)$或$\dot{W}_p^{(l)}(D)$中的最优逼近，是对定解条件进行插值分片多项式对解的中值逼近：

$$M(f)=M(f,\ \|(\dot{P}_{n_i})_{m_i}(D_i)\cap C^{(t)}(D)\|_{W_p^{(l)}(D)})$$

或 $$M(f)=M(f,\ \|\{H(f)\}\|_{W_p^{(l)}(D)}),$$

这里$H(f)\in(\dot{P}_{n_i})_{m_i}(D_i)\cap C^{(t)}(D)$并对$f$之方程的定解条件（$f$值之某一部分）是进行插补而成的广义的Spline（这种Spline的待定参数用来确定对f的最优逼近性）．转化$f\to M(f)$或$f\to H(f)$就是有限化模拟，$M(f)$，$H(f)$的参量是有限的，而对f一般是无限的．t是协调指数．为了方便，我们只考虑范数$\|\cdot\|_{W_p^{(l)}(D)}$，对$\|\cdot\|_{\dot{W}_p^{(l)}(D)}$的处理是类似的，而且可以通过$H(f)$之插值技巧来处理（$M(f)=M(f,\ \|U\|)$表类$U$在范数$\|\cdot\|$意义下对$f$的最优逼近元之一）．

由于$M(f)$之极值性，显然，若有

$$p\in(\dot{P}_{n_i})_{m_i}(D_i)\cap C^{(t)}(D)$$

它满足插值要求（即能模拟f之定解条件），使得

$$\|f-p\|_{W_p^{(l)}(D)}\leqslant\varepsilon,$$

则必 $$\|f-M(f)\|_{W_p^{(l)}(D)}\leqslant\varepsilon.$$

用分区多项式来逼近的优点之一在于它在模拟定解条件时是比较灵活的．

利用定理29可直接得

定理29．** 在定理29的条件下，取D'为D，$t=l$，$R_i\sim h_i=h$，$n_i=n$，$\theta_i\geqslant\theta>0$，则有

$$\|f-M(f)\|_{W_p^{(l)}(D)}=O\left\{\left(\frac{h}{n}\right)^r\left(\frac{n}{\theta h}\right)^l\omega_k\left(\frac{h}{n},f,C^{(r)}(D)\right)\right\}. \square$$

利用嵌入定理可得

定理 29*.** 在上述条件下，当 $1\leqslant p\leqslant p'\leqslant\infty$，$l'\leqslant l-m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)$时

$$\|f-M(f)\|_{W_{p'}^{(l')}(D)}=O\left\{\left(\frac{h}{n}\right)^r\left(\frac{n}{\theta h}\right)^l\omega_k\left(\frac{h}{n},f,C^{(r)}(D)\right)\right\}$$

特别当$\alpha=l-\frac{m}{p}-1\geqslant 0$时

$$\|f-M(f)\|_{C^{(\alpha)}(D)}=O\left\{\left(\frac{h}{n}\right)^r\left(\frac{n}{\theta h}\right)^l\omega_k\left(\frac{h}{n},f,C^{(r)}(D)\right)\right\}. \square$$

注： 1）在实用中，n往往是有界的，即不随$h\to 0$而上升于$+\infty$，故前面的估计式右方可简化为

$$O\left\{\frac{h^{r-l}}{\theta^l}\omega_k(h,f,C^{(r)}(D))\right\}$$

当θ下确界大于零时则简化为

$$O\{h^{r-l}\omega_k(h,f,C^{(r)}(D))\}$$

2）当$\theta\geqslant\theta_0>0, f\in C^{(l)}(D), \alpha=l-\frac{m}{p}-1\geqslant 0$，则当$h\to 0$时$M(f)$一致收敛于$f$，级为$h^\alpha\omega_k(h,f,C^{(l)}(D))$。但是这里$\alpha\geqslant 0$是一个很苛刻的条件。例如平面弹性力学问题中，$l=1$，$m=2$，$p=2$，上述条件就不满足，这时只能有定理29**，定理29***的中值估计，而有限单元法近似解是否在普通意义下收敛于真解（这是经常较关心的问题）还是未知的。

但是应用5.1—5.3的结果与M转化引理可以得到

定理30. 在定理29的条件下，设$r_i\geqslant l, r_j\geqslant s, \omega_i(\delta)=\omega_k(\delta,f,C^{(r_i)}(D_i))$，$\alpha_j=2\lambda+2m_j\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$，$\lambda=\max(0,\ s-l)$，$\beta_j=\lambda+(m_j+1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$，$q\geqslant p\geqslant 1$，则

$$\|f-M(f)\|_{W_q^{(t)}(D')}=O\Big\{\sup_j\Big(\frac{R_j}{n_j}\Big)^{r_j-t}\Big[1+\Big(\frac{R_j}{n_j\theta_jh_j}\Big)^t\Big]\omega_j\Big(\frac{R_j}{n_j}\Big)$$

$$+\Big(\sum_j\frac{n_j^q j}{\theta_j^t jh_j^q j}\Big)\sup\Big(\frac{R_i}{n_i}\Big)^{r_i-t}\Big[1+\Big(\frac{R_i}{n_i\theta_ih_i}\Big)^t\Big]$$

$$\times\omega_i\Big(\frac{R_i}{n_i}\Big)\Big\}. \ \square$$

证明．因为由定理29，存在着统一的$p\in(\dot{P}_n)_{m_i}(D_i)\cap C(D)$

$$\|f-p\|_{W_q^{(t)}(D')}=O\Big\{\sup_j\Big(\frac{R_j}{n_j}\Big)^{r_j-t}\Big[1+\Big(\frac{R_j}{n_j\theta_jh_j}\Big)^t\Big]$$

$$\times\omega_k\Big(\frac{R_j}{n_j},f,C^{(r_j)}(D_j)\Big)\Big\}$$

$$\|f-p\|_{W_p^{(t)}(D)}=O\Big\{\sup_i\Big(\frac{R_i}{n_i}\Big)^{r_i-t}\Big[1+\Big(\frac{R_i}{n_i\theta_ih_i}\Big)^t\Big]$$

$$\times\omega_k\Big(\frac{R_i}{n_i},f,C^{(r_i)}(D_i)\Big)\Big\}$$

同时对任何$t\in(\dot{P}_n)_{m_i}(D_i)$由定理19

$$\|t\|_{W_p^{(t)}(D')}\leqslant C\sum_j\frac{n_j^q j}{\theta_j^t jh_j^q j}\|t\|_{W_p^{(t)}(D)},$$

故由M转化引理即证明了定理．

注：当D'所含单元数$\to\infty$时，$\sum_j\Big(\frac{n_j^q j}{\theta_j^t jh_j^q j}\Big)$是无限上升的，在估计$h_i\to0$时的趋势可能会困难些，但我们可以在某点邻域内只考虑有限个j．另一种方法就是研究实际最感兴趣的$W_\infty^{(t)}(D)$（即$C^{(t)}(D)$）的情况，这样每次只选一个单元来估计而后取某上界即可，这就是下面的定理．

定理30*．在定理条件下($q=\infty$)，则

$$\|f-M(f)\|_{C^{(t)}(D')}=O\Big\{\sup_j\Big(\frac{R_j}{n_j}\Big)^{r_j-t}\Big[1+\Big(\frac{R_j}{n_j\theta_jh_j}\Big)^t\Big]\omega_j\Big(\frac{R_j}{n_j}\Big)$$

$$+\Big(\sup_j\frac{n_j^q j}{\theta_j^t jh_j^q j}\Big)\sup_i\Big(\frac{R_i}{n_i}\Big)^{r_i-t}$$

$$\cdot\left[1+\left(\frac{R_i}{n_i\theta_i h_i}\right)^l\right]_i^{\omega}\left(\frac{R_i}{n_i}\right)\Big\}.\ \square$$

系1. 当 $f\in C^{(r)}(D)$，$R_i\sim h_i\leqslant h$，$\theta_i\geqslant\theta$，$n_i=n$，$m_i=m$，时，有

$$\|f-M(f)\|_{C^{(s)}(D)}=O\left\{\left(\frac{h}{n}\right)^a\frac{1}{\theta^b}\omega\left(\frac{h}{n}\right)\right\},$$

这里 $a=\min(r-s,r-l-\alpha)$，$b=\max(s,\beta+l)$，$\alpha=2\lambda+2m/p$，$\beta=\lambda+(1+m)/p$，$\lambda=\max(0,s-l)$，$\omega(\delta)=\omega_k(\delta,f,C^{(r)}(D))$，$s\leqslant t$（协调指数）。特别当$n\leqslant n_0$，$\theta>\theta_0$时

$$\|f-M(f)\|_{C^{(s)}(D)}=O\{h^\sigma\omega(h)\}$$

$$\sigma=\min(r-s,r-l-\alpha).\ \square$$

系2. 在上述条件下，当 $r-l-\dfrac{2m}{p}\geqslant 0$时，对$h\to 0$，$M(f)$一致收敛于 f，特别是对于平面弹性力学问题（$m=p=2$，$l=1$），当 f 三阶连续可微时，有限单元法是一致收敛的。对于空间问题（$m=3$，$p=2$，$l=1$），则要求f为四阶连续可微。□

注： 1）若更高阶导数存在，$f\in C^{(\sigma)}(D)$，对平面问题还会有

$$\|f-M(f)\|_{C^{(s)}(D)}=O\left\{\frac{h^\sigma}{\theta^\eta}\omega(h)\right\},$$

$$\sigma=\min(r-s,\ r-\max(0,s-1)-3),$$

$$\eta=\max\left(s,\max(0,\ s-1)+\frac{5}{2}\right).$$

自然对$s>0$，协调指数$t\geqslant s>0$，因而分区逼近多项式应该是非线性的，级数足够高。对空间问题也有类似结论。

2）在估计式中用到f的某种连续模，照说f既是未知待求的，它的连续模也是未知的。但是，实际情况并不完全是这样。许多关于数学物理方程的先验估计工作恰恰提供了这方面的素材，方程的解的连续性、可微性及范数可直接通过方程式的系数、自由项及定解条件的相应性质来估计，而不必事先求出方程的解。

常用的有限单元法是基于变分原理的Ritz方法。不同于其它

Ritz 方法是这里用到分区多项式作为坐标函数，它对复杂的边界及定解条件的有限化模拟提供了更多的灵活性，因而比一般差分方法优越。但是这要求相应的数学物理或力学问题有明显的特定形式的变分原理，而这并不是普遍都有的。还有一种情况是即使有变分原理而不便用它，例如用它来形成的有限单元法要较高的多项式，这样计算形式与计算量都会繁多起来，因而人们就用“增维降级”的方法，使之转化成更高维的低级多项式或线性的问题，这时原来的变分原理就难于用上了。这样，Ritz 方法的传统形式不好用了，人们就尝试改造有限单元法为基于虚功原理的 Галёркин 法，在力学的有限单元法中的所谓混合模型就是这样一种方法。这种程式收不收敛呢？误差估计怎样？这自然成为重要的问题。

在第一章中我们提供的一种G转化引理的形式是 Михлин 关于Галёркин法收敛判定定理的精密化，它指出

$$(A_0+K)u=f$$

型的泛函方程在A_0为正定，$A_0^{-1}K$对能量范数$\|\cdot\|_{e(A_0)}$为全连续等条件下，其 Галёркин 近似解之误差与最优逼近的误差是同级的（都指在能量范数$\|\cdot\|_{e(A_0)}$意义下）。因此所有本文中关于直接定理及转化定理之结果都可以用来估计这类 Галёркин 近似解的收敛性，包括相应建立的推广的有限单元法。而且对一些方程 $A_0^{-1}K$ 的全连续性条件第一章中有一些引理与例子可用，详细陈述这里从略。

上述方法也可用来对固有值的逼近研究，结果也是类似的。在第一章中另外一种估计固有值近似解误差的方法是所谓G转化引理，它却是用Ritz 方法来进行的。条件有些不同，但误差级仍不超过解的最优逼近度（也是在能量范数意义下）。因此，也可用本文的结果来处理，特别是利用分区多项式逼近形成的有关的有限单元法，其误差级可列出较明显的形式，细节从略。

从有限化模拟这种观点来研究有限单元法还可有许多具体途径，预计其它转化引理也可能成为一种方案。另外，从实际问题

提出的有限单元法的新问题是很多的，例如不连续体裂隙介质力学与非线性力学中，要研究节理单元的各种模型，要计算非线性程序，对于具间断系数的方程，其正定性、(变型的)全连续性、变分原理及有限单元法的处理都是未完全解决的，这中间有许多重要的研究课题。

5.5. 记$D[m'](m'\leqslant m)$是超平面$x_{m'+1}=\text{const}, \cdots, x_m=\text{const}$.和$D$截成的集合.若所有$D[m']\in S_{m'}(r_1,\theta_1)$，而$D\in S_m(r_0,\theta_0)$，则记$D\in S_{m,m'}\binom{r_0,\theta_0}{r_1,\theta_1}$。记$(P_n)_{m'/m}$为多项式族$\sum a_{i_1\cdots i_{m'}}(x_{m'+1},\cdots x_m)x_1^{i_1}\cdots x_{m'}^{i_{m'}}(0\leqslant i_j\leqslant n)$。

利用嵌入定理可证

定理31. 设$D\in S_{m,m'}\binom{r_0,\theta_0}{r_1,\theta_1}$，$p_n\in(P_n)_{m'/m}\cap W_p^{(l)}(D)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则对$p\leqslant q\leqslant\infty$，$0\leqslant k\leqslant l$有

$$\|p_n\|_{W_q^{(k)}(D)}\leqslant Cn^a\|p_n\|_{W_p^{(l)}(D)},$$

$a=\max\left[0,\ 2\left(\frac{m}{p}-l+k\right)\left(1-\frac{p}{q}\right)\right]$，$C$和$p_n$，$n$无关。□

证明．当$a=0$时，由嵌入定理可直接求证．当$a>0$时，$m>(l-k)p$，因而p_n之任何广义k阶偏导数$D^{(k)}p_n$（或$\partial^k p_n$）$\in L^r(D[m'])$，并且

$$\|D^{(k)}p_n\|_{L^r(D[m'])}\leqslant C_1\|p_n\|_{W_p^{(l)}(D)},$$

这里$D[m']$为任何截割，C_1和p_n，$D[m']$无关，$r=m'p/[m-(l-k)p]$。因此有

$$\|D^{(k)}p_n\|_{C(D[m'])}\leqslant\text{const}.n^b\|p_n\|_{W_p^{(l)}(D)},$$

这里$b=2\left(\frac{m}{p}-l+k\right)$，故有

$$\|D^{(k)}p_n\|_{C(D)}\leqslant\text{const}.n^b\|p_n\|_{W_p^{(l)}(D)},$$

$$\|D^{(k)}p_n\|_{L^q(D)}\leqslant\text{const}.n^{b\left(1-\frac{p}{q}\right)}\|p_n\|_{W_p^{(l)}(D)}.$$

经简单处理即得定理的证明。

注：经详细的处理可找出常数C与r_0，θ_0，r_1，θ_1，m'等的关系。

由定理31也可引出有关的转化定理与反定理。

5.6. 在$W_2^{(l)}(D)$中引入内积

$$(f,g)=(f,g)_{W_2^{(l)}(D)}=\int_D f\cdot g dv+\sum\int_D D^{(l)}f\cdot D^{(l)}g dv.$$

让多项式叙列$\{x_1^{i_1}\cdots x_m^{i_m}\}$按$i_1+\cdots+i_m$的大小排列，对相同的和数排列不作规定，这样正规正交化得一直交多项式序列$\{U_n(X)\}$，$(U_n,U_m)=\delta_n^m$。

记$d(p_n)$是多项式中项的指数和的最大数，则$\{U_n\}$是按$d(U_n)$的大小来排列的，一般$d(U_n)$并不等于n。这时对$f\in W_1^{(l)}(D)$有相应的Fourier展式$f\sim\sum a_nU_n(X)$，$a_n=a_n(f)=(f,U_n)$。

一般说$\{U_n\}$在$W_2^{(l)}(D)$中不是封闭的。但是在一些特定的条件下，封闭方程式是成立的。例如D的边界满足局部Lipschitz条件时，对任何$f\in W_2^{(l)}(D)$，封闭方程可证成立；有时即使边界不很正规，只要函数充分光滑，相应的封闭方程仍然是成立的。

对于f可以造一新的直交多项式系$\{W_n(f)\}$

$$W_n(f)=W_n(X,f)=\frac{1}{C_n(f)}\sum_{d(U_i)=n}a_i(f)U_i(X),$$

$$C_n(f)=\Big(\sum_{d(U_i)=n}a_i(f)^2\Big)^{\frac{1}{2}}=(f,W_n(f)).$$

若$C_n(f)=0$，则定义$W_n(f)\equiv0$。这时有展式$f\sim\sum C_n(f)W_n(f)$和部分和$S_n(f)=\sum_{k=0}^{n}C_k(f)W_k(f)$，而且$S_n(f)=M(f,\|(\dot{p}_n)_m\|W_2^{(l)}(D))$，利用5.3的结果和转化引理$P$和$M$，可求各种估计$\|f-S_n(f)\|_{W_q^{(h)}(D)}$，定理叙述从略。类似2.3的论证，则可以得到下列诸定理。

定理32. 设$D\in C^{[r+1]}$，$f\in W_s^{(r)}H^{(\alpha)}(D)$(即$\omega_1(\delta,f,W_s^{(r)}$

$\cdot(D))=O(\delta^{\alpha}))$，则当$1\leqslant s\leqslant 2$，$r+\alpha-l-m\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\right)>0$时，$S_n(f)\to f$，$D^{(l)}S_n(f)\to D^{(l)}f$，在$D$上几乎处处成立。□

定理33. 设$D\in C^{[l]}$，$f\in C^{[l]}(\bar{D})$，$h(t)\uparrow\infty$，$t/h(t)=O(1)$，

$$\int^{\infty}\left[\omega_1\left[\frac{1}{h(t)},f,C^{[l]}(\bar{D})\right]\right]^2\frac{\log t}{t}dt<\infty,$$

则$S_{[h(n)]}(f)\to f$，$D^{(l)}S_{[h(n)]}(f)\to D^{(l)}f$，在$D$上几乎处处成立。□

定理34. 若下面条件之一成立：

1) 同定理32之条件；

2) $D\in C^{[l]}$，$f\in C^{[l]}(\bar{D})$，$\varepsilon>0$，

$$\int^{\infty}\left[\omega_1\left(\frac{1}{t},f,C^{[l]}(\bar{D})\right)\right]^2(\lg\lg t)^{1+\varepsilon}$$

$$\cdot(\lg t)/t\,dt<\infty,$$

则$S_n(f)\to f$，$D^{(l)}S_n(f)\to D^{(l)}f$按任何排次序在$D$上几乎处处收敛。□

定理35. 若$D\in C^{[l]}$、$f\in C^{[l]}(\bar{D})$

$$\int^{\infty}\left[\omega_1\left(\frac{1}{t},f,C^{[l]}(\bar{D})\right)\right]^2(\lg\lg t)/(t\lg t)dt<\infty,$$ 则

$\sum C_n(f)W_n(f)$，$\sum C_n(f)D^{(l)}W_n(f)$几乎处处可(C,λ)，$\lambda>0$，求和。□

定理36. 设$D\in C^{[r+1]}$，$f\in W_s^{(r)}H^{(\alpha)}(D)$，$1\leqslant s\leqslant 2$，$h(t)\uparrow\infty$，$t/h(t)=0(1)$，$1\leqslant p<2$，$a=r+\alpha-m\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\right)-l$，

$$\int^{\infty}h^{-ap}(t)t^{-p/2}dt<\infty,$$

则$\sum|C_{[h(n)]}(f)|^q<\infty$，对$p\leqslant q<\infty$成立。特别对$p=1$时，上条件导致

$$\sum_{n=1}^{\infty}|C_{[h(n)]}(f)W_{[h(n)]}(f)|<\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|C_{[h(n)]}(f)D^{(l)}W_{[h(n)]}(f)|<\infty$$

几乎处处成立. □

定理37. 设 $D\in G^{[j]}$, $f\in C^{[j]}(\bar{D})$, $j\geqslant l$, $h(t)\uparrow\infty$, $t/h(t)=O(1)$, $1\leqslant p<2$, $a=j-l$,

$$\int^{\infty}\left[\omega_1\left(\frac{1}{h(t)},f,C^{[j]}(\bar{D})\right)\right]^p\frac{dt}{h^{ap}(t)t^{p/2}}<\infty,$$

则 $\sum|C_{[h(n)]}(f)|^q<\infty$ 对 $p\leqslant q<\infty$ 成立. □

注: 对 $p=1$, 定理37有定理36相应的结论.

§6. 依权逼近(续) 方程近似解 M类函数逼近

6.1. 对于带权的多项式有下面的定理:

定理38. 设 $D\in X_m^2(B)$, $p_n\in(p_n)_m$, 则有

$$\|B^{\lambda}p_n\|_{C(D)}\leqslant C_1n^{2(r-\lambda)}\|B^rp_n\|_{C(D)}\quad, \tag{1}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(B^rp_n)\right\|_{C(D)}\leqslant C_2n^2\|B^rp_n\|_{C(D)}, \tag{2}$$

$$\left\|B^r\frac{\partial}{\partial k_i}p_n\right\|_{C(D)}\leqslant C_3n^2\|B^rp_n\|_{C(D)}, \tag{3}$$

这里 $r>\lambda$, 均为非负整数, C_1, C_2, C_3 和 p_n, n 无关. □

我们先来证明定理在一维情况下的一个变型.

引理. 设 $\varphi(x)\in C^{[2]}[a,b]$, 除 a,b 外不等于零, 于零点外 $\varphi'(x)\neq0$, 则对 $p_n\in(p_n)_1$ 有

$$\|\varphi^{\lambda}p_n\|_{C[a,b]}\leqslant C_4n^{2(r-\lambda)}\|\varphi^rp_n\|_{C[a,b]}, \tag{4}$$

$$\left\|\frac{d}{dx}(\varphi^rp_n)\right\|_{C[a;b]}\leqslant C_5n^2\|\varphi^rp_n\|_{C[a;b]}, \tag{5}$$

$$\left\|\varphi^r\frac{d}{dx}p_n\right\|_{C[a;b]}\leqslant C_6n^2\|\varphi^rp_n\|_{C[a;b]}\quad, \tag{6}$$

这里 $r>\lambda$, 均为非负整数, C_4, C_5, C_6 和 p_n, n 无关. □

证明. 实际上, 只要对 $r=\lambda+1$ 证明即可. 我们将用归纳法证明.

$\lambda=0$时，即 Xappuk 的结果在一维空间的结论（参看[12]），只不过在那里 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，此外 $\varphi(x)\neq 0$，但是其证法这里可用（也可参看下面的论证方法）。

现设 $\lambda=\lambda_0$时对任何满足相应条件的 a,b,φ 引理已证。我们要证明它在 $\lambda=\lambda_0+1$时也成立。

先来证明(4)式。显然，只要证明对任何 $x\in[a,b]$存在一邻域 N_x，使得

$$\|\varphi^{\lambda_0+1}p_n\|_{C(N_x\cap[a,b])}\leqslant C_7 n^2\|\varphi^{\lambda_0+2}p_n\|_{C[a,b]},\qquad(7)$$

C_7与 p_n，n 无关，则命题(4)成立．因为只要应用（一个修改的）复盖定理就可完成(4)式的证明。

显然，只要对 x 为 a 和 b 时证明(7)式即可．例如设$x=a$.这时不妨设 $\varphi(a)=0$，因为在相反的情况下，(7)式是显然成立的．这时 $\varphi'(a)\neq 0$，因此 a 在$[a,b]$中之足够小的邻域 M_a 中，或者 $\varphi(x)>0$，或者 $\varphi(x)<0$。例如，为了叙述方便，我们可规定 M_a 中之点满足关系：

$$x\in(a,a+\varepsilon),\ |\varphi'(x)|>\frac{1}{2}|\varphi'(a)|.$$

作函数 $R(x)=(x-a)\varphi^{\lambda_0+1}p_n$，则 $R(x)$为带权 φ^{λ_0+1}的x之 $n+1$次多项式.

因为 $\varphi(x)=\varphi'(a+\theta[x-a])(x-a)$，$0<\theta<1$，$x\in M_a$，所以对 $x\in M_a$

$$|R(x)|\leqslant|\varphi^{\lambda_0+2}p_n|\Big/\min_{x\in \overline{M}_a}|\varphi'(x)|\leqslant\frac{2}{|\varphi'(a)|}\cdot\|\varphi^{\mu_0+2}p_n\|_{C[a;b]},\qquad(8)$$

这里$\overline{M}_a$为M_a之封包。另一方面

$$\varphi^{\lambda_0+1}p_n=\frac{R(x)}{x-a}=\frac{1}{x-a}\int_0^1\frac{d}{dt}R[a+t(x-a)]dt$$

$$=\int_0^1 R'[a+t(x-a)]dt,$$

所以有：对 $x\in M_a$

$$|\varphi^{\lambda_0+1}p_n|\leqslant\max|R'(x)|\,(x\in[a,a+\varepsilon]). \qquad (9)$$

因为(5)对$r=\lambda_0+1$和区间$[a,a+\varepsilon]$是成立的(这是归纳法的假设，这时的b为$a+\varepsilon$)，把它用于$R(x)$，则由(9)式可得

$$|\varphi^{\lambda_0+1}p_n|\leqslant C_8n^2\|R(x)\|_{C[a,a+\varepsilon]},\quad x\in M_a$$

这里C_8与p_n，n无关。

由(8)式即得

$$\|\varphi^{\lambda_0+1}p_n\|_{C(M_a)}\leqslant C_a n^2\|\varphi^{\lambda_0+2}p_n\|_{C[a,b]},$$

这时就不难找到所需的N_a了。

于是(4)式当$\lambda=\lambda_0+1$时已得证。现在证(5)式，即$r=\lambda+1=\lambda_0+2$时之结果。

由于$\varphi\in C^{[2]}$，故存在$Q_n\in(p_n)_1$，使得

$$\|\varphi-Q_n\|_{C[a,b]}\leqslant\frac{\text{cosst}}{n^2},$$

$$\left\|\frac{d}{dx}(\varphi-Q_n)\right\|_{C[a,b]}\leqslant\frac{\text{const}}{n}$$

这时有

$$\left\|\frac{d}{dx}\left[(\varphi-Q_n)\varphi^{\lambda_0+1}p_n\right\|_{C[a,b]}\right.$$

$$\leqslant\frac{\text{const.}}{n^2}\left\|\frac{d}{dx}(\varphi^{\lambda_0+1}p_n)\right\|_{C[a,b]}+\frac{\text{const.}}{n}\left\|\varphi^{\lambda_0+1}p_n\right\|_{C[a;b]}$$

$$\leqslant\text{const}.n\|\varphi^{\lambda_0+2}p_n\|_{C[a,b]},$$

$$\left\|\frac{d}{dx}(\varphi^{\lambda_0+1}Q_np_n\right\|_{C[a,b]}\leqslant\text{const}.\text{n}^2\|\varphi^{\lambda_0+1}Q_np_n\|_{C[a;b]}$$

$$\leqslant\text{const}.n^2(\|\varphi^{\lambda_0+2}p_n\|_{C[a,b]}+\|(\varphi-Q_n)\varphi^{\lambda_0+1}p_n\|_{C[a;b]}$$

$$\leqslant\text{const}.n^2\|\varphi^{\lambda_0+2}p_n\|_{C[a,b]},$$

这样就可证明(5)式。另外，

$$\left\|\varphi^r\frac{d}{dx}p_n\right\|_{C[a,b]}\leqslant\left\|\frac{d}{dx}(\varphi^rp_n)\right\|_{C[a;b]}$$

$$+\left\|p_n\frac{d}{dx}\varphi^r\right\|_{C[a,b]}\leqslant\text{const}.n^2\|\varphi^rp_n\|_{C[a;b]}.$$

这就是(6)式。引理证毕。

现在我们可以来证明定理38了．实际上它的证明和引理的相似，只不过中间需要用到引理的结论．

定理38的证明　只要对$r=\lambda+1$的情况证明即可．用归纳法证．当$\lambda=0$时，这是 Xappuk 的结果．设$\lambda=\lambda_0$时定理是成立的，现证$\lambda=\lambda_0+1$时也成立．

只要证明，对任何$X\in\overline{D}$，存在一邻域N_X使得

$$\|B^{\lambda_0+1}p_n\|_{C(N_X\cap D)}\leqslant \text{const}.n^2\|B^{\lambda_0+2}p_n\|_{C(D)}$$

即可．显然，只要对D之边界Γ之点来证明这不等式就行了．

设$X_0\in\Gamma$，因$\nabla B(X_0)\neq 0$，故有某j_0，例如$j_0=m$，使得$\frac{\partial}{\partial x_m}B(X_0)\neq 0$．因此，由隐函数存在定理，$B(X)=0$存在$X_0=(x_1^0,\cdots,x_m^0)$附近可解出

$$x_m=f(x_1,\cdots,x_{m-1}),\quad x_i^0-2\varepsilon\leqslant x_i\leqslant x_i^0+2\varepsilon,$$

$$i\neq m,\quad x_m^0=f(x_1^0,\cdots,x_{m-1}^0).$$

这时X_0在D之内域$\overset{\circ}{D}$中足够小的邻域M_{X_0}或者满足$x_m>f(x_1,\cdots,x_{m-1})$，或者满足$x_m<f(x_1,\cdots,x_{m-1})$．例如，为了论述方便，我们规定$M_{X_0}$之点满足

$$x_i^0-\varepsilon\leqslant x_i\leqslant x_i^0+\varepsilon,\quad i\neq m;\quad f-\varepsilon\leqslant x_m\leqslant f;$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_m}B(X)\right|>\frac{1}{2}\left|\frac{\partial}{\partial x_m}B(X_0)\right|.$$

作函数$R(x_m)=(f-x_m)B^{\lambda_0+1}p_n$．它是关于$x_m$的带权$B^{\lambda_0+1}$的$n+1$次多项式．因为

$$B(X)=B'_{x_m}(x_1,\cdots,x_{m-1},\ x_m+\theta[f-x_m])(x_m-f),$$

$$0<\theta<1,\quad X\in M_{X_0},$$

故对$x_m\in[f-\varepsilon,\ f]$有

$$|R(x_m)|\leqslant|B^{\lambda_0+2}p_n|/\inf_{X\in M_{X_0}}|B'_{x_m}(X)|$$

$$\leqslant\frac{2}{|B'_{x_m}(X_0)|}\|B^{\lambda_0+2}p_n\|_{C(D)},$$

另一方面

$$B^{\lambda_0+1}p_n=\frac{R(x_m)}{f-x_m}=\frac{1}{f-x_m}\int_0^1\frac{d}{dt}R[f-t(f-x_m)]dx$$

$$=-\int_0^1 R'[f-t(f-x_m)]dt\ ,$$

所以

$$|B^{\lambda_0+1}p_n|\leqslant\max_{f-\varepsilon\leqslant x_m\leqslant f}|R'(x_m)|,\ X\in M_{X_0}\ ,$$

这时利用引理的结论，把$x_1,\cdots,x_{m-1}$固定，就有

$$\|B^{\lambda_0+1}p_n\|_{C(M_{X_0})}\leqslant\text{const}.n^2\|B^{\lambda_0+2}p_n\|_{C(D)}\ ,$$

这样就证明了(1)(式)．(2),(3)式和引理的相应结论的证明是相似的．定理38证毕．

由定理38容易证得

定理39． 设$D,B(X)$满足定理38的条件，则

$$\|B^rp_n\|_{L^q(D)}\leqslant Cn^{2m\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|B^rp_n\|_{L^q(D)},$$

这里r为任何非负整数，$0<p\leqslant q\leqslant\infty$，$C$与$p_n$，$n$无关．□

定理40． 设D，$B(X)\in C^{[l]}(\overline{D})$满足定理38的要求，则

$$\|B^rp_n\|L^q(D)\leqslant Cn^a\|B^rp_n\|_{W_q^{(l)}(D)},$$

这里$a=\max\left[0,2\left(\frac{m}{p}-l\right)\left(1-\frac{p}{q}\right)\right]$，$1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$，当$l=0$时可

$0<p\leqslant q\leqslant\infty$．$C$与$p_n$，$n$无关．□

定理41． 若D，$B(X)\in C^{[s]}(\overline{D})$满足定理38的条件，则有

$$\|D^{(i)}(B^{\lambda}D^{(k)}p_n)\|_{C(D)}\leqslant Cn^b\|B^rp_n\|_{W_q^{(l)}(D)}\ ,$$

这里$s=\max(i,l)$，$r\geqslant\lambda\geqslant0$，$r$，$\lambda$为整数，$p\geqslant1$，$b=2(i+k+r-\lambda)+\max\left[0,2\left(\frac{m}{p}-l\right)\right]$，而当$l=0$时，对$p>0$也成立．$c$与$n$，$p_n$无关．□

用定理6和定理24，24*的证法可得

定理42． 设$D\in x_m^j(B)$满足定理38的条件，$f\in\mathring{W}_\infty^{(r)}(D)$，所有$D^{(i)}B$在边界满足Lipschitz条件，这时有不因$i$，$0\leqslant i\leqslant j$，而变的$p_n\in(p_n)_m$使得

$$\|f - B^r p_n\|_{C^{[i]}(\bar{D})} = O\left\{\frac{1}{n^{j-i}}\omega_1\left(\frac{1}{n}, f, C^{[j]}(\bar{D})\right)\right\}. \quad \square$$

由定理38—42和定理 6，利用转化原理就可以导出一组关于高维多项式依权逼近的转化定理、反定理及最优多项式依权逼近在不同泛函空间的误差估计，另外可像 § 2和 § 5一样建立一组关于带权的直交多项式级数的收敛定理，这里从略.

6.2. 设 A 为线性空间 H 的集合 D_A 上定义的可加齐次算子，求在 $E \subset D_A$ 中方程 $Au=f$ 的解 u_*. 集合 E 的定义包含了某种定解条件. 我们往往在 $E_n \subset E$ 中求 u_* 的近似解. 一种方法就是求 $u_n \in E_n$ 使得 $u=u_n$ 时 $\|A(u_*-u)\|^* = \|Au-f\|^*$ 达到极小，$\|\cdot\|^*$为某种范数，不一定同H中原有的范数相同(假若H是Banach空间的话). $\{u_n\}$就是u_*(相对于$\|\cdot\|^*$)的最小二乘方法近似序列. 现在的问题是设法估计在某种范数$\|\cdot\|^{\cdot}$意义下的误差$\|u_*-u_n\|^{\cdot}$，M转化引理指出下面结果成立.

定理43. 若$\|\cdot\|^* \in p(h^-)$，$\|\cdot\|^{\cdot} \in p(h^+)$，对每个 $g \in E_n$ 都有$\|g\|^{\cdot} \leqslant J_n(\|Ag\|^*)$，$J_n \in (\uparrow_t)$，并且存在$g_n \in E_n$ 使得$\|u_*-g_n\|^{\cdot} \leqslant \varepsilon^+(n)$，$\|A(u_*-g_n)\|^* \leqslant \varepsilon^-(n)$，则

$$\|u_*-u_n\|^{\cdot} \leqslant h^+\{\varepsilon^+(n)+J_n[2h^-\varepsilon^-(n)]\}. \quad \square$$

考虑 H 为函数空间的情况，引入条件

$R\binom{s_1;\, s_2}{q_1;\, q_2}$，对 $u \in E$，有

$$C\|u\|_{W^{(s_1)}_{q_1}(D)} \leqslant \|Au\|^* \leqslant R\left(\|u\|_{W^{(s_2)}_{q_2}(D)}\right)$$

这里 C 为与 u 无关的正的常数，$R(t) \in (\uparrow_t)$，$R(at) \leqslant bR(t)$，b 为与 a 有关的常数.

若 H 为内积空间，改$\|Au\|^*$为$(Au,u)^{1/2}$，则上条件记为$R^*\binom{s_1;\, s_2}{q_1;\, q_2}$.

这时由直接定理与转化定理可得

定理44. 若条件$R\binom{s_1;\, s_2}{q_1;\, q_2}$成立，$E \supset (p_n)_m = E_n$，$u_* \in W^{(h)}_p H^{(a)}(D)$，$D \in C^{[h+1]}$，$p \geqslant 1$，则

$$\|u_* - u_n\|_{W^{(i)}_{(h)}(D)} = 0\left\{\frac{1}{n^{\theta_1}} + n^{\theta_3} R\left(\frac{1}{n^{\theta_2}}\right)\right\},$$

这里 $\theta_1 = k + \alpha - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{h}\right)m - 1$，$h \geqslant p$，$k \geqslant i$；

$\theta_2 = k + \alpha - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_2}\right)m - s_2$，$q_2 \geqslant p$，$k \geqslant s_2$；

$\theta_3 = \max\left[0, 2\left(\frac{m}{q_1} - s_1 + i\right)\left(1 - \frac{q_1}{h}\right)\right]$ $(0 \leqslant i \leqslant s_1)$

$= 2m\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{h}\right) + 2(i - s_1)$ $(i > s_1, q_1 \geqslant h)$。□

定理45. 若条件 $R\binom{s_1, s_2}{q_1, q_2}$成 立，$E_n = (p_n)_m \subset E$，$D \in C^{[k]}$，$u_* \in C^{[k]}(\bar{D})$，则

$$\|u_* - u_n\|_{W^{(i)}_h(D)} = 0\left\{n^{-\theta_1}\omega_1\left(\frac{1}{n}, u_*, C^{[k]}(D)\right)\right.$$

$$\left. + n^{\theta_3} R\left[n^{-\theta_2}\omega_1\left(\frac{1}{n}, u_*, C^{[k]}(D)\right)\right]\right\},$$

这里 $\theta_1 = k - i$，$\theta_2 = k - s_2$，θ_3 与定理44的同。□

定理46. 设$A \in R\binom{s_1, s_2}{q_1, q_2}$为$\bar{D}$上之2λ阶椭圆型微分算子，$E = W_2^{(2\lambda)}(D) \cap \mathring{W}_2^{(\lambda)}(D)$，

$$A = \sum_{j=0}^{2\lambda} A_j^{\alpha_1 \cdots \alpha_m}(X) \frac{\partial j}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}},\quad j = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m,$$

$E_n = (B^\lambda P_n)_m \subset E$，$Au = f \in W_2^{(\eta)}(D)$，$\eta \geqslant 1$，

$u_* \in \mathring{W}_2^{(\lambda)}(D)$，$D \in C^{[k_1]}$，$k_1 = 2\lambda + \max(m, \lambda) + \eta + 1$，

$A_j^{\alpha_1 \cdots \alpha_m} \in C^{[k_2]}(\bar{D})$，$k_2 = j + m + \eta$(若$j < 2\lambda$)，

$k_2 = 2\lambda + \max(m, \lambda) + \eta$(若$j = 2\lambda$)；

则必$\|u_* - u_n\|_{W^{(i)}_h(D)} = 0\{u^{-k-\alpha+i} + n^{\theta_3} R(n^{-k-\alpha+s_2})\}$，

k为致$0 < \mu = 2\lambda + \eta - k - \frac{m}{2} \leqslant 1$之整数，$\alpha = \mu$(若$\mu < 1$)，$\alpha$为任何

小于1之正数(若$\mu=1$)；此外$\theta_3=\max\left[0,\ 2\left(\frac{m}{q_1}-s_1\right)\left(1-\frac{q_1}{h}\right)\right]$,
$i=0$, $1\leqslant q_1\leqslant h\leqslant\infty$, 或$i=0$, $s_1=0$, $0<q\leqslant h\leqslant\infty$;

$$\theta_3=2i+\max\left[0,\ 2\left(\frac{m}{q_1}-s_1\right)\right],\ h=\infty,\ 1\leqslant q_1\leqslant\infty,$$

或$h=\infty$, $s_1=0$, $0<q_1\leqslant\infty$. □

这主要是由于Гусева的结果[23]，这时可知$u_*\in W_2^{(2\lambda+\eta)}(D)$，因而有$u_*\in C^{[k]}(D)$, $\omega_1(\delta,u_*,C^{[k]}(D))=0(\delta^\alpha)$. 而另外由直接定理有$P_n\in(P_n)_m$使得

$$\|u_*-B^\lambda P_n\|_{W_{q_1}^{(s_1)}(D)}=0\{n^{-k-\alpha+s_1}\},$$

$$\|u_*-B^\lambda P_n\|_{W_h^{(i)}(D)}=0\{n^{-k-\alpha+i}\}.$$

又由于Марков型不等式，对$e\in(B^\lambda P_n)_m$有

$$\|e\|_{W_h^{(i)}(D)}\leqslant Cn^{\theta_1}\|e\|_{W_{q_1}^{(s_1)}(D)}\leqslant C'n^{\theta_1}\|Ae\|^*,$$

这里C, C'与n无关. 由定理43即证定理46.

若直接判定了$u_*\in C^{[k]}(D)$，则有像定理45的一般估计.

若H为Hilbert空间, $(Au,\ u)\geqslant0$, $u\in D_A$, $V_n\in E_n\subset E$, 使$u=V_n$时 $(A(u_*-u),\ u_*-u)$ 达极小. 这时M转化引理变成

定理43*. 若$\|*\|^*\in P(h)$, 并有$g_n\in E_n$使得$\|u_*-g_n\|^*\leqslant\varepsilon^+(n)$, $(A(u_*-g_n),\ u_*-g_n)^{1/2}\leqslant\varepsilon^-(n)$, 若对任何$u\in E_n$, $\|u\|^*\leqslant J_n((Au,\ u)^{1/2})$, $J_n(t)\in(\uparrow t)$, 则$\|u_*-v_n\|^*\leqslant h\{\varepsilon^+(n)+J_n[2\varepsilon^-(n)]\}$. □

这时相应地有

定理47. 在定理44—46中，以$R^*\begin{pmatrix}s_1, & s_2\\ q_1, & q_2\end{pmatrix}$代$R\begin{pmatrix}s_1, & s_2\\ q_1, & q_2\end{pmatrix}$, v_n代u_n, E_n为$(B^\lambda P_n)_m$, 则所有结论都成立. □

当$r=\lambda=s_1=s_2=1$, $q_1=q_2$, $i=0$, $h=\infty$时，定理47的结果比Ильин[15]的结果精确，而这里的方法也与他的不同.

下面讨论一个四阶的例子. 研究薄板弯曲的方程

$$AW=\Delta^2w-\frac{h^*}{D^*}\left[T_x\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+2T_{xy}\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}+T_y\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right]$$

$$= \frac{q^*}{D^*}, \quad (*)$$

这里$m=2$，h^*为板厚，D^*为刚度，w为挠度，$q^*=q^*(x, y)$为载荷，T_x，T_{xy}，T_y为中面上的应力．若边界是固结的，当T_x，T_{xy}，T_y充分小时，A在$\mathring{W}_2^{(2)}(D)$中是正定的，相应的泛函（能量）为

$$(Au, u) - 2\left(u, \frac{q^*}{D^*}\right) = F(u)$$

$$= \iint_D \left\{ (\Delta u)^2 + \frac{h^*}{D^*}\left[T_x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2T_{xy}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + T_y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{2q^*}{D^*}u \right\} dxdy,$$

这里内积指$L^2(D)$中的（参看〔24〕）．$F(u)$的极小解即广义解．

显然，在我们的条件下，对$u\in\mathring{W}_2^{(2)}(D)\cap C(D)$有

$$C'\|u\|_{L^2(D)} \leqslant (Au, u)^{1/2} \leqslant C''\|u\|_{W_2^{(2)}(D)}$$

即$A\in R^*\begin{pmatrix}0, & 2\\ 2, & 2\end{pmatrix}$，记这一问题在$(B^2P_n)_2$中得到的Ritz序列为$\{w_n\}$，则由前叙定理得

定理48．若$(*)$在$\mathring{W}_2^{(2)}(D)$中有解$w\in C^{[k]}(D)$，$D\in C^{[k]}$，则在上述条件下有

$$\|w-w_n\|_{W_h^{(i)}(D)} = 0\left\{\frac{1}{n^\lambda}\omega_1\left(\frac{1}{n}, w, C^{[k]}(D)\right)\right\},$$

$$\lambda = \min(k-2, k-i-a),$$

$$a = \max\left[0, 2\left(1-\frac{2}{h}\right)\right], \quad (i=0, h\geqslant 2);$$

$$= 2i+2, \quad (i\geqslant 0, h=\infty). \quad \square$$

利用ГyceBa的结果即得

定理49．若$D\in C^{[1+\eta]}$，T_x，T_{xy}，$T_y\in C^{[4+\eta]}(D)$，$q^*/D^*\in W_2^{(\eta)}(D)$，则在前述条件下有

$$\|w-w_n\|_{W_h^{(i)}(D)}=0\left\{\frac{1}{n^\theta}\right\}$$

这里$\varepsilon>0$，$\theta=\min(\eta+1-\varepsilon,\ 3+\eta-i-\alpha-\varepsilon)$，$\alpha$与上定理的相同。□

6.3. 传统的逼近是用多项式或整函数来逼近，在第一章中我们谈到Walsh和Russell考虑过用有界函数来逼近，一般可以用可微函数类来逼近。因为只要有相应的MapkoB型不等式就可以用转化原则来研究有关的逼近问题而导出一组转化定理或反定理。具有MapkoB型不等式的泛函类叫做M类。下面只列出一些有关M类的例子，有关的转化定理或反定理就不要述及。记$M(\|\cdot\|\leqslant\lambda)$为满足$\|g\|\leqslant\lambda$的$g$的集合。

例1. 设D为m维空间可测集，$0<p\leqslant q<s\leqslant\infty$，$g\in M(\|\cdot\|_{L^s(D)}\leqslant\lambda)$，则

$$\|g\|_{L^q(D)}\leqslant\lambda^a\|g\|^b_{L^p(D)}$$

这里$a=\left(\frac{q-p}{s-p}\right)\frac{s}{q}$，$b=\left(\frac{s-q}{s-p}\right)\frac{p}{q}$。这可由Hölder不等式导出。

例2. 设$D\in S_m$为开有界集，$g\in M(\|\cdot\|_{W_s^{(l)}(D)}\leqslant\lambda)$，$ls>m$ $s>1$，则

$$\|g\|_{L^q(D)}\leqslant C\lambda^a\|g\|^b_{L^p(D)},$$

这里C与g无关，$q\geqslant p\geqslant 1$，$a=\dfrac{ms(q-p)}{q(lsp-mp+mq)}$，

$$b=\frac{(lsp-mp)(q-p)}{q(lsp-mp+mq)}+\frac{p}{q}.$$

例3. 设D为二维开域，边界Γ可求长，

$$\|g\|^*=\left\{\iint_D\left[A\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+B\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+Cg^2\right]dxdy\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|g\|_*=\left\{\int_F\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2dy\right\}^{\frac{1}{2}},$$

这里A、B、$C>0$属于$C(\bar{D})$，F为含于D中的任给定平行于y轴的

直线段，当$q\geqslant 2$，$g\in M(\|\cdot\|_*\leqslant\lambda)\cap M(\|\cdot\|^*<\infty)\cap C(\bar{D})\cap \mathring{W}_\infty^0(D)$时，有

$$\|g\|_{L^q(D)}\leqslant\|g\|^*\left(\log\frac{\lambda}{\|g\|^*}\right)^{\frac{q-2}{q}},$$

C与g和λ无关。(参看〔25〕)。

例4. 若Γ为由$y=y\pm(x)$，$x=a_\pm$组成，这里$y'_\pm(x)$有界，$y_+(x)>y_-(x)$，$q\geqslant 2$，$\sigma(s)>0$属$C(\Gamma)$，

$$\|g\|^*=\left\{\iint_D\left[A\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+B\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2+Cy^2\right]dxdy\right.$$

$$\left.+\int_\Gamma\sigma g^2ds\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|g\|_*=\left\{\int_{y_-(x)}^{y_+(x)}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2dy\right\}^{\frac{1}{2}},$$

则对$g\in M(\|\cdot\|_*\leqslant\lambda)\cap C(\bar{D})\cap W_2^{(1)}(D)$有

$$\|g\|_{L^q(D)}\leqslant\text{const.}\,\|g\|^*\left(\log\frac{\lambda}{\|g\|^*}\right)^{\frac{q-2}{q}}.$$

(参看〔25〕)。

例5. 设$D\in S_m$为开集，$p\geqslant 1$，$s>1$，$l_s>m$，$g\in W_s^{(l)}(D)\cap L^p(D)\cap M(\|\cdot\|_{L_s^{(l)}(D)}\leqslant\lambda)$，$\|f\|_{L_s^{(l)}(D)}$为$\|\sum D^{(k)}f\|_{L^s(D)}$，$\sum$对所有阶为$l$的$k$求和，则

$$\|g\|_{L^q(D)}\leqslant\text{const.}\,\lambda^a\|g\|_{L^p(D)}^b,\quad q\geqslant p,$$

$$a=\frac{m(q-p)}{pq\left(l-\dfrac{m}{s}+\dfrac{m}{p}\right)},$$

$$b=\frac{p}{q}+\frac{\left(l-\dfrac{m}{s}\right)(q-p)}{q\left(l-\dfrac{m}{s}+\dfrac{m}{p}\right)}.$$

(参看〔15〕)。

例6. 设$D\in S_m$为开集，$m'>m-ls$，$g\in W_s^{(l)}(D)\cap L^p(D)\cap M(\|^*\|_{L_s^{(l)}(D)}\leqslant\lambda)$，则

$$\|g\|_{L^q(D[m'])} \leqslant \text{const}.\lambda^a \|g\|^b_{L^p(D)},$$

这里$m \geqslant ls$，$s > 1$，$p \geqslant 1$，$\max(s,p) \leqslant q \leqslant m's/(m-ls)$，

$$a = \left(\frac{m}{p} - \frac{m'}{q}\right) \Big/ \left(l - \frac{m}{s} + \frac{m}{p}\right),$$

$$b = \left(\frac{m'}{q} + l - \frac{m}{s}\right) \Big/ \left(l - \frac{m}{s} + \frac{m}{p}\right).$$

（参看〔15〕）。

例7. 若$D \in S_m$为开，$p > 1$，$0 \leqslant k \leqslant l-1$，$g \in W_p^{(l)}(D) \cap M$ $(\|\cdot\|_{L_p^{(l)}(D)} \leqslant \lambda)$，则

$$\|g\|_{C^{[k]}(D)} \leqslant \text{const}.\lambda^a \|g\|^b_{L^p(D)},$$

$$a = \left(k + \frac{m}{p}\right) \Big/ l, b = \left(l - k - \frac{m}{p}\right) \Big/ l.$$

（参看〔15〕）。

例8. 设$D \in S_m$为开，$0 \leqslant k < l-1$，$p > 1$，$(l-k)p \leqslant m$，$m' > m-(l-k)p$，$p \leqslant q < m'p/[m-(l-k)p]$，则对$g \in W_p^{(l)}(D) \cap M(\|\cdot\|_{L_p^{(l)}(D)} \leqslant \lambda)$有

$$\|g\|_{L_q^{(k)}(D[m'])} \leqslant \text{const}.\lambda^a \|g\|^b_{L^p(D)},$$

$$a = \left(\frac{m}{p} + k - \frac{m'}{q}\right) \Big/ l,$$

$$b = \left(l - k - \frac{m}{p} + \frac{m'}{q}\right) \Big/ l,$$

（参看〔15〕）。

定理50. 若$D \in S_m(r_0, \theta_0)$，$\omega_1(\delta, f, C(\bar{D})) \leqslant \lambda \delta^\alpha$，$1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$，$r = (\lambda^{-1}\|f\|_{L^p(D)})^{p/(p\alpha+m)} \leqslant r$，则$\|f\|_{L^q(D)} \leqslant C\lambda^a \|f\|^b_{L^p(D)}$，这里$a = \dfrac{m}{\alpha p + m}\left(1 - \dfrac{p}{q}\right)$，$b = \dfrac{p\alpha}{p\alpha + m} + \dfrac{p}{q}$，

$$C = \left[\max\left(\left(\frac{m}{\theta_0}\right)^{\frac{1}{p}}, \frac{m}{m+\alpha}\right)\right]^{1-\frac{p}{q}}. \square$$

证明. 实际上对$X \in D$，选一$V = V_m(X, r, \theta_0) \subset D$，这时有

$$f(X)=\frac{m}{r^m\theta_0}\int f(Y)dV_Y-\frac{m}{r^m\theta_0}\int_{V_m}[f(Y)-f(X)]dV_Y,$$

因而

$$|f(X)|\leqslant\frac{m}{r^m\theta_0}\int_{V_m}|f(Y)|dV_Y+\frac{m\lambda}{m+\alpha}r^\alpha$$

$$\leqslant\left\{\frac{m}{\theta_0}\right\}^{1/p}r^{-\frac{m}{p}}\|f\|_{L^p(D)}+\frac{m\lambda}{m+\alpha}r^\alpha$$

$$\leqslant\left(\max\left[\left(\frac{m}{\theta_0}\right)^{1/p},\ \frac{m}{m+\alpha}\right]\lambda^{\frac{m}{\alpha p+m}}(\|f\|_{L^q(D)})^{\frac{p\alpha}{p\alpha+m}}\right),$$

再由不等式

$$\|f\|_{L^q(D)}\leqslant\|f\|_{C(D)}^{1-\frac{p}{q}}\|f\|_{L^p(D)}^{\frac{p}{q}},$$

即证明定理.

注. 〔15〕，〔26〕，〔27〕还有许多不等式可引伸出M类泛函空间，有的不等式利用$B\to Q$方法也可转化为MapkoB 型不等式，复函数论中Hardy型的 Hadamard 三圆定理，Doetsh 的三线定理和三切圆定理都是可产生M类不等式的结果，利用等角写像还可得到其它类型的M类函数族. 所有这一些的论述从略.

参 考 文 献

[1] Н. К. бари. Обобщение неравеностВ С. Н. бернштейна и А. А. Маркова. Изв. АН. СССР. Серия Матем. 18(1954), 159—176.

[2] W. E. Sewell, Degree of Approximation Liy Polynomials in the Complex Domain, 1942.

[3] С. М. Никольский, Неравенства для целых функций конеuной стелени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Трygbl Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38 (1951), 244—278.

[4] И. Ю. Харрик, О приближеннн функций, обращающихся

в нуль на границе области функциями особого вида, матем, сбор. T.37 (79), №.2 (1955) 353--334.

[5] S. Kaczmarz, H. steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa—Lwow, 1935.

[6] С. Б. Стеикин, Об абсолютной сходимости ортогональных рядов, УМН11, №. 3 (1947), 177—178; Метем. об. 29(1951), 225—232; ДАН. 102 (1955), 37—40.

[7] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционльного анализа в математиеской физике, Л. (1950).

[8] A. Зygmund, Trigonometrical series (1935).

[9] С. Н. Бернштейн, О наилуишем приближеним функчий нескольких переменных посредством многочленов или тригонометрических сумм (1951), Сочинения, Т. 11, 540—545.

[10] J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, Mean values of Trigonometric Polynomials, Fundamenta Mathematicae, 28 (1937), 131—166.

[11] E. H. Zarantonello, On Trigonometric Interpolation, Proc. A. M. Soc. 3 (1952), 770—782.

[12] И. Ю. Харрик, Об одном аналоге неравенства Маркова, ДАН, 166 (1956), 203—206.

[13] A. Ф.Тиман, ОБратные Теоремы конструктивной Теории Функций, Заданных на канеином отрезке вещественной оси· ДАН. 116, №.5 (1951), 762—765.

[14] И. П. Натансон, Конструктивная Теория Функций, Гостехиздат, 1949.

[15] Тр. Матем. Инст. Им. В. А. Стеклова, XXXVIII(1951); LIII(1959); LXVI(1962).

[16] 吴学谋，(1) 逼近论与转化分析，1960.

(2) 逼近转化分析的原理、结果与问题，湖北省数学学会年会报告，1961.

(3) 转化原则及其应用，暨南大学泛函分析专门化讲义(程文焕编)，1964.

(4) 关于转化与逼近的一些结果(I)，湖北省数学年会报告，1978.

(5) 转化原则的一种应用和嵌入不等式，国家科技成果，1964.
[17] 吴学谋，分区与统一多项式逼近，武汉大学学报，3 (1977)，13—38.
[18] J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh, The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, 1967.
[19] A. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного перемеменного, Гос. Изд. Физ. Матем. лит. 1960.
[20] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории Аппроксимации, Гостехиздат, 1947.
[21] С. М. Никольский, О продолжении функций многих переменных, Мат. сб. 40 (82) №. 2 (1956) 243—268; О Теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных, УМН Т. ХИ, вып. 5 (101), (1961), 63—74.
[22] В. С. Рябенький и А. Ф. Филиппов, ОБ устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956.
[23] О. В. Гусева, О краевых задачах для сильно эллиптичесих систем. ДАН. 102 (1955), 1069—1072.
[24] С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957.
[25] Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные Методы высшего Анализа, Гостехиздат, 1052.
[26] Hardy, Littlewood and Polya, Inequalities, Cambrige Univ. Press, 1934.
[27] 辻正次，复素变数函数论（日文版）.
[28] 李邦荣，特征函数多项式的嵌入不等式，华中工学院学报，5(1981).
[29] 李邦荣，特征函数多项式逼近的一些问题，华中工学院学报，1(1982).

第三章

带域调和逼近与调和分析

1923年，丹麦的H.Bohr给出了一类概周期函数的定义。原则上，一个函数$f: R\to E$（E是一个$(\varepsilon)G^+$范空间（E，F，$\|\cdot\|$，(ε))），对任意$\varepsilon\in(\varepsilon)$，都存在一个相对稠密的实数$\tau$（概周期）的集合，使不等式$\|f(t+\tau)-f(t)\|<\varepsilon$，当$-\infty<t<\infty$时成立，并称之为概周期函数。所谓点集为相对稠密，就是说：有一$L>0$存在，对于任何一实数a，区间（a，$a+L$）当中一定有该点集之点。因(ε) G^+范空间不同的选择，就有不同的概周期函数。我们这里给出的概念既保持了Bohr原来较朴素的形式，又原则上包括了以后许多推广。当E，F分别为复数域与R时，则是原来Bohr的定义（一致概周期函数），这时(ε)取为$(0,\infty)$。

§1. L^p中用整函数逼近的误差转化最优逼近 FOurier 变换

1.1. 在$z=x+iy$平面上，若函数$f(z)$在$y=y_0$上定义，并且在这直线上对x为L^p——可积，则记为$f(z)\in L^p_{y=y_0}$，并记

$$\|f\|_{L^p_{y=y_0}}=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy_0)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

记(E_σ)为不超过$\sigma\geqslant0$的指数型整函数族。指数型整函数的定义可参看[6]或[7]。

引理. 若$f\in(E_\sigma)$，$1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$，$\omega$，$\mu$为任何实数，则有

$$\|T_f(z)\|_{L^q_{y=a}} \leqslant \left(\frac{2p\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sigma e^{\sigma|a|} \|f\|_{L^p_{y=0}},$$

这里　$T_f(z) = f\sigma\sin\mu + \widetilde{f}' \cdot (\sin\omega - \sin\mu) + f'\cos\omega$，$\widetilde{f}$ 为 f 的共轭函数（参看[7]第142页）。□

证明． 因为我们有

$$|T_f(x+ia)| \leqslant \left(\frac{2p\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \|T_f\|_{L^p_{y=a}}$$

（参看[1]中第102页），并且

$$\|T_f\|_{L^p_{y=a}} \leqslant e^{\sigma|a|} \|T_f\|_{L^p_{y=0}}$$

（参看[1]中第98页），再加上不等式

$$\|T_f\|_{L^p_{y=0}} \leqslant \sigma \|f\|_{L^p_{y=0}}$$

（参看[6]中第214页和[7]中第158页），因而有

$$\|T_f\|_{L^q_{y=a}} \leqslant \sup_{y=a} |T_f(z)|^{1-\frac{p}{q}} \|T_f\|^{\frac{p}{q}}_{L^p_{y=a}}$$

$$\leqslant \left(\frac{2p\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|T_f\|_{L^p_{y=a}}$$

$$\leqslant \left(\frac{2p\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} e^{\sigma|a|} \|T_f\|_{L^p_{y=0}}$$

$$\leqslant \left(\frac{2p\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sigma e^{\sigma|a|} \|f\|_{L^p_{y=0}}.$$

系． 若　$f(z) \in (E_\sigma) \cap L^p_{y=0}$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$，则对任何 $|a| < \infty$ 有 $f^{(k)}$，$\widetilde{f}^{(l)} \in L^q_{y=a}$，$q \geqslant p$，$k = 0, 1, \cdots$；$l = 1, 2, \cdots$，并且

$$\|f^{(k)}\|_{L^q_{y=a}} \leqslant \left(\frac{2p\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sigma^k e^{\sigma|a|} \|f\|_{L^p_{y=0}},$$

$$\left\|\widetilde{f}^{(l)}\right\|_{L^q_{y=a}} \leqslant \left(\frac{2p\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sigma^{l e|a|} \|f\|_{L^p_{y=0}}.$$ □

定义． 我们用 $\Delta^d_c(a, b)$ 记集合：$a<x<b$，$c<y<d$；用 $\overline{\Delta}^d_c(a, b)$ 记它的闭包；$B\Delta^d_c(a, b)$ 记它的边界。若 $c = -d$ 则

把$\Delta_c^d(a, b)$简记为$\Delta_d(a, b)$；若$a=-\infty$，$b=\infty$，则把$\Delta_c^d(a,b)$简记为Δ_c^d，而用Δ_d记Δ_{-d}^d。记$A(\Delta_c^d(a,b))$是$\Delta_c^d(a, b)$中的解析函数族。□

利用上面得到的不等式和第一转化引理可证

定理1. 若$f\in L_{y=0}^p$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，并有$B_\sigma\in(E_\sigma)$使得$\|f-B_\sigma\|_{L_{y=0}^p}\leqslant\varepsilon(\sigma)$，$\varepsilon(t)\searrow 0$，

$$\int^{\infty} t^{\theta-1}e^{td}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt<\infty,\quad \theta=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+k,$$

这里$q\geqslant p$，则有$G(z)\in A(\Delta_d)$，在$y=0$上，它和f几乎处处相等，并且当$y\to\pm d$时，$G^{(\lambda)}(z)$在$L_{y=0}^r$中有极限。例如记为$G_{(\lambda)}(x\pm id)$，这里$\lambda+\dfrac{r-p}{rp}\leqslant k+\dfrac{q-p}{qp}$，

$$\frac{\partial}{\partial x}G_{(j)}(x\pm id)=G_{(j+1)}(x\pm id)\ ,$$

当$j=0$，1，…，$k-2$时处处成立；当$j=k-1$时几乎处处成立（因而可改$G_{(j)}(x\pm id)$为$G^{(j)}(x\pm id)$，$j=0$，1，…，k）。

同时有

$$\|G^{(\lambda)}-B_\sigma^{(\lambda)}\|_{L_{y=a}^r}\leqslant\frac{4}{\log u}\left(\frac{2p}{\pi}\right)^{\frac{r-p}{rp}}\times$$

$$\times\int_\sigma^\infty e^{t|a|}t^{\lambda-1\frac{r-p}{rp}}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt\ .\quad (*)$$

这里$|a|\leqslant d$，$p\leqslant r\leqslant\infty$，$\lambda$为非负整数（不一定小于$k$），只要上式右边之积分收敛即可。□

证明. 因为若$|a|<d$，则

$$K(\sigma,\ a)=\frac{4}{\lg u}\left(\frac{2p}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\int_\sigma^\infty e^{t|a|}t^{\frac{1}{p}-1}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt<\infty\ .$$

故由转化原则有

$$\sup_{|x|<\infty}|B_\mu(x+ia)-B_\eta(x+ia)|\leqslant 2K(\mu,\ a)\ ,$$

对$\mu<\eta$，$|a|<d$成立。因而当$\lambda\to\infty$时，B_λ在Δ_b，$b<d$中一致收敛于某$G(z)\in A(\Delta_b)$。由于b是任何小于d之正数，故$G(z)\in$

$A(\Delta_d)$. 这时在$y=0$上G和f几乎处处相等是显然的(因有共同的收敛序列$\{B_\sigma(x)\}$)。

利用转化定理知不等式(*)对$|a|<d$成立。

同样的证明步骤，知当$\sigma\to\infty$时，$B_\sigma^{(\lambda)}$在$y=\pm d$上在L^r中收敛。例如如定理中所说的，其极限函数为$G_{(\lambda)}(x\pm id)$，这里$p\leqslant q\leqslant r\leqslant\infty$，$\lambda+\frac{r-p}{rp}\leqslant k+\frac{q-p}{qp}$，(因而当$\lambda<k$时可令$r=\infty$)，这时由转化引理有

$$\|G_{(\lambda)}-B_\sigma^{(\lambda)}\|_{L^r_{y=\pm d}}$$

$$\leqslant\frac{4}{\log u}\left(\frac{2p}{\pi}\right)^{\frac{r-p}{rp}}\int_\sigma^\infty e^{td}\ t^{\lambda-1+\frac{r-p}{rp}}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt\ .$$

现在我们来证，对$\lambda+\frac{r-p}{rp}\leqslant k+\frac{q-p}{qp}$有

$$\lim_{y\to\pm d}\|G^{(\lambda)}(x+iy)-G_{(\lambda)}(x\pm id)\|_{L^r_{y=0}}=0\ .$$

实际上，我们有

$$\|G^{(\lambda)}(x+iy)-G_{(\lambda)}(x\pm id)\|_{L^r_{y=0}}\leqslant\|G^{(\lambda)}(x+y)-B_\sigma^{(\lambda)}(x+iy)\|_{L^r_{y=0}}+\|G_{(\lambda)}(x\pm id)-B_\sigma^{(\lambda)}(x\pm id)\|_{L^r_{y=0}}$$

$$+\|B_\sigma^{(\lambda)}(x+iy)-B_\sigma^{(\lambda)}(x\pm id)\|_{L^r_{y=0}}$$

$$\leqslant\frac{8}{\lg u}\left(\frac{2p}{\pi}\right)^{\frac{r-p}{rp}}\left\{\int_\sigma^\infty e^{td}t^{\theta-1}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt\right\}+$$

$$+\|B_\sigma^{(\lambda)}(x+iy)-B_\sigma^{(\lambda)}(x\pm id)\|_{L^r_{y=0}}\ .$$

因而对于任意给定的$\varepsilon>0$，我们可选$N=N(\varepsilon)$，使得$\sigma\geqslant N$时，上面不等式右边第一项小于$\frac{\varepsilon}{2}$。这时我们选充分小之数$\eta=\eta(N,\varepsilon)=\eta(\varepsilon)>0$，使得$d-|y|<\eta$时有

$$\|B_N^{(\lambda)}(x+iy)-B_N^{(\lambda)}(x\pm id)\|_{L^r_{y=0}}<\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

总而言之，对任意给定的$\varepsilon>0$，我们能找到$\eta=\eta(\varepsilon)>0$，对

$d-|y|<\eta$ 有

$$\|G^{(\lambda)}(x+iy)-G_{(\lambda)}(x\pm id)\|_{L^{r}_{y-0}}<\varepsilon\ .$$

这正是所要证的结论。

关系式$\frac{d}{dx}G_{(j)}(x\pm id)=G^{(j+1)}(x\pm id)$的证明是平凡的。

定理证毕。

注意：对极限情况$d=0$也有相应的结果，那时G不再一定是解析函数，定理的形式读者可自行列出来。

对函数集上定义的范数，我们(形式地)引用范数符号$\|g\|^{(\lambda)}=\|g^{(\lambda)}\|$（若$\|g^{(\lambda)}\|$有意义）。以后我们仍引用第一章中介绍的最优逼近元的符号$e=M\ (g,\ \|E\|)$，这时我总是已认定$g\in E$，在E上有范数$\|\cdot\|$定义，并且这种最优逼近元素存在（自然不一定唯一）。

定理2. 设$f(z)\in A(\Delta_0^d)$，在$y=0$，d上分别几乎处处以$f(x)$，$f(x+id)$为边值，$f^{(\lambda)}\in L^{r}_{y}=\xi$，$r\geqslant p\geqslant 1$，$f^{(k)}\in L^{p}_{y-d}$，$f^{(l)}\in L^{q}_{y-\eta}$，$q\geqslant r$，$l\geqslant\lambda$，$0\leqslant\xi\leqslant\eta\leqslant d$，并有$B_\sigma\in(E_\sigma)$使得$\|f^{(k)}-B_\sigma^{(k)}\|_{L^{p}_{y-d}}\leqslant\varepsilon(\sigma)$，$\varepsilon(\sigma)\sigma^{-k}\searrow 0$，则对$M_\sigma=M(f,\ \|(E_\sigma)\|^{(\lambda)}_{L^{r}_{y-\xi}})$有

$$\|f-M_\sigma\|^{(l)}_{L^{q}_{y-\eta}}\leqslant\frac{12.4^k}{\lg u}\left\{\left(\frac{2p}{\pi}\right)^{\frac{q-p}{qp}}\int_\sigma^\infty\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)t^{\theta_1-1}\right.$$

$$e^{t(d-\eta)}dt+2\left(\frac{2r\sigma}{\pi}\right)^{\frac{q-r}{qr}}\sigma^{l-\lambda}e^{\sigma(\eta-\xi)}\left(\frac{2p}{\pi}\right)^{\frac{r-p}{rp}}\int_\sigma^\infty\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)$$

$$\left.t^{\theta_2-1}e^{t(d-\xi)}\,dt\right\},$$

$$\theta_1=\frac{q-p}{qp}-k+l,\quad \theta_2=\frac{r-p}{rp}-k+\lambda.$$

在$y=d$上$f^{(l)}$按定理5的结论定义。□

证明. 令$F=f-B_\sigma$，则$F^{(k-1)}$在$L^{p}_{y-\pm d}$中的连续模$\leqslant\varepsilon(\sigma)\delta$，因而有$G_\sigma\in(E_\sigma)$使得

$$\|F-G_\sigma\|_{L^{p}_{y-d}}=\|f-B_\sigma-G_\sigma\|_{L^{p}_{y-d}}\leqslant\frac{3\varepsilon(\sigma)}{\sigma^k}$$

(参看[7]第五章)。令$K_\sigma = B_\sigma + G_\sigma$，则由转化定理容易证明：

$$\|f - K_\sigma\|^{(l)}_{L^q_{y=\eta}} \leqslant \frac{12.4^k}{\lg u}\left(\frac{2p}{\pi}\right)^{\frac{q-p}{qp}}\int_\sigma^\infty \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)t^{\theta_1 - 1}e^{t(d-\eta)}dt$$

$$= D_1(\sigma);$$

$$\|f - K_\sigma\|^{(\lambda)}_{L^r_{y=\xi}} \leqslant \frac{12.4^k}{\lg u}\left(\frac{2p}{\pi}\right)^{\frac{r-p}{rq}}\int_\sigma^\infty \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)t^{\theta_1 - 1}e^{t(d-\xi)}dt$$

$$= D_2(\sigma).$$

因而由第二转化引理有

$$\|f - M_\sigma\|^{(l)}_{L^q_{y=\eta}} \leqslant D_1(\sigma) + 2\left(\frac{2r\sigma}{\pi}\right)^{\frac{q-r}{qr}}\sigma^{l-\lambda}e^{\sigma(\eta-\xi)}D_2(\sigma).$$

定理证毕。

注意：在边界$y = d$，0上f之导数是指在一个零测度集上修改后（成为连续）的f的导数（或者是广义导数）。

1.2. 我们现在来研究$M(f, \|(E_\sigma)\|_{L^2_{y=d}})$的一些性质，这实际上是对Fourier积分的讨论。

设 $f(x) \in L^p_{y=0}$，$p \geqslant 1$，则定义$f(x)$ 的 Fourier 部分积分为奇异积分

$$\sum\nolimits_\sigma(x, f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\frac{\sin(x-t)\sigma}{x-t}dt.$$

若f存在Fourier变换$F(x)$（例如$f \in L^p_{y=0}$，$1 \leqslant p \leqslant 2$，时$F(x)$就几乎处处存在)，则有

$$\sum\nolimits_\sigma(x, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^\sigma e^{-ixt}F(t)dt.$$

我们来考虑$1 < p < \infty$时的情况．这时

$$\sum\nolimits_\sigma(x, f) = \frac{\sin x\sigma}{\pi}\text{V.P.}\int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)\cos\sigma t}{x-t}dt$$

$$- \frac{\cos xt}{\pi}\text{V.P.}\int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)\sin\sigma t}{x-t}dt.$$

因而由M.Riesz不等式有

$$\left\|\sum_\sigma(x,\ f)\right\|_{L^p_{y=0}}\leqslant 2M_p\|f\|_{L^p_{y=0}},\quad 1<p<\infty,$$

M_p为相应的（在无穷区间上的）M.Riesz常数.

注意到$\sum_\sigma(x,\ f)=M(f,\ \|(E_\sigma)\|_{L^2_{y=0}})\in(E_\sigma)$，则由第三转化引理有

定理3. 1°对$f\in L^p_{y=0}$，$1<p<\infty$，若有$B_\sigma\in(E_\sigma)\cap L^{r_\sigma}_{y=0}$，$1<r_\sigma\leqslant 2$，$\|f-B_\sigma\|_{L^p_{y=0}}\leqslant\varepsilon(\sigma)$，

则必有

$$\|f-\sum_\sigma(x,\ f)\|_{L^p_{y=0}}\leqslant(2M_p+1)\varepsilon(\sigma);$$

2° 若$f\in L^p_{y=0}$，$1<p<\infty$，$f^{(k)}\in L^r_{y=0}\cap L^p_{y=0}$，$1<r\leqslant 2$，则必

$$\|f-\sum_\sigma(x,\ f)\|_{L^p_{y=0}}=O\left\{\sigma^{-k}\omega\left(\frac{1}{\sigma},\ f^{(k)},\ L^p_{y=0}\right)\right\},$$

这里$\omega\left(\frac{1}{\sigma},\ f^{(k)},\ L^p_{y=0}\right)$为$f^{(k)}$在$L^p_{y=0}$中的连续模. 因而对$0\leqslant l\leqslant k$，$q\geqslant p$有

$$\|f-\sum_\sigma(x,\ f)\|^{(l)}_{L^q_{y=0}}=O\left\{\sigma^{l-k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\omega\left(\frac{1}{\sigma},\ f^{(k)},\ L^p_{y=0}\right)\right\}.\ \square$$

证明. 实际上，利用 Paley-Wiener 定理可证$\sum_\sigma(x,B_\sigma)=B_\sigma$，由第一章的$S$转化引理和不等式$\|\sum_\sigma(x,\ f)\|_{L^p_{y=0}}\leqslant 2M_p\|f\|_{L^p_{y=0}}$ 即得1° 的结论.

从[7]，[8]中对有关定理的证明，知存在同一的$B_\sigma\in(E_\sigma)\cap L^r_{y=0}\cap L^p_{y=0}$ 使得

$$\|f-B_\sigma\|_{L^r_{y=0}}\leqslant\frac{\text{const}}{\sigma^k}\omega\left(\frac{1}{\sigma},\ f^{(k)},\ L^r_{y=0}\right),$$

$$\|f - B_\sigma\|_{L^p_{\nu-0}} \leqslant \frac{\text{const.}}{\sigma^k} \omega\left(\frac{1}{\sigma}, f^{(k)}, L^p_{\nu-0}\right).$$

故由1° 之结论可得2°。

系. 若$f \in L^p_{\nu-0}$，$1<p\leqslant 2$，F为f之Fourier变换，则

$$\left\{ \int_{|x|>\sigma} |F(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant (2\pi)^{\frac{2-q}{2q}} \|f - \sum_\sigma (x,f)\|_{L^p_{\nu-0}},$$

这里$q = p/(p-1)$，特别当$f^{(k)} \in L^p_{\nu-0}$时，则有

$$\left\{ \int_{|x|>\sigma} |F(x)|^q dx = O\left\{\sigma^{-k}\omega\left(\frac{1}{\sigma}, f^{(k)}, L^p_{\nu-0}\right)\right\}. \ \square$$

第一不等式是一般的Plancherel定理（参看[9]中第96页）的推论，第二不等式是定理7的推论，是[7]中第 185 页定理 2 的推广。

若$f(x)$为以2π为周期的可积函数，Fourλer 展式为 $\sum a_k \cos kx + b_k \sin kx$，则当 $\sum (a_k^2 + b_k^2)\lg k < \infty$时，其部分和$S_n(x, f)$ 是几乎处处收敛的。又若$\|f - S_n(x, f)\|_{L^2(-\pi;\pi)} = O\{\varepsilon(n)\}$，则$\sum \varepsilon^2(n)/n < \infty$ 包含$\sum (a_k^2 + b_k^2)\lg k < \infty$，所以

$$\int_0^\pi \omega^2(t, f, L^2(-\pi, \pi))\frac{dt}{t} < \infty$$

导致$S_n(x, f)$几乎处处收敛。

对 Fourier 积分也有相似的结果。

定理4. 若 $f \in L^2_{\nu-0}$，$\int_0^c \omega^2(t, f, L^2_{\nu-0})\frac{dt}{t} < \infty$，则$\sum_\sigma (x, f)$几乎处处收敛于$f$. $\square$

证明. 设$F(x)$为$f(x)$之 Fourier 积分，则由定理3之系有

$$\int_{|x|>\sigma} |F(t)|^2 dt \leqslant \text{const.}\ \omega^2\left(\frac{1}{\sigma}, f, L^2_{\nu-0}\right).$$

因此利用部分积分，对$a>0$，有

$$\int_a^\infty \left| F(t)\sqrt{\lg(|t|+2)} \right|^2 dt = \int_0^{\frac{1}{a}} \left|F\left(\frac{1}{u}\right)\right.$$

$$\sqrt{\lg\left(\frac{1}{u}+2\right)}\ \Big|^2\frac{du}{u^2}$$

$$=\lg\left(\frac{1}{u}+2\right)\int_0^u\left|F\left(\frac{1}{y}\right)\right|^2\frac{dy}{y^2}\Big|_{\epsilon\searrow 0}^{\frac{1}{a}}$$

$$+\int_0^{\frac{1}{a}}\frac{\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u}+2}\int_0^u\left|F\left(\frac{1}{y}\right)\right|^2\frac{dy}{y^2}du$$

$$\leqslant \text{const}\cdot\left\{\lg(t+2)\int_t^\infty|F(u)|^2du\ \Big|_a^{N\to\infty}\right.$$

$$\left.+\int_a^\infty\frac{dt}{t+2}\int_t^\infty|F(u)|^2du\right\}$$

$$\leqslant \text{const}.\int_0^c\omega^2(t,\ f,\ L^2_{y=0})\frac{dt}{t}<\infty.$$

同样有

$$\int_{-\infty}^{-a}\left|F(t)\sqrt{\lg(|t|+2)}\right|^2dt<\infty.$$

因此 $F(t)\sqrt{\lg(|t|+2)}\in L^2_{y=0}$，因而由已知的定理（参看[9]中第87页），我们的定理得证。

§2. 带域中解析函数的某些性质 复数域上的 Fourier 变换

2.1. 我们现在来研究带域Δ_d中的解析函数。

定义. 设$f(z)\in A(\Delta_d)$，并且$\|f\|_{L^p_{y=c}}$对$|C|<d$为有界，则我们称$f(z)\in E^*_p(\Delta_d)$。□

引理1. 若$f(z)\in E^*_p(\Delta_d)$，$p>0$，则在$y=\pm d$上，边界值$f(x\pm id)$几乎处处存在，并且$f(x\pm id)\in L^p_{y=0}$，

$$\lim_{y_0\to\pm d}\|f\|_{L^p_{y=y_0}}=\|f(x\pm id)\|_{L^p_{y=0}},\quad (*)$$

$$\lim_{y_0\to\pm d}\|f(x+iy_0)-f(x\pm id)\|_{L^p_{y=0}}=0.\qquad (**)\ □$$

证明. 实际上，作一初等变换 $z=\varphi(w)$，它映单位圆 $|w|<1$ 为 Δ_d，使得 ± 1 和 $\pm\infty$ 对应．这时 $f(\varphi(w))\varphi'(w)^{\frac{1}{p}}$ 显然属于 $E_p(|w|<1)$，也即是属于 H_p．由 $f(\varphi(w))\varphi'(w)^{\frac{1}{p}}$ 在 $|w|=1$ 上几乎处处存在角边界值 $F(e^{i\theta})\in L^p_{(0,2\pi)}$，得知边值 $f(x\pm id)$ 几乎处处存在并且属于 $L^p_{y=0}$．这时(＊)是成立的(参看[10]中对 E_p 族讨论的方法)．由(＊)可以推得(＊＊)（参看[10]中关于 H_p 族的讨论)．

引理2. 若 $f(z)\in E^*_p(\Delta_d)$, $1\leqslant p<\infty$, $d>0$, 则广义Cauchy公式成立：且对 $z\in\Delta_d$ 有

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{-\infty-id}^{\infty-id}\frac{f(t)dt}{(t-z)^{k+1}}-\frac{k!}{2\pi i}\int_{-\infty+id}^{\infty+id}\frac{f(t)dt}{(t-z)^{k+1}}. \ \square$$

这结果当 $p=2$, $k=0$, $f(z)\in c(\bar{\Delta}_d)\cap A(\Delta_d)$ 时是 Paley 和 Wiener 在[11]中证明了的，他们的证法对在我们的情况下的论断也有效（注意引理1的应用）.

用他们的方法还可以证明

引理3. 若 $f(z)\in E^*_p(\Delta_d)$, $d>0$, $1\leqslant p<\infty$, 则广义的 Cauchy 定理成立：

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\int_{-N-id}^{N-id}-\int_{-N+id}^{N+id}f(t)dt\right\}=0. \ \square$$

由引理2可得

引理4. 若 $f(z)\in E^*_p(\Delta_d)$, $d>0$, $1\leqslant p<\infty$, 则对 $z\in\Delta_d$ 有

$$|f^{(k)}(x+iy)|\leqslant\frac{k!\pi}{2}\left(\frac{2}{q-1}\right)^{\frac{1}{q}}\left[(d-y)^{(k+1)(\frac{1}{q}-1)}\|f\|_{L^p_{y=d}}+(d+y)^{(k+1)(\frac{1}{q}-1)}\|f\|_{L^p_{y=-d}}\right],$$

这里 $q=p/p-1$. □

由这论断得知：若函数列 $f_n(z)\in E^*_p(\Delta_d)$, $d>0$, $1\leqslant p<\infty$,

在度量$\|\cdot\|_{E_p^*(\Delta_d)}=\|\cdot\|_{L^p_{y=d}}+\|\cdot\|_{L^p_{y=-d}}$的意义下收敛于$f(z)\in E_p^*(\Delta_d)$，则必在任何$\bar{\Delta}_c$，$c<d$上，$f_n^{(k)}(z)$一致收敛于$f^{(k)}(z)$，$(k=0,1,\cdots)$。

引理3的另一个形式是

引理5. 若$f(z)\in E_p^*(\Delta_d)$，$d>0$，$1\leqslant p<\infty$，则对任何实数c，$|c|\leqslant d$，有

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\int_{-N+ic}^{N+ic}-\int_{-N}^{N}f(t)dt\right\}=0. \quad \square$$

2.2. 利用[1]中的方法可证

定理5. 若$f(z)\in E_p^*(\Delta_d)$，$d>0$，$1\leqslant p<\infty$，则对于正整数k和任何满足$|d_1|\leqslant d$的数d_1，有不因d_1而变的$B_\sigma(z)\in(E_\sigma)$使得

$$\|f-B_\sigma\|_{L^p_{y=d_1}}\leqslant c\omega_k\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

这里c和σ，d_1，f无关。

$$\omega_k\left(\frac{1}{\sigma}\right)=\omega_k\left(\frac{1}{\sigma},\ f,\ L^p_y=d_1\right)$$

$$=\sup_{|h|<\frac{1}{\sigma}}\left\|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f(z+jh)\right\|_{L^p_{y=d_1}},$$

h为实数。□

实际上，令$m=\left[\frac{k+1}{2}\right]+1$，$K_\sigma(x)=\left(\frac{\sin\frac{\sigma x}{2m}}{x}\right)^{2m}$，

$$B_\sigma(x)=\frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty}K_\sigma(u)\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}f(x+ju)du$$

$$=\frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty}A_\sigma(x-u)f(u)du,$$

这里 $c_1=\int_{-\infty}^{\infty}K_\sigma(u)du$，$A_\sigma(t)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}\binom{k}{j}K_\sigma\left(\frac{t}{j}\right)$.

因此有

$$B_\sigma(x+id_1)=\frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty}A_\sigma(x+id_1-u)f(u)du$$

$$=\frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty}K_\sigma(u)\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}$$

$$\cdot f(x+id_1+ju)du.$$

所以有

$$\|f(x+id_1)-B_\sigma(x+id_1)\|_{L^p_{y-0}}$$

$$\leqslant\frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty}K_\sigma(u)\omega_k(|u|)du$$

$$\leqslant c\omega_k\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

系1. 若 $f(z)\in E_p^*(\Delta d)$，$d>0$，$1\leqslant p<\infty$，$f^{(k)}(z)\in L^p_{y-d_1}$，$|d_1|\leqslant d$，则对$0\leqslant l\leqslant k$，$q\geqslant p$，有

$$\|f-B_\sigma\|^{(l)}_{L^q_{y-d_1}}=0\left\{\sigma^{-\theta}\omega_k\left(\frac{1}{\sigma},\ f^{(k)},\ L^p_{y-d_1}\right)\right\},$$

这里$\theta=k-l+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，$B_\sigma\in(E_\sigma)$ 和定理5中的同。□

系2. 若 $f(z)\in E_p^*(\Delta d)$，$d>0$，$1\leqslant p<\infty$，则有 $B_\sigma\in(E_\sigma)$，使得在任何 $\bar{\Delta}_c$，$c<d$，上，$B_\sigma^{(k)}(z)$一致收敛于$f^{(k)}(z)$，这里k为任定的非负整数。□

设 $f(z)\in E_p^*(\Delta_d)$，$d>0$，$1\leqslant p<\infty$，则对$|d_1|\leqslant d$，

$$\sum_\sigma(x+id_1,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin\sigma(x+id_1-t)}{x+id_1-t}dt.$$

利用3.1节中的引理5就有

$$\sum_\sigma(x+id_1,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t+id_1)\frac{\sin\sigma(x-t)}{x-t}dt.$$

因此我们得到

引理. 若$f(z)\in E_p^*(\Delta_d)$，$d>0$，$1<p<\infty$，则

$$\left\|\sum_{\sigma}(z,f)\right\|_{L^p_{y=d_1}} \leqslant 2M_p \left\|f(z)\right\|_{L^p_{y=d_1}}, \quad |d_1|\leqslant d. \ \square$$

因此利用第三转化引理可得

定理6. 若$f(z)\in E^*_p(\Delta_d)$，$d>0,1<p<\infty$,并且有$B_\sigma(z)\in(E_\sigma)\cap L^{r_\sigma}_{y=0}$，$1<r_\sigma\leqslant 2$，使得

$$\left\|f-B_\sigma\right\|_{L^p_{y=d_1}} \leqslant \varepsilon(\sigma),$$

则必致

$$\left\|f-\sum_{\sigma}(z,f)\right\|_{L^p_{y=d_1}} \leqslant (2M_p+1)\varepsilon(\sigma),$$

d_1 为满足$|d_1|\leqslant d$之某数。□

由定理5立刻可导出

系1. 若$f(z)\in E^*_p(\Delta_d)\cap L^r_{y=d_1}$，$d>0$，$1<p<\infty$，$d_1$给定，$|d_1|\leqslant d$，$1<r=r(d_1)\leqslant 2$，则有

$$\left\|f-\sum_{\sigma}(z,f)\right\|_{L^p_{y=d_1}} \leqslant c\omega_k\left(\frac{1}{\sigma},f,\ L^p_{y=d_1}\right).$$

特别当 $f^{(k)}\in L^p_{y=d_1}$时，对$q\geqslant p$，$0\leqslant l\leqslant k$

$$\left\|f-\sum_{\sigma}(z,f)\right\|^{(l)}_{L^q_{y=d_1}} \leqslant c_1\sigma^{-\theta}\omega_\lambda\left(\frac{1}{\sigma},f^{(k)},\ L^p_{y=d_1}\right),$$

这里c,c_1，和σ，d_1无关，λ为某整数，并设 $\theta=k-l+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}>0$。□

由2.1节的引理2有

系2. 若$f\in E^*_p(\Delta_d)$，$d>0$，$1<p\leqslant 2$,则对任何$0\leqslant c<d$，$\sum_{\sigma}^{(k)}(z,f)$在$\bar{\Delta}_c$上一致收敛于$f^{(k)}(z)$，这里k为任给定的非负整数。□

根据定理5系2后面的论述，我们知道对于$f(z)\in E^*_p(\Delta_d)$，$1\leqslant p<\infty$，$d>0$，$\sum_{\sigma}(x+id_1,f)$ 又正是 $f(z)$在 $y=d_1$ 上的Fourier部分积分，$|d_1|\leqslant d$，即

$$\sum_{\sigma}(x+id_1,f(x))=\sum_{\sigma}(x,f(x+id_1)).$$

所以我们可得到

系3. 若$f(z)\in E_2^*(\Delta_d)$，$d>0$，$\int_0^c \frac{\omega^2(t)}{t}dt<\infty$，$\omega(t)=\omega(t,f,L^2_{y=d_1})$，$|d_1|\leqslant d$，则在$y=d_1$上，$\sum_\sigma(z,f)$几乎处处收敛于$f(z)$。□

2.3. 对于$f\in E_p^*(\Delta_d)$，$d>0$，$1\leqslant p<\infty$，在实轴上，误差$|f(x)-\sum_\sigma(x,f)|$是应该有很高的收敛速度的。我们来证实这一点。

设 $f(z)\in E_1^*(\Delta_d)$，$f^{(k)}\in L_{y=\pm d}$，则$f^{(l)}\in L_{y=\pm d}$，$l=0,1,\cdots,k$，并且$\lim\limits_{N\to\infty}f^{(l)}[\pm(N\pm id)]=0$（参看[7]和前面对$E_1^*(\Delta_d)$的讨论）。由2.1节引理5有

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}f(t)dt=\frac{e^{-xd}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}f(t+id)dt.$$

由[11]中关于导数的变式的结果可知，对$x>0$，

$$F(x)=\frac{e^{-xd}}{\sqrt{2\pi}(-ix)^k}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}f^{(k)}(t+id)dt$$

$$=\frac{e^{-xd}}{2\sqrt{2\pi}(-ix)^k}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\Big[f^{(k)}(t+id)-f^{(k)}\Big(t+\frac{\pi}{x}+id\Big)\Big]dt.$$

因此有 $|F(x)|\leqslant(2\sqrt{2\pi}\,x^ke^{xd})^{-1}\,\omega_1\Big(\frac{\pi}{x},\ f^{(k)},\ L_{y=d}\Big)$，$x>0$。

同样可证

$$|F(x)|\leqslant(2\sqrt{2\pi}\,|x|^ke^{|x|d})^{-1}\omega_1\Big(\frac{\pi}{|x|},\ f^{(k)},\ L_{y=-d}\Big),$$

$x<0$。

利用推广的 Plancherel 定理(参看[9])有

$$\|f-\sum_\sigma(x,f)\|_{L^r_{y=0}}\leqslant\frac{1}{(2\pi)^{\frac{r-2}{2r}}}\Big\{\int_{|x|>\sigma}|F(x)|^s dx\Big\}^{\frac{1}{s}},$$

这里 $1<s\leqslant 2$，$r=s/(s-1)$。因此有

定理7. 若$f\in E_1^*(\Delta_d)$，$d>0$，$f^{(k)}\in L_{y=\pm d}$，则

$$\left\|f-\sum_\sigma(x,f)\right\|_{L_{y=0}^r}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi^{1/s}}\left\{\int_\sigma^\infty\frac{\omega_1^s\left(\frac{\pi}{t},f^{(k)},E_1^*(\Delta_d)\right)}{t^{ks}e^{tsd}}dt\right\}^{\frac{1}{s}}. \ \Box$$

因而由第一转化引理有

$$\left\|f-\sum_\sigma(x,f)\right\|_{L_{y=0}^r}^{(l)}$$

$$\leqslant\begin{cases}c\sigma^l e^{-\sigma d}, & k=0\\ ce^{-\sigma d}\sigma^{\frac{1}{s}-k+l}\omega_1^s\left(\frac{\pi}{\sigma},f^{(k)},E_1^*(\Delta_d)\right), & k>0\end{cases}$$

这里c和σ无关，$2\leqslant r<\infty$，$S=\dfrac{r}{r-1}$，l为任何非负整数。$\omega_a(\delta, g, E_p^*(\Delta_d))=\sum\limits_{c_1=\pm d}\omega_a(\delta,g,L_{y=c_1}^p)$。

同样地，若 $f\in E_p^*(\Delta_d)$，$1\leqslant p<\infty$，$f\in L_{y=0}$，$f^{(k)}\in L_{y=\pm d}\cap L_{y=\pm d}^q$，$1<q\leqslant 2$，则几乎处处有

$$F(x)e^{dx}(-ix)^k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{ixt}f^{(k)}(t+id)dt,\quad x>0,$$

$$F(x)e^{-dx}(-ix)^k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{ixt}f^{(k)}(t-id)dt,\quad x<0.$$

这时由一般的 Plancherel 定理有

$$\left\{\int_\sigma^\infty|F(x)|^s dx\right\}^{\frac{1}{s}}\leqslant\left\{\int_{-\infty}^\infty|F(x)e^{xd}x^k|^{ss_1}dx\right\}^{\frac{1}{ss_1}}$$

$$\times\left\{\int_\sigma^\infty(e^{-xd}x^{-k})^{sr_1}dx\right\}^{\frac{1}{sr_1}}$$

$$\leqslant\left[(\eta-1)(2\pi)^{\frac{2-q}{2q}}\right]^{-1}\left\|f^{(k)}\right\|_{L_{y=d}^q}e^{-\sigma d}\sigma^{-k+\theta},$$

这里 $1<s\leqslant 2$，$1<q\leqslant 2, ss_1=\dfrac{q}{q-1}$，$s_1\geqslant 1$，$\dfrac{1}{s_1}+\dfrac{1}{r_1}=1$，$\eta>1$，

$\sigma \geqslant (-k+\theta\eta)/d$，$\theta = \dfrac{q-s(q-1)}{qs}$.

同样有

$$\left\{\int_{-\infty}^{-\sigma} |F(x)|^s dx\right\}^{\frac{1}{s}} \leqslant \left[(\eta-1)\ (2\pi)^{\frac{2-q}{2q}}\right]^{-1} \left\| f^{(k)} \right\|_{L^q_{y=-d}}$$

$$\cdot e^{-\sigma d} \sigma^{-k+\theta}.$$

再利用一次一般的 Plancherel 定理，而后应用第一转化引理就可得

定理7*. 若$f \in E^*_p(\Delta_d)$，$d>0$，$1 \leqslant p < \infty$，$f \in L_{y=0}$，$f^{(k)} \in L_{y=\pm d} \cap L^q_{y=\pm d}$，$1<q\leqslant 2$，则对任何非负整数$l$ 有：

$$\left\| f - \sum_\sigma (x,f) \right\|^{(l)}_{L^r_{y=0}} \leqslant c e^{-\sigma d}\ \sigma^{-k+l+\frac{r-q}{qr}},\ k>0,$$

$$\left\| f - \sum_\sigma (x,f) \right\|^{(l)}_{L^r_{y=0}} = 0\{\sigma^l e^{-\sigma d}\},\quad k=0.$$

这里 $c = \dfrac{(2\pi)^{\theta_1}}{\eta-1} \left\| f^{(k)} \right\|_{E^*_q(\Delta_d)}$，$\theta_1 = \dfrac{(q-2)(r-2)}{4qr}$，$\eta>1$，$r \geqslant 2$，$\sigma \geqslant \left(-k+\dfrac{(r-q)\eta}{qr}\right)/d$. □

§3. 带域中解析函数的某些性质(续) 概周期函数(续)

3.1. 为了研究概周期函数，我们来讨论CTeπaHOB 引入的函数空间的一些性质. Weyl引入的函数空间和 Besicovitch 引入的函数空间中，函数列的极限函数的解析性质不太稳定，而且缺乏一些很重要的不等式，所以在研究概周期函数方面，用它们是没有比用CTeπaHOB 引入的函数空间来得方便.

对于在$y=c$ 上有定义的$\varphi(z)$，若它在任何有限线段上属于L^p，则定义

$$\left\| \varphi \right\|_{S^p_{y=c}} = \left\| \varphi(z) \right\|_{S^p_{1;y=c}}$$

$$= \sup_{|x|<\infty}\left[\frac{1}{l_0}\int_{x+ci}^{x+l_0+ci} |\varphi(z)|^p |dz|\right]^{\frac{1}{p}},$$

l_0 为某给定的正的常数（若不发生歧义，一般我们不把它标写出来）.

定义. 若 $\varphi(z)\in A(\Delta_d)$，$\|\varphi\|_{S^p_{y=c}}$ 对 $|c|<d$ 有界，则称 $\varphi(z)\in S_p(\Delta_d)$.（当$d=0$ 时，一般我们理解$S_p(\Delta_d)$即为$S^p_{y=0}$，而不谈它的解析性）. □

引理1. 若 $f(z)\in S_p(\Delta_d)$，$p>0$，$d>0$，则在 $y=\pm d$ 上 $f(z)$几乎处处具有角极限值

$f(x\pm id)\in S^p_{y=0}$，并且有

$$\lim_{t\to\pm d}\|f\|_{S^p_{y=t}}=\|f\|_{S^p_{y=\pm d}},\qquad (\cdot)$$

$$\lim_{y\to\pm d}\|f(x+iy)-f(x\pm id)\|_{S^p_{y=0}}=0.\quad (\cdot\cdot)\ \square$$

证明. 对于任何给定的有限区间 (a,b)，我们可以定两数 a'，b'使得$a'<a<b<b'$，这时由$f(z)\in S_p(\Delta_d)$，故$\int_{a'}^{b'}|f(x+iy)|^p dx$对$|y|<d$为有界. 由于被积函数非负，所以重积分

$$\iint_{\Delta_d(a',b')} |f(z)|^p dxdy<\infty .$$

因而 $\int_{-d}^{d}|f(x+iy)|^p\, dy$

对$x\in[a',b']$几乎处处有限. 这时可找到a''，b''使得 $a'\leqslant a''<a<b<b''\leqslant b'$,

$$\int_{-d}^{d}|f(x_0+iy)|^p dy<\infty,\quad x_0=a'',\ b''.$$

这时沿 $\Delta_c(a'',b'')$之边界 $B\Delta_c(a'',b'')$ 的积分

$$\int_{B\Delta_c(a'',b'')} |f(z)|^p|dz|$$

对$0<c<d$为有界. 因此$f(z)\in E_p(\Delta d(a'',b''))$，所以在$y=\pm d$，$a\leqslant x\leqslant b$上，$f(z)$几乎处处有边界值. 由于$(a,b)$是任意给定的区

间，故$f(z)$在$y=\pm d$上几乎处处有角边界值。

又由于a''，b''分别可以任意接近a,b，故由E_p之性质容易证得

$$\lim_{y\to\pm d}\int_a^b |f(x+iy)|^p d\,x=\int_a^b |f(x\pm id)|^p\,dx. \qquad (\#)$$

利用这一等式就可证明

$$\lim_{y\to\pm d}\int_a^b |f(x+iy)-f(x\pm id)|^p dx=0\ .$$

我们现在来证明等式(·)。若(·)不正确，则有一充分小的正数ε及一序列$y_n\to d$(或$-d$，但为确定起见我们只讨论一种情况，另一种情况的讨论相同)，使得

$$\sup_{|x|<\infty}\int_x^{x+l_0} (|f(t+id)|^p-|f(t+iy_n)|^p)dt>\varepsilon\ .$$

因而存在一点x_0使得

$$\int_{x_0}^{x_0+l_0}(|f(t+id)|^p-|f(t+iy_n)|^p)\,dt>\frac{\varepsilon}{2}.$$

令$y_n\to d$，这时显然和等式(#)矛盾。同样可证(··)式。证毕。

引理2. 若$f(z)\in S_p(\Delta_d)$，$d>0$，$p\geqslant1$,则对任何有限的x_0，积分

$$\int_{x_0-id}^{x_0+id} f(z)dz$$

存在，因而对任何有限数a，b，Cauchy定理成立：

$$\int_{B\Delta_d(a;b)} f(z)dz=0,$$

这里在$y=\pm d$上$f(z)$由其角边界值定义。 □

实际上，我们选一x_1，使得在$z=x_1\pm id$, $f(z)$有有限角边界值，这时积分

$$\int_{x_1-id}^{x_1+id} |f(z)|\,|dz|$$

存在。为了叙述方便，不妨设$x_1>x_0$。这时利用古典的Cauchy定理于$B\Delta_\delta^{\delta'}(x_0,x_1)$，$B\Delta_{-\delta}^{-\delta'}(x_0,x_1)$，$0<\delta<\delta'<d$,并经简单计算可得

$$\left|\int_{x_0\pm\delta i}^{x_0\pm\delta' i} f(z)dz\right| \leqslant \int_{x_0}^{x_1} |f(x\pm i\delta') - f(x\pm i\delta)|\,|dx| + \int_{x_1\pm\delta i}^{x_1\pm\delta' i} |f(z)|\,|dz|.$$

因此由引理1之等式（••）容易证得

$$\lim_{\delta,\delta'\to d}\left|\int_{x_0\pm\delta i}^{x_0\pm\delta' i} f(z)dz\right| = 0.$$

引理证毕。

引理3. 若 $f(z)\in S_p(\Delta_d)$，$p\geqslant 1$，$d>0$，则对任何c_1，c_2，$|c_1|$，$|c_2|\leqslant d$，有广义Cauchy定理：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left\{\int_{-T+ic_1}^{T+ic_1} - \int_{-T+ic_2}^{T+ic_2} f(z)dz\right\} = 0. \ \square$$

证明. 为不失一般性，设$c_1 = d$，$c_2 = -d$. 由引理 2 知对任何正数λ有

$$\int_{\partial\Delta_d(-\lambda;\lambda)} f(z)dz = 0.$$

因而有

$$\int_T^{T+l_0} d\lambda \int_{\partial\Delta_d(-\lambda;\lambda)} f(z)dz = 0.$$

因为

$$\int_T^{T+l_0} d\lambda \int_{-\lambda+id}^{\lambda+id} f(z)dz = \int_{-T}^{T} f(x+id)dx +$$

$$+\int_T^{T+l_0} f(x+id)(T+l_0-x)\,dx$$

$$+\int_{-T-l_0}^{-T} f(x+id)(T+l_0+x)dx$$

$$= I_1 + I_2 + I_3;$$

$$\int_T^{T+l_0} d\lambda \int_{-\lambda-id}^{\lambda-id} f(z)dz = \int_{-T}^{T} f(x-id)dx + I_4 + I_5;$$

$$\int_T^{T+l_0} d\lambda \int_{-\lambda-id}^{-\lambda+id} f(z)dz = i\int_{-d}^{d} dt \int_T^{T+l_0} f(-\lambda+it)d\lambda$$

$$= I_6;$$

$$\int_T^{T+l_0} d\lambda \int_{\lambda-id}^{\lambda+id} f(z)dz = i\int_{-d}^{d} dt \int_T^{T+l_0} f(\lambda+it)d\lambda = I_7,$$

这里$\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}I_i = 0$，$i=2$，3，…，7. 因而引理得证.

3.2. 我们来讨论在Степанов引入的函数空间逼近度的转化.

引理1. 若$f\in(E_c)$，$p>0$，$q\geqslant\max(p,1)$，则当$\sigma\geqslant\frac{1}{l_0}$时有

$$\|T_f(z)\|_{S^q_{y=\pm d}} \leqslant [l_0(1+p)\sigma]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\sigma e^{cd}\|f\|_{S^p_{y=0}}$$

（参看1.1.节的符号）. □

这是因为对$\varphi\in(E_c)$存在БерНшТейН型不等式

$$\|T_\varphi(z)\|_{S^r_{y=0}} \leqslant \sigma\ \|\varphi\|_{S^r_{y=0}},\quad 1\leqslant r\leqslant\infty$$

（参看[6]，[7]）. 由这不等式容易证明：对$\sigma\geqslant\frac{1}{l_0}$有

$$\|\varphi\|_{S^\lambda_{y=0}} \leqslant [l_0(\eta+1)\sigma]^{\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\lambda}}\|\varphi\|_{S^\eta_{y=0}},\quad \lambda\geqslant\eta>0.$$

另一方面下面不等式是成立的：

$$\|\varphi\|_{S^r_{y=\pm d}} \leqslant e^{cd}\|\varphi\|_{S^r_{y=0}},\quad 1\leqslant r\leqslant\infty,$$

（参看[6]第98页）.

由这一引理可得

引理2. 在上引理的条件下

$$\left.\begin{array}{l}\|f^{(k)}\|_{S^q_{y=\pm d}}\\ \|\widetilde{f}^{(k)}\|_{S^q_{y=\pm d}}\end{array}\right\} \leqslant [l_0(p+1)\sigma]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\sigma^k e^{cd}\|f\|_{S^p_{y=0}} \left\{\begin{array}{l}k\geqslant 0;\\ k\geqslant 1.\end{array}\right.$$ □

利用这些不等式，由Степанов型空间的完全性和第一转化引理可以导出一系列结论. 例如

定理8. 设$f\in S^p_{y=0}$，$p>0$，并有$B_c\in(E_c)$使得$\|f-B_c\|_{S^p_{y=0}} \leqslant\varepsilon(\sigma)$，$\varepsilon(t)\searrow 0$，

$$E(\lambda) = C\int_\lambda^\infty t^{\theta-1}e^{td}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt<\infty,$$

这里$c=4ap[l(p+1)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(\mathrm{ig}u)^{-1}$，$\theta=k+\frac{q-p}{pq}$，$q\geqslant\max(p,1)$，

$a_p=1$（若$p\geqslant 1$），　$a_p=2^{\frac{1}{p}-1}$（若$p<1$），$d>0$，k为非负整数。

这时必有$G(z)\in A(\Delta_d)$，它在$y=0$上和$f(x)$几乎处处相等，$G^{(j)}(z)\in S_\infty(\Delta_d)$，j=0，1，…，$k-1$；$G^{(k)}(z)\in S_q(\Delta_d)$。在$y=\pm d$上$\frac{d}{dx}G^{(j)}=G^{(j+1)}$，对$j=0$，1，…，$k-2$，处处成立，对$j=k-1$几乎处处成立。当$\sigma\geqslant\frac{1}{l_0}$时

$$\|G^{(k)}-B_c^{(k)}\|_{S^q_{y=\pm d}}\leqslant E(\sigma)。\square$$

若$d=0$，在上面叙述中取掉$G(z)$在Δ_d的解析性，则结论仍然成立。$k=0$时，可讨论$q\geqslant p$之情况。

这结果对于共轭函数也有相应的形式。

这定理证明的方法和定理1的相似。主要是由于引理2和第一转化引理，知对$u^{-\frac{1}{2}}\lambda\geqslant\sigma\geqslant\frac{1}{l_0}$，

$$\|B_\lambda^{(j)}-B_c^{(j)}\|_{C(\bar{\Delta}_d)}\leqslant E(\sigma),\quad j<k,$$

$$\|B_\lambda^{(k)}-B_c^{(k)}\|_{S^q_{y=\pm d}}\leqslant E(\sigma)。$$

令$\lambda\to\infty$，像定理1论证中一样进行讨论，就可导致定理的结论。

CТепанов　范数有一个特点：当$\lambda\leqslant\eta$时，$\|\cdot\|_{S^\lambda_{y=0}}\leqslant\|\cdot\|_{S^\eta_{y=0}}$。所以对$q\leqslant p$的转化定理是平凡的。而对$L^p_{y=0}$空间，这种情况恰恰是最难处理的，它不像有限区间上的L^p空间有明显的嵌入不等式。

由定理8和第二转化引理就可得下面关于最优逼近的结论。

设$G(z)\in A(\Delta_0^d)$，在$y=0$和$y=d$上分别以$G(x)\in S^p_{y=0}$，$p>0$和$G(x+id)\in S^q_{y=0}$为角边界值，并且有$B_c\in(E_c)$，$\sigma\geqslant\frac{1}{l_0}$，使得

$$\|G-B_c\|_{S^q_{y=d}}\leqslant\varepsilon(\sigma)\searrow 0,$$

$$D(\lambda)=\frac{4a_p}{\lg u}\int_\lambda^\infty[l(p+1)\sigma]^{\frac{1}{p}-1}e^{td}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}<\infty,$$

$$\eta=\max[q,\ \max(p,1)],$$

则必

$$\|G-M_c\|_{S^q_{y=d}}\leqslant\{\varepsilon(\sigma)+2a_p[l(p+1)\sigma]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}e^{\sigma d}D(\sigma)\},$$

这里$M_\sigma=M(f,\ \|(E_\sigma)\|_{S^p_{y=0}})$。

这一结果在$d=0$时也成立，那时要取消 $G(z)$ 的解析性的断言，并且$\max(p,1)$可改为p。

利用转化引理就可以求得在 $y=d$ 上在其他度量下之误差估计。

下面我们转到用一般非周期的三角多项式来逼近的情况的讨论。用$L^p_{y=c}$空间来讨论概周期函数(参看[1]是没有什么作为的，因为若$f(z)$在$y=c$上为概周期函数，只要不恒为零，则对$0<p<\infty$，必有$\|f\|_{L^p_{y=c}}=\infty$)。

定义。对于复数序列$\{\lambda_j^{(i)}\}$，$i=0,1,\cdots$；$j=0,1,\cdots,i$，作一非降函数$\Lambda(t),t\in[0,\infty)$，使得

$$\Lambda(n)\geqslant\max_{\substack{0\leqslant m\leqslant n\\0\leqslant i\leqslant m}}|\lambda_i^{(m)}|.$$

简称 $\Lambda(t)$为$\{\lambda_j^{(i)}\}$ 的特征函数（自然不唯一），并记为 $\Lambda(t)\in K\{\lambda_j^{(i)}\}$。 □

定理 8 的一个直接推论是：

系1. 设$f\in S^p_{y=0},p>0$,并有三角多项式序列$B_n(z)=\sum_{j=0}^{n}a_j^{(n)}\cdot e^{\lambda_j^{(n)}z}$ （$a_j^{(i)}$，$\lambda_j^{(i)}$为复数），使得$\|f-B_n\|_{S^p_{y=0}}\leqslant\varepsilon(n)$，$\varepsilon(t)$ 对$t\in[0,\infty)$非升，并且

$$\int^\infty\Lambda(t)^\theta e^{\Lambda(t)d}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}<\infty,\ \Lambda(t)\in K\{\lambda_j^{(i)}\},$$

$$\theta=\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda}+k,\ \lambda=\max[q,\ \max(p,1)],\ q>0,$$

则必有$G(z)\in A(\Delta_d)$,它在$y=0$上和$f(x)$ 几乎处处相等；$G^{(j)}(z)\in S_\infty(\Delta_d)$，$j=0,1,\cdots,k-1$；$G^{(k)}(z)\in S_q(\Delta_d)$；$G^{(\eta)}(z)\in S_\infty(\Delta_c)$，$c<d$，$\eta=1,2,\cdots$；在边界$y=\pm d$上，$\frac{d}{dx}G^{(j)}=$

$G^{(j+1)}$对$j=0, 1, \cdots, k-2$，处处成立，对$j=k-1$几乎处处成立。并且当$\Lambda(t)\geqslant\frac{1}{l_0}$时，

$$\|G^{(\xi)}-B_n^{(\xi)}\|_{S^{q^*}_{y=h}}\leqslant\frac{4a_p}{\lg u}\int_n^\infty[l_0(1+p)\Lambda(t)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda^*}}$$

$$\times\Lambda(t)^\xi e^{\Lambda(t)|h|}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t},$$

这里$\lambda^*=\max[q^*, \max(p,1)]$，$q^*>0$，而$\xi$（非负整数）和$h$（$0\leqslant|h|\leqslant d$）是任意的，只要上式右边的积分收敛即可。□

对于共轭函数也有相应的结果。

只要注意到$B_n(z)\in(E_{\Lambda(n)})$即知系1是正确的。

定义. 对于给定的序列$\{\lambda_j^{(i)}\}$，记$(T_n\{\lambda_j^{(i)}\})$是所有$\sum\limits_{i=0}^n a_i^{(n)}\cdot e^{\lambda_i^{(n)}z}$型的多项式的总体。□

由第二转化引理和系1可以知道下面结论是正确的.

设$G(z)\in A(\Delta_0^d)$，在$y=0$和$y=d$上几乎处处分别以$G(x)\in S^p_{y=0}$，$p>0$，和$G(x+id)\in S^q_{y=0}$，$q>0$，为角边界值，并且有多项式序列

$$B_n(z)\in(T_n\{\lambda_j^{(i)}\})\text{使得}$$

$$\|G-B_n\|_{S^d_{y=d}}\leqslant\varepsilon(n),$$

$\varepsilon(t)$对$t\in[0,\infty)$为非升，并且

$$D(\sigma)=\frac{4a_p}{\lg u}\int_\sigma^\infty[l(p+1)\Lambda(t)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda}}e^{\Lambda(t)d}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}<\infty,$$

$$\lambda=\max[q, \max(p,1)], \quad \Lambda(t)\in K\{\lambda_j^{(i)}\},$$

则必

$$\|G-M_n\|_{S^q_{y=d}}\leqslant a_q\varepsilon(n)+2a_pa_q[l(p+1)\Lambda(n)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda}}e^{\Lambda(n)d}D(n),$$

这里 $\quad M_n=M(f, \|(T_n\{\lambda_j^{(i)}\})\|_{S^p_{y=0}})$.

当$d=0$时上面结论相应成立（并且对λ改为$\max(q,p)$也有相

应结果)。

直接由本节引理2可得一有趣的结果：

系2. 设$f(x)\in S^p_{y=0}$，$p>0$，并且有序列$B_n(z)\in(T_n\{\lambda_j^{(i)}\})$使得

$$\|f-B_n\|_{S^p_{y=0}}\leqslant\varepsilon(n)\to 0.$$

若$\Lambda(t)\in K\{\lambda_j^{(i)}\}$，$\Lambda(t)\leqslant\Lambda$，则必有一整函数$G(z)\in(E_\Lambda)$在$y=0$上和$f(x)$几乎处处相等，并且

$$\|G^{(k)}(z)-B_n^{(k)}(z)\|_{S^q_{y=h}}\leqslant a_p[l(p+1)\Lambda]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\Lambda^k e^{\Lambda|h|}\varepsilon(n),$$

$$q\geqslant\max(p,1),\ k\geqslant 0,\ |h|<\infty;$$

$$\|\tilde{G}^k(z)-\tilde{B}_n^{(k)}(z)\|_{S^q_{y=h}}\leqslant a_p[l(p+1)\Lambda]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\Lambda^k e^{\Lambda|h|}\varepsilon(n),$$

$k\geqslant 1$. □

系1，系2描述了函数的概周期区域展延的情况。

3.3. 我们来讨论 Степанов 引入的函数空间中的一些直接定理。

若$f(z)\in S^p_{y=c}$，定义连续模

$$\omega_k(\delta,\ f,S^p_{y=c})=\sup_{|h|\leqslant\delta}\left\|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}f(z+jh)\right\|_{S^p_{y=c}},$$

h为实数。

这种连续模具有普通连续模的许多性质。例如：

$$\omega_k(0,\ f,\ S^p_{y=c})=0;\ \omega_k(t,\ f,\ S^p_{y=c})$$

对t非降；若 $f^{(\lambda)}\in S^p_{y=c}$，$p\geqslant 1$，则

$$\omega_{k+\lambda}(\delta,\ f,\ S^p_{y=c})\leqslant\delta^\lambda\omega_k(\delta,\ f^{(\lambda)},\ S^p_{y=c});$$

若n为非负整数，$p\geqslant 1$，则有

$$\omega_k(n\delta,\ f,\ S^p_{y=c})\leqslant n^k\omega_k(\delta,\ f,\ S^p_{y=c}).$$

对$S_p(\Delta_d)$也有类似于定理5的定理。

定理9. 设$f\in S_p(\Delta_d)$，$p\geqslant 1$，$d\geqslant 0$，则有$B_\sigma\in(E_\sigma)$使得

$$\|f-B_\sigma\|_{S^p_{d-h}} \leqslant C\omega_k\left(\frac{1}{\sigma},\ f,\ S^p_{d-h}\right),$$

这里$|h|\leqslant d$，k为正整数，B_σ和k，f有关，和h无关，C和σ，f无关。□

证明．令$m=\left[\frac{k+1}{2}\right]+1$，$K_\sigma(z)=\left(\frac{\sin\frac{\sigma z}{2m}}{z}\right)^{2m}$，

$$B_\sigma(z)=\frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty}A_\sigma(z-u)f(u)du,\quad c_1=\int_{-\infty}^{\infty}K_\sigma(u)du,$$

$$A_\sigma(t)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}\binom{k}{j}K_\sigma\left(\frac{t}{j}\right).$$

容易证明$B_\sigma\in(E_\sigma)$。

为不失一般性，设$h=d$。我们现在来证明关系式

$$B_\sigma(x+id)=\frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty}K_\sigma(u)\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}f(x+id+ju)du. \qquad (*)$$

为此我们采用3.1节中引理3的证明方法．由3.1节引理2可知：对任何有限正数λ有

$$\int_{B\Delta_0^d(-\lambda,\ \lambda)}A_\sigma(z-u)f(u)du=0.$$

因而有

$$\int_T^{T+l_0}d\lambda\int_{B\Delta_0^d(-\lambda,\lambda)}A_\sigma(z-u)f(u)du=0.$$

因为

$$\int_T^{T+l_0}d\lambda\int_{-\lambda+id}^{\lambda+id}A_\sigma(z-u)f(u)du$$

$$=\int_{-T}^{T}A_\sigma(z-t-id)f(t+id)dt$$

$$+\int_T^{T+l_0}A_\sigma(z-t-id)f(t+id)(T+l_0-t)dt$$

$$+\int_{-T-l_0}^{T} A_\sigma(z-t-id)f(t+id)(T+l_0+t)dt$$

$$=I_1+I_2+I_3;$$

$$\int_T^{T+l_0} d\lambda\int_{-\lambda}^{\lambda} A_\sigma(z-u)f(u)du=\int_{-T}^{T} A_\sigma(z-t)f(t)dt$$

$$+I_4+I_5;$$

$$\int_T^{T+l_0} d\lambda\int_{-\lambda}^{-\lambda+id} A_\sigma(z-u)f(u)du$$

$$=i\int_0^d dt\int_T^{T+l_0} A_\sigma(z+\lambda-it)$$

$$\times f(-\lambda+it)d\lambda=I_6;$$

$$\int_T^{T+l_0} d\lambda\int_{\lambda}^{\lambda+id} A_\sigma(z-u)f(u)du$$

$$=i\int_0^d dt\int_T^{T+l_0} A_\sigma(z-\lambda-it)\times f(\lambda+it)d\lambda=I_7.$$

由定理的条件容易证得 $\lim\limits_{T\to\infty} I_i=0$,

$i=2,\cdots,7$.

因此有

$$B_\sigma(x+id)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{c_1}\int_{-T}^{T} A_\sigma(x+id-t-id)f(t+id)dt$$

$$=\frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} A_\sigma(x-t)f(t+id)dt.$$

由$A_\sigma(t)$之定义，经过换元即得(*)式。

注意对Стеланов范数，广义Minkowski不等式是成立的：若对任何t，$|t|<\infty$，$g(x,\ t)\in S^p_{y-c}$，$p\geqslant 1$，则有

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty} g(x,\ t)dt\right\|S^p_{y-c}\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\left\|g(x,\ t)\right\|S^p_{y-c}dt,$$

只要对几乎处处的$x\in y=c$，$g(x,\ t)\in L_{y-0}$即可。

由等式(*)就得

$$\|f(x+id)-B_\sigma(x+id)\|_{S^p_{y-0}}$$

$$\leqslant\frac{1}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty} K_\sigma(u)\omega_h(|u|,f,S^p_{y-d})du$$

$$\leqslant C\,\omega_k\left(\frac{1}{\sigma},\ f,\ S^p_{y-d}\right),$$

这里

$$c\leqslant\frac{\sigma_k}{c_1}\int_{-\infty}^{\infty}K_\sigma(t)\ \left(t+\frac{1}{\sigma}\right)^k dt=O(1).$$

定理证毕

利用定理 9 和第二转化引理就可证明下面的论断是成立的。

设 $f(z)\in A(\Delta_0^d)$，$d>0$，在 $y=0$ 和 $y=d$ 上分别几乎处处以 $f(x)$，$f(x+id)$ 为边值，$f^{(\lambda)}\in S^r_{y=\xi}$，$f^{(k)}\in S^p_{y=d}$，$f^{(l)}\in S^q_{y=\eta}$，$q\geqslant r\geqslant p\geqslant 1$，$l\geqslant\lambda$，$0\leqslant\xi\leqslant\eta\leqslant d$，并且有 $B_\sigma\in(E_\sigma)$ 使得 $\|f^{(k)}-B_\sigma^{(k)}\|S^p_{y=d}\leqslant\varepsilon(\sigma)$，$\varepsilon(\sigma)\sigma^{-k}\searrow 0$，则对 $M_\sigma=M\left(f,\ \left\|(E_\sigma)\right\|^{(\lambda)}_{S^r_{y=\xi}}\right)$ 有

$$\left\|f-M_\sigma\right\|^{(l)}_{S^q_{y=\eta}}=O\left\{\int_\sigma^\infty\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)t^{\theta_1-1}e^{t\,(d-\eta)}dt\right.$$

$$\left.+\sigma^{\theta_2}e^{\sigma(\eta-\xi)}\int_\sigma^\infty\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)t^{\theta_3-1}e^{t\,(d-\xi)}dt\right\}$$

$$\theta_1=\frac{q-p}{qp}-k+l,\quad\theta_2=\frac{q-r}{qr}+l-\lambda,$$

$$\theta_3=\frac{r-p}{rp}-k+\lambda.$$

证法和定理 2 的相同，而且有相似的系数估计，因为在估计系数时可以用下面三个引理。

A°) 若 $f(x)\in S^p_{y=0}$ 能表成下面形式：

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x-t)h(t)dt+F_c(x),$$

这里 $h(x)\in S^p_{y=0}$，$F_c(x)\in(E_c)\cap S^p_{y=0}$，$p\geqslant 1$，$g(x)$ 为 Крейн核（参看[7]），则对充分大的 $\sigma\geqslant c$ 有 $B_\sigma\in(E_\sigma)$ 使得

$$\|f-B_\sigma\|_{S^p_{y=0}}\leqslant 4\pi^{-1}\|h\|_{S^p_{y=0}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}$$

$$\times \mathrm{I_m}\{e^{-i\alpha(2k+1)\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(2k+1)\sigma} g(x)dx\},$$

这里α为相应于$g(x)$的某一参数(参看[7])。

$B°$) 若f，$f^{(r)}\in S^p_{y=0}$，$p\geqslant 1$，则对$\sigma>0$，有$B_\sigma\in(E_\sigma)$，使得

$$\|f-B_\sigma\|_{S^p_{y=0}}\leqslant\frac{4}{\pi\sigma^r}\|f^{(r)}\|_{S^p_{y=0}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

若f，$\widetilde{f}^{(r)}\in S^p_{y=0}$，$p\geqslant 1$，则对$\sigma>0$，有$B_\sigma\in(E_\sigma)$使得

$$\|f-B_\sigma\|_{S^p_{y=0}}\leqslant\frac{4}{\pi\sigma^r}\|\widetilde{f}^{(r)}\|_{S^p_{y=0}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{kr}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

$C°$) 若$f,f^{(r)}\in S^p_{y=0}$，$p\geqslant 1$，则对$\sigma>0$，有$B_\sigma,B^*_\sigma\in(E_\sigma)$使得

$$\|f-B_\sigma\|_{S^p_{y=0}}\leqslant\frac{3}{\sigma^r}\omega_1\left(\frac{1}{\sigma},\ f^{(r)},\ S^p_{y=0}\right),$$

$$\|f-B^*_\sigma\|_{S^p_{y=0}}\leqslant\frac{\pi}{2\sigma^r}\omega_2\left(\frac{3}{\sigma},\ f^{(r)},\ S^p_{y=0}\right).$$

若f，$\widetilde{f}^{(r)}\in S^p_{y=0}$，$p\geqslant 1$，则对$\sigma>0$，有$B_\sigma,B^*_\sigma\in(E_\sigma)$使得

$$\|f-B_\sigma\|_{S^p_{y=0}}\leqslant\frac{3}{\sigma^r}\omega_1\left(\frac{1}{\sigma},\widetilde{f}^{(r)},\ S^p_{y=0}\right),$$

$$\|f-B^*_\sigma\|_{S^p_{y=0}}\leqslant\frac{\pi}{2\sigma^r}\omega_2\left(\frac{3}{\sigma},\ \widetilde{f}^{(r)},\ S^p_{y=0}\right).$$

$A°$)—$C°$) 的证明和Axuezep对$L^p_{y=0}$的证明一样(参看[7]第五章)。看来这三引理本身也是很有意义的。

同样地由$A°$)可以证得

$D°$) 若$f(z)\in S_p(\Delta_d)$，$p\geqslant 1$，$d>0$，$f(z)$在$y=0$上取实数值，$\mathrm{Re}f$在Δ_d中有界，则对充分大之σ有$B_\sigma\in(E_\sigma)$，使得

$$\|f-B_\sigma\|_{S^p_{y=0}}\leqslant\frac{4}{\pi}\|\mathrm{Re}f\|_{S^p_{y=d}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}\times\frac{1}{\mathrm{ch}(2k+1)\sigma d}.$$

由这一结论，应用转化引理就知道有：

设 $f(z)\in S_p(\Delta_d)$，$p\geqslant 1$，$d>0$，$f(z)$ 在 $y=0$上取实数值，$\mathrm{Re}f$在Δ_d中有界，则对任何 $0<c<d$，和非负整数k，$f^{(k)}(z)$ 在$\bar{\Delta}_d$上有界（即$f^{(k)}\in S_\infty(\Delta_c)$）。

3.4. 若$f(z)$ 在$y=c$上的任何有限区间上p次可积，则定义

$$\|f\|_{W^p_{y=c}}=\lim_{l_0\to\infty}\|f\|_{S^p_{y=c}},$$

$$\|f\|_{B^p_{y=c}}=\overline{\lim_{T\to\infty}}\left\{\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|f(x+ic)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

（关于l_0，参看 $S^p_{y=c}$的定义。关于这些范数有关的性质和原来的定义，参看[1]）。

当$p\geqslant 1$时，一般的Minkowski不等式是成立的。所以对W^p，B^p空间，上节的三个引理A°）—C°）相应的形式也是成立的。

要把定理9推广于W^p，B^p空间，则必须相应的广义Cauchy定理成立。

定义 设$f(z)\in A(\Delta^{a_2}_{a_1})$,对于任何$\lambda>0$,$f(z)\in E_1(\Delta^{a_2}_{a_1}(-\lambda,\lambda))$，并且

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_t^{t\pm 1}|f(x+ia_j)x^{-2([\frac{k+1}{2}]+1)}|dx=0,\quad j=1,2,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\int_{\Delta^{a_2}_{a_1}}\int_{(t;\,t\pm 1)}|f(z)z^{-2([\frac{k+1}{2}]+1)}|dxdy=0,$$

则称$f\in A_k(\Delta^{a_2}_{a_1})$。□

若$f\in S_p(\Delta^{a_2}_{a_1})$，$p\geqslant 1$(即$\|f\|_{S^p_{y=c}}$对 $a_1<c<a_2$为有界)，则显然$f\in A_k(\Delta^{a_2}_{a_1})$，$k$为任何正整数。

由定理9的证法容易得到

定理9*. 设$f\in A_k(\Delta^{a_2}_{a_1})\cap E^{(j)}_{y=a_j}$，$j=1,2$，$E^{(j)}_{y=a_j}$为$L^p_{y=a_j}$，$S^p_{y=a_j}$，$W^p_{y=a_j}$或者$B^p_{y=a_j}$，$p\geqslant 1$，则有$B_\sigma\in(E_\sigma)$。使得

$$\|f-B_\sigma\|_{E^{(j)}_{y=a_j}}\leqslant c_k\omega_k\left(\frac{1}{\sigma},f,E^{(j)}_{y=a_j}\right),\quad j=1,2,$$

这里c_k和a_j,σ,f无关；

$$\omega_k\left(\frac{1}{\sigma}, f, E^{(j)}_{y=a_j}\right)=\sup_{|h|<\frac{1}{\sigma}}\left\|\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}\right.$$

$$\left.\times f(z+lh)\right\|_{E^{(j)}_{y=a_j}},$$

h为实变数. □

注: $E^{(1)}_{y=a_1}$和$E^{(2)}_{y=a_2}$可以是不同类型的空间. 例如: $E^{(1)}_{y=a_1}$可以是$L^p_{y=a_1}$或$S^p_{y=a_1}$, 而$E^{(2)}_{y=a_2}$可以是$W^p_{y=a_2}$或$B^p_{y=a_2}$, 但B_σ却是不变的.

要考虑W^p和B^p空间中的误差转化一般是比较困难的, 否则得的是一些较平凡的结果. 首先由于W^p和B^p的极限函数是非常不稳定的, 而且W^p还是不完全的空间(参看[1], [2]); W^p和W^q以及B^p和B^q之间的不等式也很难求得.

若$f\in(E_\sigma)$, 则

$$\|f^{(h)}\|E_{y=\pm d}\leqslant\sigma^h e^{\sigma d}\|f\|_{E_{y=0}},$$

这里$E_{y=c}$为$W^p_{y=c}$或者$B^p_{y=c}$, $p\geqslant1$ (参看[6]).

由这一不等式我们猜测下面结论是成立的:

设$f\in E_{y=0}$, 并有$B_\sigma\in(E_\sigma)$ 使得

$$\|f-B_\sigma\|_{E_{y=0}}\leqslant\varepsilon(\sigma)\searrow0,$$

$$\int^\infty t^{h-1}e^{td}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt<\infty,$$

则有$G(z)\in A(\Delta_d)$, $\|f-G\|_{E_{y=0}}=0$,

$$\|G^{(h)}-B^{(h)}_\sigma\|E_{y=\pm d}\leqslant\frac{4}{\lg u}\int_\sigma^\infty t^{h-1}e^{td}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt,$$

在$y=\pm d$上, $G^{(h)}$以角边界值定义.

3.5. 这一节我们讨论和概周期函数关系更密切的一些问题.

定义. 设$f(z)\in A(\Delta^{a_2}_{a_1})$, 且对任何$\lambda>0$, $f\in E_1(\Delta^{a_2}_{a_1}(-\lambda,\lambda))$, 并且

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\int_t^{t\pm1}f(x+ia_j)dx=0,\qquad j=1,\ 2,$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\iint\limits_{\Delta_{a_1}^{a_2}(t,t\pm1)} f(z)dxdy=0,$$

则称$f\in U(\Delta_{a_1}^{a_2})$. 若上二式中 f 改为 $|f|$ 时成立，则称 $f\in U^*(\Delta_{a_1}^{a_2})$。

显然，若 $f\in s_p(\Delta_{a_1}^{a_2})$，$p\geqslant1$，则$f\in U^*(\Delta_{a_1}^{a_2})$。若$f\in U(\Delta_{a_1}^{a_2})\cap U(\Delta_{a_2}^{a_3})$，则$f\in U(\Delta_{a_1}^{a_3})$。

利用3.1节引理3的证法可得

引理．若$f\in U(\Delta_{a_1}^{a_2})$，则广义 Cauchy 定理成立：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left\{\int_{-T+ia_1}^{T+ia_1}-\int_{-T+ia_2}^{T+ia_2}f(z)dz\right\}=0。\square$$

定义．若 f 在$y=c$上任何有限区间 L 可积，并且对一切实数λ，极限

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T+ic}^{T+ic}f(z)e^{-i\lambda z}dz=a_\lambda(f)=a_\lambda(f)_{y=c}$$

存在，则称$f(z)$在$y=c$上为U 概周期函数．设 $\{\lambda\}$ 为上面极限不等于零的λ的集合，则简称$f\in U\{\lambda\}_{y=c}$；特别当$\{\lambda\}$为可数集$\{\lambda_n\}$时，记为$f\in U\{\lambda_n\}_{y=c}$。集合$\{\lambda\}$叫做$f(z)$在 $y=c$ 上的 Fourier 指数，相应的$a_\lambda(f)$ 叫做 $f(z)$ 的 Fourier 系数；形式记号 $\sum\limits_\lambda a_\lambda(f)e^{i\lambda z}$叫做$f(z)$在$y=c$上的Fourier展式。$\square$

由上面的引理立刻可以得到

定理10．若 $f(z)\in U^*(\Delta_{a_1}^{a_2})\cap U\{\lambda\}_{y=a_1}$，则必 $f(z)\in U\{\lambda\}_{y=a_2}$，并且$a_\lambda(f)_{y=a_1}=a_\lambda(f)_{y=a_2}$。$\square$

即 Fourier 指数和 Fourier 系数都不变．

注意：当 $y\neq0$时，我们的 Fourier 系数的定义和一般教本上的有些不同．

若 $f\in U\{\lambda_n\}_{y=c}$，不失一般性，我们可把指数集 $\{\lambda_n\}$ 补成对称的，使得$\lambda_{-k}=-\lambda_k$，而让补充的指数对立的Fourier系数等于零．这时相应的Fourier展式亦相应地就改记为

$$f\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{\lambda_n}(f)e^{i\lambda_n z}.$$

定义．若空间E为空间C，S^p，W^p，B^p之一，若$f\in E$，并有三角和序列

$$\sum_{k=-n}^{n} C_k^{(n)} e^{i\lambda_k^{(n)} x}$$

在E空间中收敛于f，则称f为 E 概周期函数(参看[1]和[2])．□

定理11．设$f\in U^*(\Delta_0^{d_1})\cap U^*(\Delta_{d_2}^0)\cap U\{\lambda_n\}_{y=0}$，$d_2>0>d_1$，$a_0\,(|f|)_{y=d_j}=k_j<\infty$，$j=1,2$，并且

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n d_1}<\infty,\quad \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_{-n} d_2}<\infty,$$

则$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_{\lambda_n}(f)_{y=0} e^{i\lambda_n x}$一致收敛于一致概周期函数$G(x)$（定义见[1]），并且有误差估计：

$$\left|G(x)-\sum_{k=-n}^{n} a_{\lambda_k}(f)_{y=0} e^{i\lambda_k x}\right|\leqslant K_1\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{\lambda_k d_1}+$$

$$+K_2\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{\lambda_{-k} d_2}.$$

若f在$y=0$上为E概周期函数，E为C，S^p，W^p，B^p，$p\geqslant 1$之一，则G和f在E空间中一致，即$\|G-f\|_E=0$．□

证明．利用定理10可知对$n\geqslant 0$有

$$|a_{\lambda_n}(f)_{y=0}|\leqslant K_1 e^{\lambda_n d_1},\quad |a_{\lambda_{-n}}(f)_{y=0}|\leqslant K_2 e^{\lambda_{-n} d_2}.$$

故第一个论断成立．

利用E概周期函数的唯一性定理（参看[1]和[2]），第二个论断就得到证明．　证毕．

系．在上定理的条件下，若

$$K_1\sum_{l=n+1}^{\infty} e^{\lambda_l d_1}+K_2\sum_{l=n+1}^{\infty} e^{\lambda_{-l} d_2}\leqslant \varepsilon(n),$$

$\varepsilon(t)\searrow 0$,

$$\int^{\infty} \Lambda(t)^k e^{\Lambda(t) d}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}<\infty,$$

$\Lambda(t)\in K\{\lambda_n\}$（见3.2节定理8后的定义），则$G(x)$可解析地延拓到$\Delta_d$，并在每条直线$y=c$，$|c|\leqslant d$上都是一致概周期函数

$$G(z)\sim\sum a_{\lambda_n}(f)_{y=0}e^{i\lambda_n z}$$

在$\overline{\Delta_d}$上都成立，而且

$$\sup_{y=\pm d}\left|G^{(k)}(z)-\sum_{l=-n}^{n}(i\lambda_l)^k a_{\lambda_l}(f)_{y=0}e^{i\lambda_l z}\right|$$

$$\leqslant\frac{4}{\lg u}\int_0^\infty\Lambda(t)^k e^{\Lambda(t)d}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}. \square$$

这由定理 8 的推论即可证明.

因此，只要$\{\lambda_n\}$满足一定条件，例如λ_n上升的速度很高，则$f(z)$的概周期性区域可以延拓(以至到$\Delta_{d_1}^{d_2}$之外去).

定理12. 设$f\in U^*(\Delta_0^{d_2})\cap U^*(\Delta_{d_1}^0)\cap V\{\lambda_h\}_{y=0}$，$d_2>0>d_1$，$\lambda_{k+1}-\lambda_k>a>0$，$a$与$k$（任何整数）无关，$a_0(|f|)_{y=d_j}=K_j<\infty$，$j=1$，2，并且

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{2\lambda_n d_1}<\infty,\quad\sum_{n=0}^{\infty}e^{2\lambda_{-n}d_2}<\infty,$$

则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{\lambda_n}(f)_{y=0}e^{i\lambda_n x}$$

在$S^2_{y=0}$中收敛于一S^2概周期函数$G(x)$，并且

$$\left\|G-\sum_{k=-n}^{n}a_{\lambda_k}(f)_{y=0}e^{i\lambda_k x}\right\|_{S^2_{y=0}}$$

$$=O\left\{\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}(e^{2\lambda_k d_1}+e^{2\lambda_{-k}d_2})\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

因而若f在$y=0$为E概周期函数，E为S^p，W^p，B^p，$p\geqslant1$之一，则G和f在E空间中一致，$\|G-f\|_E=0$. $\square$

证明. 设$S_n=\sum\limits_{k=-n}^{n}a_{\lambda_k}(f)_{y=0}e^{i\lambda_k x}$，则由$\lambda_{k+1}-\lambda_k>a>0$，可得到

$$\|S_n - S_m\|_{S^2_{y=0}} \leqslant \text{const.} \left\{\sum_{k=m}^{n} a^2_{\lambda_k}(f)_{y=0}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

这一不等式的证明可在[1]中找到（参看[1]中178页—180页）。由$S^2_{y=0}$的完全性，E概周期函数的唯一性定理和不等式

$$|a_{\lambda_n}(f)_{y=0}| \leqslant K_1 e^{\lambda_n d_1}, \quad |a_{\lambda_{-n}}(f)_{y=0}| \leqslant K_2 e^{\lambda_{-n} d_2}$$

就证明了我们的定理。证毕。

由转化定理（定理8系1)可得

系. 在上定理条件下，若

$$\left[\sum_{l=n+1}^{\infty} (e^{2\lambda_l d_1} + e^{2\lambda_{-l} d_2})\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon(n), \quad \Lambda(t) \in K\{\lambda_n\},$$

$$\varepsilon(t) \searrow 0, \quad p \geqslant 2, \quad d > 0,$$

$$\int^{\infty} \Lambda(t)^{k-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} e^{\Lambda(t)d} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t} < \infty,$$

则$G(z)$实质上在Δ_d中是解析的，并且$G(z) \in S_p(\Delta_d)$，在$y=c$，$|c|<d$，上，$G(z)$是一致概周期函数；在$y=\pm d$上，$G^{(j)}$，$j=0, 1, \cdots, k-1$，是一致概周期函数；$G^{(k)}$是S^p概周期函数。并且

$$G(z) \sim \sum a_{\lambda_n}(f)_{y=0} e^{i\lambda_n z}$$

在$\overline{\Delta}_d$上都是成立的，而且有

$$\left\|G^{(r)} - \sum_{l=-n}^{n} (i\lambda_l)^r a_{\lambda_l}(f)_{y=0} e^{i\lambda_l z}\right\|_{S^q_{y=h}}$$

$$= O\left\{\int_n^{\infty} \Lambda(t)^{r-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} e^{\Lambda(t)|h|} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}\right\}.$$

这里当$|h|<d$时，则$r=0, 1, \cdots$；$q \geqslant 2$。当$|h|=d$，$r=0, 1, \cdots, k-1$时，$q \geqslant 2$。当$|h|=d$，$r=k$时，则$2 \leqslant q \leqslant p$。□

显然我们可以看到，在定理12的条件下，$G^{(k)}(z)$在$y=h$，$|h|<\min(|d_1|, |d_2|)$。上是一致概周期函数，k为任何非负整数，而且当k固定时，$G^{(k)}(z)$的Fourier系数和Fourier 指数不因h而变。

3.6 我们来讨论概周期函数构造的一类直接定理。

定义函数$H_\eta(x)$于下：

$$H_\eta(x)=1-\frac{6}{\eta^2}x^2+\frac{6}{\eta^3}|x|^3,\quad |x|\leqslant\frac{\eta}{2};$$

$$H_\eta(x)=2\left(1-\frac{|x|}{\eta}\right)^3,\quad \frac{\eta}{2}<|x|\leqslant\eta;$$

$$H_\eta(x)=0,\qquad\qquad |x|>\eta;$$

$$J_\eta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H_\eta(x)e^{-ixt}dx.$$

这时

$$J_\eta(t)\geqslant 0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}J_\eta(t)dt=1,$$

定义. 若f在$y=c$上任何有限区间L可积.对任何确定的λ，对$|a|<\infty$一致有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\pm T}^{\pm T+a}f(x+ic)e^{-i\lambda(x+ic)}dx=0,$$

则记$f\in V_{y=c}$。□

引理1. 若$f\in U\{\lambda\}_{y=c}\cap V_{y=c}$，则必

$$f_\eta(x+ic)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x+ic+t)J_\eta(t)dt\in U\{\lambda^*\}_{y=c}\cap V_{y=c},$$

这里$\{\lambda^*\}$是$\{\lambda\}$满足$|\lambda|\leqslant\eta$的部分，并且

$$a_\lambda(f_\eta)=a_\lambda(f)\int_{-\infty}^{\infty}J_\eta(t)e^{i\lambda t}dt=H_\eta(\lambda)a_\lambda(f).$$

而且若$f\in E$，E为C，$S^q_{y=c}$，$W^p_{y=c}$，$B^p_{y=c}$，$p\geqslant 1$之一，则$f_\eta\in E$，

$$\|f-f_\eta\|_E\leqslant 5\omega_1\left(\frac{1}{\eta},\ f,\ E\right).\ \square$$

实际上，这些结论都可由定义直接导出，后一不等式之正确性可由

$$\int_0^{\infty}\eta tJ_\eta(t)dt<2$$

推导出来（参看[10]）。

由这一引理立刻就得到

定理13. 设$f\in U\{\lambda_n\}_{y=c}\cap V_{y=c}$，$\lambda_n\uparrow\infty$，若$f\in E$，$E$为$C(y=c)$，$S^p_{y=c}$，$W^p_{y=c}$，$B^p_{y=c}$，$p\geqslant 1$之一，就有

$$\left\|f-\sum_{|\lambda_n|<\eta}H_\eta(\lambda_n)a_{\lambda_n}(f)_{y=c}e^{i\lambda_n z}\right\|_E$$

$$\leqslant 5\omega_1\left(\frac{1}{\eta},\ f,\ E\right).$$

特别当$\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_1(\delta,\ f,\ E)=0$时，$f$在$y=c$上就是$E$概周期函数。□

我们知道，f为E概周期函数时，其在E中相应的连续模$\omega_1(\delta,\ f,\ E)\to 0$，$(\delta\to 0)$(参看[1]和[2])。上面的定理说明，在一定条件下，反定理也是成立的。

由定理13容易证明

系. 设f，f'，…，$f^{(r)}\in U\{\lambda_n\}_{y=c}\cap V_{y=c}$，$\lambda_n\nearrow\infty$，$f^{(r-1)}$为绝对连续。若$f$，$f^{(r)}\in E$，则有$B_\eta=\sum\limits_{|\lambda_n|<\eta}a_ne^{i\lambda_n z}$使得

$$\|f-B_\eta\|_E\leqslant\frac{5^{r+1}}{\eta^r}\omega_1\left(\frac{1}{\eta},\ f^{(r)},\ E\right).\ \square$$

由引理1还可得到定理13的某种加强的形式：

定理13*. 设f在$y=a_j, j=1,\ 2,\ a_2>a_1$上（分别）属于E_j，E_j为$C(y=a_j)$，$S^p_{y=a_j}$，$W^p_{y=a_j}$，$B^p_{y=a_j}$，$p\geqslant 1$之一（但不同的j可取不同型的空间）。设$f\in U^*(\Delta^{a_2}_{a_1})\cap U\{\lambda_n\}_{y=a_1}\cap V_{y=a_1}\cap V_{y=a_2}$，当$\lambda_n\nearrow\infty$时，有共同的$B_\eta=\sum\limits_{|\lambda_n|<\eta}H_\eta(\lambda_n)a_{\lambda_n}(f)_{y=a_1}e^{i\lambda_n z}$使得

$$\|f-B_\eta\|_{E_j}\leqslant 5\omega_1\left(\frac{1}{\eta},\ f,\ E_j\right),\ j=1,\ 2,$$

因而若$\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_1(\delta,\ f,\ E_j)=0$时，$f$在$y=a_j$上是$E_j$概周期函数。□

引理2. 设$f\in U\{\lambda_n\}_{y=c}$，$\lambda_n\nearrow\infty$，令

$$S_n(z,\ f)=\sum_{k=-n}^{n}a_{\lambda_k}(f)_{y=c}e^{i\lambda_k z},$$

则若$f\in E$，E为$C(y=c)$，$S^p_{y=c}$，$W^p_{y=c}$，$B^p_{y=c}$，$p\geqslant 1$之一，则

$$\|S_n(z,f)\|_E\leqslant\left(\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\lg\frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\right)\|f\|_E.\ \square$$

实际上，

$$S_n(z,f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z+t)\frac{2\sin\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{2}t\cdot\sin\frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{2}t}{\pi(\lambda_{n+1}-\lambda_n)t^2}dt.$$

而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2\sin\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{2}t\cdot\sin\frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{2}t}{\pi(\lambda_{n+1}-\lambda_n)t^2}\right|dt$$

$$\leqslant\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\lg\frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}$$

（参看[1]中65页—69页），由广义Minkowski不等式引理即得证.

由这引理直接定理13和定理13*，并利用第三转化引理立刻可得

定理14. 设f，f'，…，$f^{(r)}\in U\{\lambda_n\}_{y=c}\cap V_{y=c}\cap E$；且若$r>0$，还设$f^{(r-1)}$绝对连续. E为$C(y=c)$，$S^p_{y=c}$，$W^p_{y=c}$，$B^p_{y=c}$，$p\geqslant 1$之一，则当$\lambda_n\nearrow\infty$时有

$$\|f-S_n(z,f)\|_E\leqslant\left(1+\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\lg\frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\right)$$

$$\times\frac{5^{r+1}}{\lambda_n^r}\omega_1\left(\frac{1}{\lambda_n},\ f^{(r)},E\right).\ \square$$

定理14*. 设$f,f',\cdots,\ f^{(r)}\in\cup^*(\Delta^{a_1}_{a_1})\cap U\{\lambda_n\}_{y=a_1}\cap V_{y=a_1}\cap V_{y=a_2}\cap E_1\cap E_2$；$E_j$，$j=1$，$2$，是$C(y=a_j)$，$S^p_{y=aj}$，$W^p_{y=aj}$，$B^p_{y=aj}$，$p\geqslant 1$之一（对不同的$j$可取不同型的空间）. 若$r>0$，更设$f^{(r-1)}$在$y=a_1$，$a_2$的任一有限区间上绝对连续. 则这时若$\lambda_n\nearrow\infty$；必有

$$\|f-S_n(z,f)\|_{E_j}\leqslant\left(1+\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\lg\frac{\lambda_{n+1}+\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}\right)$$

$$\times\frac{5^{r+1}}{\lambda_n^r}\ \omega_1\left(\frac{1}{\lambda_n},\ f^{(r)},E_j\right),\ j=1,\ 2.\ \square$$

定理14*. 主要是用到定理13*的一推论：

定理13.** 在上定理的条件下有共同的

$$B_\eta=\sum_{|\lambda_n|<\eta}c_ne^{i\lambda_n z}$$

使得

$$\|f-B_\eta\|_{E_j}\leqslant \frac{5^{r+1}}{\eta^r}\,\omega_1\left(\frac{1}{\eta},f^{(r)},E_j\right),j=1,2. \ \square$$

§4. 反定理　嵌入定理和其它

4.1. 正如我们在前面多次强调的一样，反定理实质上只不过是转化定理的应用和补充。有了转化定理，只要找到连续模（一般的理解为依赖于某参数的一种新的范数）的一些不等式，则相应的反定理就变为不证自明的了。像这类显然的形式，我们只举几个例子而不都列出来。

例如，利用1.1节和3.2节中关于（E_σ）族的不等式和相应的转化定理（定理1和定理8）可得下面的结论：

若$f\in L^p_{y=0}$，$p\geqslant 1$，并有$B_\sigma\in(E_\sigma)$使得

$$\|f-B_\sigma\|_{L^p_{y=0}}\leqslant\varepsilon(\sigma)\searrow 0,$$

$$\int^{\infty} t^{\theta-1}e^{td}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt<\infty,$$

$\theta=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}+r$，$q\geqslant p$，$d>0$，则有$G(z)\in A(\Delta_d)$，$G^{(r)}(z)\in E^*_q(\Delta_d)$，$G(z)$在$y=0$上和$f(z)$几乎处处相等，并且

$$G(z)=B_{\sigma_0}+\varphi(z),$$

$$\omega_k(\delta,\ \varphi^{(r)},\ L^q_{y=\pm d})$$

$$=O\left\{\delta^k\int_{\sigma_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\sigma}\right)} t^{\theta+k-1}e^{td}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_{\lambda\left(\frac{1}{\sigma}\right)}^{\infty} t^{\theta-1}e^{td}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt\right\},$$

这里σ_0为某正实数，$\lambda(t)$为任何给定的函数（若不特别声明我们仍将沿用这些符号的意义）。

当$d=0$时，我们得取消$G(z)$的解析性的结论。若$p=q,d=r=0$时，上面的估计式还可改为

$$\omega_k(\delta,\varphi,L^p_{y=0})=O\left\{\delta^k\int_{\sigma_0}^{\frac{1}{\sigma}} t^{k-1}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt\right\}.$$

若L^q指的是C空间时，相应的$\varphi^{(r)}$在$\bar{\Delta}_d$上应是连续的。

当$r\geqslant 1$时，上面的结果对共轭函数也相应成立，这时$G=\bar{B}_{\sigma_1}+\varphi$，$\bar{G}$在$y=0$上和$f$（几乎处处）相等，$\varphi^{(r)}$的连续模满足相同的估计式。

在所有上面的条件中，若把$L^{S_1}_{y=h}$，$E^*_{S_1}(\Delta_d)$相应地改为$S^{S_1}_{y=h}$和$S_{s_1}(\Delta_d)$时，则相应的论断也是成立的。

这是由于这两类函数空间都是完全的，而且转化定理已经建立，所需要的连续模的性质（不等式）和在$L^p(0, 2\pi)$中的一样相应地成立。

4.2. 现在来讨论多变量的函数构造的一些问题。

用$z=(z_1, z_2, \cdots, z_m)=\sum_{k=1}^{m}(x_k+iy_k)\vec{e}_k=\sum_{k=1}^{m}z_k\vec{e}_k$表示$m$维复欧氏空间$Z^m$的点，$\vec{e}_k$为单位向量。

定义. 若函数$f(z)$在$y_k=h_k$，$k=1, \cdots, m$上有定义，则定义范数$\|\cdot\|_E$，$E=\overset{(1)}{E}_{y_1=h_1}\times\cdots\times\overset{(m)}{E}_{y_m=h_m}$如下

$$\|f\|_E=\|(\cdots(\|(\|f\|_{\overset{(1)}{E}_{y_1=h_1}})\|_{\overset{(2)}{E}_{y_2=h_2}})\cdots)\|_{\overset{(m)}{E}_{y_m=h_m}}.$$

只要右边有意义，这里$\overset{(k)}{E}_{y_k=h_k}$为$C(y_k=h_k)$，$L^{p_k}_{y_k=h_k}$，$S^{p_k}_{y_k=h_k}$，$W^{p_k}_{y_k=h_k}$，$B^{p_k}_{y_k=h_k}$之一，而且对不同的$k$可以取不同类型的空间。□

定义. 若$f(z)$对z_k，$k=1, \cdots, m$为型不超过σ_k的指数型整函数，则记$f\in(E_{\vec{\sigma}})$，$\vec{\sigma}=(\sigma_1, \cdots, \sigma_m)$（参看[11]），即对任何给定的$\varepsilon>0$，有$A=A(\varepsilon)>0$使得

$$|f|\leqslant Ae^{\sum_{k=1}^{m}(\sigma_k+\varepsilon)|z_k|}.\quad\square$$

引理1. 若$f\in(E_{\vec{\sigma}})\cap E_1$，$E_1=\overset{(1)}{E}_{y_1=0}\times\cdots\times\overset{(m)}{E}_{y_m=0}$，则

$$\left\|\frac{\partial^r f(z)}{\partial z_1^{r_1}\cdots\partial z_m^{r_m}}\right\|_{E_1}\leqslant\left(e^{\sum_{k=1}^{m}\sigma_k|d_k|}\prod_{k=1}^{m}\sigma_k^{r_k}\right)\|f\|_{E_1},$$

$E_2=\overset{(1)}{E}_{y_1-d_1}\times\cdots\times\overset{(m)}{E}_{y_m-d_m}$，而$\overset{(k)}{E}_{y_k-h_k}$是$L^{p_k}_{y_k-h_k}$，$S^{p_k}_{y_k-h_k}$，$W^{p_k}_{y_k-h_k}$，$B^{p_k}_{y_k-h_k}$，$p_k\geqslant1$之一(对不同的$k$可取不同类型的空间)。□

引理2. 若 $f\in(E_{\vec{\sigma}})\cap E_1$，$E_1=\overset{(1)}{E}{}^{p_1}_{y_1-0}\times\cdots\times\overset{(m)}{E}{}^{p_m}_{y_m-0}$，则

$$\left\|\frac{\partial^r f(z)}{\partial z_1^{r_1}\cdots\partial z_m^{r_m}}\right\|_{E_1}\leqslant c\left(e^{\sum\limits_{k=1}^{m}\sigma_k|d_k|}\prod_{k=1}^{m}\sigma_k^{r_k+\frac{1}{p_k}-\frac{1}{q_k}}\right)\|f\|_{E_1},$$

这里 $E_2=\overset{(1)}{E}{}^{q_1}_{y_1-d_1}\times\cdots\times\overset{(m)}{E}{}^{q_m}_{y_m-d_m}$，$q_k\geqslant p_k\geqslant1$，$\overset{(k)}{E}{}^{\lambda_k}_{y_k-h_k}$为$L^{\lambda_k}_{y_k-h_k}$，$S^{\lambda_k}_{y_k-h_k}$之一（不同的$k$可取不同类型的空间)，常数 c可与d_k，r_k，p_k，q_k，σ_k无关。□

这些不等式是一维条件下对多维的推广，当$\overset{(k)}{E}{}^{\lambda_k}_{y_k-h_k}$为$L^{p}_{y_k-0}$，$p\geqslant1$时，由 Никольский 等人得到（参看[14]），他们的论述完全可移于我们引理中叙述的情况。

当$\overset{(k)}{E}{}^{\lambda_k}_{y_k-h_k}$是$L^{\lambda_k}_{y_k-h_k}$，$S^{\lambda_k}_{y_k-h_k}$，$\lambda_k\geqslant1$之一时，不难证明积空间 $E=\overset{(1)}{E}{}^{\lambda_1}_{y_1-h_1}\times\cdots\times\overset{(m)}{E}{}^{\lambda_m}_{y_m-h_m}$是完全的，并且广义 Minkowski 不等式成立：

$$\left\|\int f(z,\ t)dt\right\|_E\leqslant\int\|f(z,\ t)\|_E\,dt.$$

同时有

引理3. 设f，$f_n\in E_1$，G，$\partial^{r_k}f_n/\partial x_k^{r_k}\in E_2$并且

$$\|f-f_n\|_{E_1}\to0,\ \left\|G-\frac{\partial^{r_k}f_n}{\partial x_k^{r_k}}\right\|_{E_2}\to0,$$

$$E_i=\overset{(1)}{E}{}^{p_1^{(i)}}_{y_1-h_1}\times\cdots\times\overset{(m)}{E}{}^{p_m^{(i)}}_{y_m-h_m},\ p_j^{(i)}\geqslant1,\ i=1,\ 2,$$

则有一函数$F(z)\in E$，在m维空间 $R^m(h_1,\ \cdots,\ h_m)$：$y_j=h_j$，$j=1$，$\cdots$，m，中和 f 几乎处处相等，并对几乎处处的 $(x_1,\ \cdots,\ x_{k-1},\ x_{k+1},\ \cdots,x_m)\in R^{m-1}(h_1\cdots,\ h_{k-1},\ h_{k+1},\cdots,\ h_m)$，$\partial^{r_k-1}F/$

$\partial x_h^{r_h-1}$存在并绝对连续于$y_h = h_h$上，且在这种情况下$\partial^{r_h}F/\partial x_h^{r_h} = G$。这里$\overset{(j)}{E}{}^{p_j^{(i)}}_{y_j-h_j}$是$L^{p_j^{(i)}}_{y_j-h_j}$或$S^{p_j^{(i)}}_{y_j-h_j}$。□

这引理的证明和[14]中相应引理的是相似的。这相当于第二章1.2节中的引理 1，对应于那里的引理2—引理 4 也有类似的结论。但是为了叙述方便，下面我们都采用 Соъолев 意义下的广义函数和广义导数(参看[15])，这时过渡极限的讨论就简单得多了：

引理4. 设f，$f_n \in E_1$，G，$D^{(r)} f_n \in E_2$，

$$\|f - f_n\|_{E_1} \to 0, \quad \|G - D^{(r)} f_n\|_{E_2} \to 0,$$

则G就是f之广义导数：$G = D^{(r)} f$。这里E_1，E_2和上引理的相同，$D^{(r)}$是任何给定的r阶广义（混合）偏导数（在$R^m(h_1, \cdots, h_m)$上的）。□

这可由 Соъопев 广义偏导数的性质直接推导出来。利用这一引理和引理1、引理2、转化定理即可。

设$g_k(t) \geqslant 0$，$t \geqslant 0$，$k = 1, \cdots, m$，为任何给定的非降的函数，$\vec{g}(t) = (g_1(t), \cdots, g_m(t)) = \sum_{i=1}^{m} g_i(t) \vec{e}_i$（以后若不特别声明，我们将保留这些符号的意义）。

定理15. 设$f \in \overset{(1)}{E}{}^{p_1}_{y_1-0} \times \cdots \times \overset{(m)}{E}{}^{p_m}_{y_m-0}$，$p_j \geqslant 1$，$j = 1, \cdots, m$，并有$B_{\vec{\sigma}} \in (E_{\vec{\sigma}})$ 使得

$$\|f - B_{\vec{\sigma}}\|_E \leqslant H(\vec{\sigma}),$$

$$\varepsilon(t) = H(\overrightarrow{g(t)}) \searrow 0, \quad \theta_k = \frac{1}{p_k} - \frac{1}{q_k} + r_k, \quad q_k \geqslant p_k,$$

$$J(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} e^{\sum_{k=1}^{m} g_k(t)|d_k|} \prod_{k=1}^{m} g_k(t)^{\theta_k} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right) \frac{dt}{t} < \infty,$$

则有$G(Z)$，对$|y_k| \leqslant |d_k|$有意义（可能在边界上只几乎处处有意义）；对z_k，在$|y_k| < |d_k|$（若$|d_k| > 0$的话）内解析；在R^m（0，…，0），G和f几乎处处相等，并且$r = r_1 + \cdots + r_m$阶广义偏导数

$$\frac{\partial^r G}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_m^{r_m}} \in E^* = \overset{(1)}{E}{}^{q_1}_{y_1-d_1} \times \cdots \times \overset{(m)}{E}{}^{q_m}_{y_m-d_m},$$

$$\left\|\frac{\partial^r}{\partial x_1^{r_1}\cdots\partial x_m^{r_m}}(G-B_{\overrightarrow{g(t)}})\right\|_{E^*}=O\{J(t)\},$$

这里 $\overset{(k)}{E}{}^{\lambda_k}_{y_k=h_k}$ 为$L^{\lambda_k}_{y_k=h_k}$或$S^{\lambda_k}_{y_k=h_k}$（对不同的k可取不同的类型的空间）。□

证明是很简单的。例如，不妨设$|d_j|>0$，$j=1,\cdots,m$，则这时 $B_{\overrightarrow{g(t)}}$在任何$y_k=h_k$，$k=1,\cdots,m$，$|h_k|<|d_k|$ 上是一致收敛的（由第一转化引理和引理1，引理 2 的不等式可得知），而且对$t_1<t_2$只要t_2足够大，就有

$$\left\|\frac{\partial^{r'}}{\partial x_1^{r'_1}\cdots\partial x_m^{r'_m}}(B_{\overrightarrow{g(t_1)}}-B_{\overrightarrow{g(t_2)}})\right\|_{E^*}=O\{J(t_1)\},$$

$$r'_j\leqslant r_j,\ j=1,\cdots,m;\ r'\leqslant r.$$

这时就不难看到在$R^n(h_1,\cdots,h_m)$ 上，$|h_j|\leqslant|d_j|$，$j=1,\cdots,m$，$\partial^{r'}B_{\overrightarrow{g(t)}}/\partial x_1^{r'_1}\cdots\partial x_m^{r'_m}$的极限函数$Gr'_1,\cdots,r'_m$存在，特别在$R^n(0,\cdots,0)$ 上$G_0,\cdots,0$和f几乎处处相等，而$Gr'_1,\cdots,r'_m$ 自己相互之间的（导数）关系可以由引理 4 反复推得。对其他的情况，论述是相似的。

采用记号

$$\omega_k(\delta\vec{e}_j,f,E)=\sup_{|h|<\delta}\left\|\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}f(z+lh\vec{e}_j)\right\|_E,$$

若$f\in E=\overset{(1)}{E}{}^{p_1}_{y_1=h_1}\times\cdots\times\overset{(m)}{E}{}^{p_m}_{y_m=h_m}$，$\overset{(i)}{E}{}^{p_i}_{y_i=h_i}$为$L^{p_i}_{y_i=h_i}$，$S^{p_i}_{y_i=h_i}$，$W^{p_i}_{y_i=h_i}$，$B^{p_i}_{y_i=h_i}$，$p_i\geqslant1$之一。

则容易证得：

1° $\omega k(\delta\vec{e}_j,f,E)\leqslant C\|f\|_E$，

C可和δ，j，f无关；

2° $\omega_k(n\delta\vec{e}_j,f,E)\leqslant n^k\omega_k(\delta,f,E)$；

3° 若广义导数$\partial^r f/\partial x_j^r$存在，属于$E$，$\omega_k(\delta\vec{e}_j,f,E)\leqslant\delta^r\omega_{k-r}\left(\delta\vec{e}_j,\ \frac{\partial^r f}{\partial x_j^r},E\right)$，

4° $\omega_l(\delta \overrightarrow{e_j}, f, E) \leqslant 2^{l-k}\omega_k(\delta \overrightarrow{e_j}, f, E)$，$l \geqslant k$。

这些性质的证明和对古典的相应的连续模的证明是相似的。性质3°可先对充分光滑的函数来证明，而后在E空间中过渡到极限并利用性质1°就可得到在广义导数情况下的结论（注意，这里的导数不是混合的）。

利用第一转化引理，由定理15即得

定理15. 在上定理的条件下有

$$\omega_1\left(\delta \overrightarrow{e_j}, \frac{\partial^r G^*}{\partial x_1^{r_1}\cdots\partial x_m^{r_m}}, E^*\right) = o\left\{\delta^k \int_{\sigma_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)} V(t)dt + J\left(\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)\right\},$$

$$G^* = G - B_{\overrightarrow{g(\sigma_0)}},$$

$$V(t) = \left\{e^{\sum_{l=1}^{m} g_l(t)|d_l|} \prod_{l=1}^{m} g_l(t)^{\theta_l}\right\} \frac{g_j(t)^k}{t} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right).$$

而当$r = 0$，$p_l = q_l$，$d_l = 0$，$l = 1, \cdots, m$时可改进为

$$\omega_k(\delta \overrightarrow{e_j}, G^*, E^*) = o\left\{\delta^k \int_0^{\frac{1}{\delta}} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}\right\}.$$

4.3. 定理5和定理9*对多变量也是相应地成立的：

定理9.** 若$f(z)$看作z_j的函数，对$z_l \in \Delta_{a_l}^{a_l}{}^{(l)}_{(l)}$，$l \neq j$，一致满足条件$A_{k_j}(\Delta_{a_j}^{a_j}{}^{(j)}_{(j)})$，$j = 1, \cdots, m$，并且$f \in E_{j'}$，$E_{j'} = \overset{(1)}{E}{}^{p_1}_{q_1 - \alpha_{j'}^{(1)}} \times \cdots \times \overset{(m)}{E}{}^{p_m}_{q_m - \alpha_{j'}^{(m)}}$，$j' = 1, 2, p_l \geqslant 1, l = 1, \cdots, m$，$\overset{(l)}{E}{}^{p_l}_{q_l - \alpha_{j'}^{(l)}}$为$L^{p_l}_{q_l - \alpha_{j'}^{(l)}}, S^{p_l}_{q_l - \alpha_{j'}^{(l)}}, W^{p_l}_{q_l - \alpha_{j'}^{(l)}}$，$B^{p_l}_{q_l - \alpha_{j'}^{(l)}}$之一（对不同的$l$可取不同类型的空间），则有不因$j' = 1,2$，而变的$B_{\vec{\rho}} \in (E_{\vec{\rho}})$使得

$$\|f - B_{\vec{\sigma}}\|_{E_{j'}} = O\left\{\sum_{j=1}^{m} \omega_{k_j}\left(\frac{\overrightarrow{e_j}}{\sigma_j}, f, E_{j'}\right)\right\}, \quad j' = 1, 2.$$

特别当有广义偏导数 $\partial^{r_j}f/\partial x_j^{r_j}\in E_{j'}$, $l=1,\cdots,m$, $j'=1$, 2, 时，有

$$\|f-B_{\vec{\sigma}}\|_{E_{j'}}=O\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\sigma_j^{r_j}}\omega_{k_j-r_j}\left(\frac{\vec{e_j}}{\sigma_j},\ \frac{\partial^{r_j}f}{\partial x_j^{r_j}},E_{j'}\right)\right\},$$

k_j 为任何给定的正整数，整数 $r_j<k_j$. □

这定理证明的方法和定理5、定理9的是相似的。当$\Delta_{a_j}^{a_j}{}^{(j)}$ 都退化成直线时定理的形式就更简单些：

系1. 设 $f\in E=\overset{(1)}{E}{}^{p_1}_{\nu_1=0}\times\cdots\times\overset{(m)}{E}{}^{p_m}_{\nu_m=0}$, $p_l\geqslant1$, $l=1,\cdots,m$,并存在广义偏导数 $\partial^{r_l}f/\partial x_l^{r_l}\in E$, $\overset{(l)}{E}{}^{p_l}_{\nu_l=0}$为 $L^{p_l}_{\nu_l=0}$, $S^{p_l}_{\nu_l=0}$, $W^{p_l}_{\nu_l=0}$, $B^{p_l}_{\nu_l=0}$之一（对不同的l可取不同类型的空间），则有$B_{\vec{\sigma}}\in(E_{\vec{\sigma}})$ 使得

$$\|f-B_{\vec{\sigma}}\|_E\leqslant C\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\sigma_j^{r_j}}\omega_{k_j}\left(\frac{\vec{e_j}}{\sigma_j},\ \frac{\partial^{r_j}f}{\partial x_j^{r_j}},\ E\right),$$

C和σ_j, $j=1,\cdots,m$, f无关。□

由此由转化定理15和反定理15*有

系2. 在系 1 的条件下，若

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{g_j(t)^{r_j}}\omega_{k_j}\left(\frac{\vec{e_j}}{g_j(t)},\ \frac{\partial^{r_j}f}{\partial x_j^{r_j}},\ E\right)=\varepsilon(t)\searrow0,$$

$$J(t_0)=\int_{t_0}^{\infty}V(t)dt<\infty,$$

$$V(t)=\left(\prod_{j=1}^{m}g_j(t)^{\theta_j}\right)\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{t},\quad \theta_j=\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}+S_j,$$

$1\leqslant p_j\leqslant q_j\leqslant\infty$, $j=1,\cdots,m$,

则广义导数

$$\frac{\partial^s t}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_m^{s_m}}\in E^*=\overset{(1)}{E}{}^{q_1}_{\nu_1=0}\times\cdots\times\overset{(m)}{E}{}^{q_m}_{\nu_m=0},$$

只要 $\overset{(j)}{E}{}^{p_j}_{\nu_j=0}$, $\overset{(j)}{E}{}^{q_j}_{\nu_j=0}$不取$W^p$, B^p型的空间。并且

$$\omega_\eta\left(\delta \vec{e}_l, \frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_m^{s_m}}, E^*\right)=O\left\{\delta^\eta\int_{\sigma_0}^{\mu\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)} V(t)g_l(t)^\eta dt\right.$$

$$\left.+J\left(\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)\right\},\quad l=1,\cdots,m.\ \square$$

定义. 若$r_j=k_j+\eta_j$，$0<\eta_j\leqslant 1$，$j=1,\cdots,m$，广义偏导数

$$\frac{\partial^{k_j} f}{\partial x_j^{k_j}}\in E,\quad (f\in E),$$

$$\left\{\int_0^\infty \omega^p_{1+[\eta_j]}\left(t\vec{e}_j, \frac{\partial^{k_j} f}{\partial x_j^{k_j}}, E\right) t^{-p\eta_j-1}dt\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

$$j=1,\cdots,m$$

则称 $f\in H^{\vec{r}}_{E(p)}$，$\vec{r}=(r_1,\cdots,r_m)$。□

逐字重复对有限区间的嵌入定理的论述即可得

系3. 设 $f\in H^{\vec{r}}_{E(p)}$，$E=\overset{(1)}{E}{}^{p_1}_{\nu_1=0}\times\cdots\overset{(m)}{E}{}^{p_m}_{\nu_m=0}$，$p_j\geqslant 1$，$j=1,\ \cdots,\ m$，$p>0$。若

$$\theta=1-\sum_{j=1}^m\frac{1}{r_j}\left(\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}+s_j\right)>0,$$

则广义偏导数

$$\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_m^{s_m}}\in H^{\theta\vec{r}}_{E'(q)},\quad E'=\overset{(1)}{E}{}^{q_1}_{\nu_1=0}\times\cdots\times\overset{(m)}{E}{}^{q_m}_{\nu_m=0},$$

$q>0$，$1\leqslant p_j\leqslant q_j\leqslant\infty$，$j=1,2,\cdots m$，这里 $\overset{(i)}{E}{}^{\lambda_i}_{\nu_i=0}$ 可取 $L^{\lambda_i}_{\nu_i=0}$ 或 $S^{\lambda_i}_{\nu_i=0}$（对不同的i 可取不同型的空间，对相同的 i 要取同一型的空间）。□

这样一来我们就把Никольский在[14]中得到嵌入定理推广到相当一般的形式，而且论证的步骤不尽相同。

系 3 只不过是系 2 的一种推论，所以系2应可看成更广泛的嵌入定理，它是转化定理，反定理和直接定理结合的产物。由它还可推导出更细致更复杂类型（例如还有对数型成分）的嵌入定理。但对一般连续模的形式，系 2 已给出了答案，更复杂的形式

一般说是没有本质的意义的。

定理9**的证法和系 1 的证法实质上相同，系2、系 3 的根据是系1。系 1 的证法是定理5、定理 9 在多维情况下的推广，证明的原则基本上没有多大改动，我们来提一下它的证明过程。

为了叙述方便，不妨设 $m=2$。

$$令\ m_j=\left[\frac{k_j+1}{2}\right]+1,\ K_{\sigma_j}^{(j)}(z)=\left(\frac{\sin\frac{\sigma_j z}{2m_j}}{z}\right)^{m_j},$$

$$C_j=\int_{-\infty}^{\infty}K_{\sigma_j}^{(j)}(u)du,\ A_{\sigma_j}^{(t)}(t)=\frac{1}{C_j}\sum_{l=1}^{k_j}(-1)^{l-1}\frac{1}{l}\binom{k_j}{l}K_{\sigma_j}^{(j)}\left(\frac{t}{l}\right),$$

$j=1,2$。

$$B_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1+t_1,\ x_2+t_2)A_{\sigma_1}^{(1)}(t_1)A_{\sigma_2}^{(2)}(t_2)dt_1dt_2$$

这就是所要求的函数：$B_{\sigma_1,\sigma_2}\in(E_{\sigma_1,\sigma_2})$,

$$\|f-B_{\sigma_1,\sigma_2}\|_E\leqslant C\sum_{j=1}^{2}\omega_{k_j}\left(\frac{\vec{e_j}}{\sigma_j},f,E\right).$$

前一结论可直接验证，后一结论的证明过程基本如下：

$$B_{\sigma_1,\sigma_2}(x_1,x_2)-f(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A_{\sigma_1}^{(1)}(t_1)A_{\sigma_2}^{(2)}(t_2)$$

$$\times\left\{\sum_{l=1}^{k_1}\sum_{s=1}^{k_2}(-1)^{l+s}\binom{k_1}{l}\binom{k_2}{l}f(x_1+lt_1,\ x_2+st_2)\right.$$

$$\left.-\sum_{s=1}^{k_2}(-1)^{s-1}\binom{k_2}{s}f(x_1,x_2+st_2)\right\}dt_1dt_2$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}A_{\sigma_1}^{(1)}(t_1)A_{\sigma_2}^{(2)}(t_2)\left\{\sum_{s=1}^{k_2}(-1)^{s-1}\binom{k_2}{s}\right.$$

$$\left.f(x_1,x_2+st_2)-f(x_1,x_2)\right\}dt_1dt_2=I_1+I_2,$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{\infty}A_{\sigma_2}^{(2)}(t_2)B(x_1,x_2,t_2)dt_2,$$

$$B(x_1,x_2,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}A_{\sigma_1}^{(1)}(t_1)\left\{\sum_{l=1}^{k_1}\sum_{s=1}^{k_2}(-1)\binom{k_1}{l}\binom{k_2}{s}\right.$$

$$\left.f(x_1+lt_1,x_2+st_2)-\sum_{s=1}^{k_2}(-1)^{s-1}\binom{k_2}{s}f(x_1,x_2+st_2)\right\}dt_1,$$

而

$$\|B(x_1,x_2,t_2)\|_E\leqslant C_1\int_{-\infty}^{\infty}A_{\sigma_1}^{(1)}(t_1)\omega_{k_1}(|t_1|\vec{e}_1,f,E)dt_1.$$

另一方面

$$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}A_{\sigma_2}^{(2)}(t_2)\left\{\sum_{s=1}^{k_2}(-1)^{s-1}\binom{k_2}{s}f(x_1,x_2+st_2)\right.$$

$$\left.-f(x_1,x_2)\right\}dt_2,$$

$$\|I_2\|_E\leqslant C_2\int_{-\infty}^{\infty}A_{\sigma_2}^{(2)}(t_2)\omega_{k_2}(|t_2|\vec{e}_2,f,E)dt_2,$$

C_1，C_2，为与σ_1，σ_2，t_1，t_2，f无关的常数。

这时要完成系 1 的证明（$m=2$）就没有困难了。

若在转化定理中用的不是广义导数，而用第二章 1.2 节中类似的引理来处理，则后两小节的结果（至少对非混合偏导数的情况）将有更细致的形式。

参 考 文 献

[1] 列维坦，概周期函数，1956年。

[2] A. S. Besicovitch, Almost Periodic Functions, Cambridge, 1932年。

[3] 吴学谋，变分转化分析（I）（II），应用数学和力学，1 (1980)，3 (1981)。

[4] 吴学谋，解析函数的一些边界性质与嵌入不等式（I）（II），华中工学院学报，3，4 (1979)。

[5] J. Favard, Lecons sur les Fonctions Presque Périodiques,

Paris, 1933年.

[6] R.P.Boas, Entire Functions, 1954.

[7] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории Аппроксимации, Гостехиздат, 1947.

[8] А.Ф.Тиман и М.Ф.Тиман,о зависимости между модулями Гладкости функций, заданных на всей вещественной оси, ДАН. 113, но: 5 (1957).

[9] E.C.Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford Univ. Press, 1948.

[10] И.Й.Привалов, Границные свойства аналитических функции, 1950.

[11] Paley and Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, New York, 1934.

[12] S.Bochner and K.Chandrasekharan, Fourier Transforms, 1949.

[13] Е. А. Бредихина, Некоторые оценки Наилуших приближений почти периодических фунхций ДАН 103 (1955).

[14] С.М.Никольский, Неравенства для целых функций конечной стелени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Матем. ин-та,им. В. А.Стеклова, 38 (1951).

[15] С.Л.Соблев, Некоторые применения функционалЬного анализа в математической физике, Л. 1950.

[16] В. П. ИлЬин и В.А. Солонников, О некоторых свойствах дифференцируемых функций многих переменных, Труды матем, ин-та, им, В, А, Стеклова, 64 (1962).

第　四　章

解析函数的性质与不等式

§1. 等角映射的一些性质

1.1. 设D为一有界的连续统，Γ为它的边界，D_∞^*为$\overline{D}$ $(=D)$的补集中含无穷远点的成分。设$z=\varphi_-(\omega)$等角映射$|\omega|>1$于D_∞^*，并且

$$\varphi_-(\infty)=\infty,\quad \lim_{\omega\to\infty}\frac{\varphi_-(\omega)}{\omega}=z>0.$$

记$|\omega|=R>1$的像为Γ_R，称为D（或D之内域D^0）之外平准曲线。记$\Psi_-(z)$为$\varphi_-(\omega)$的反函数。

当D为单连通区域时，令$z=\varphi_+(\omega)$为某等角映射$|\omega|<1$于D的函数。$|\omega|=\rho<1$之像集记为Γ_ρ^*，称为D之内平准曲线。记$\Psi_+(z)$为$\varphi_+(\omega)$的反函数。

定义函数

$$T_D(r)=\int_0^{2\pi}|\varphi_+'(re^{i\theta})|^2d\theta.$$

设$d(p,\ \Gamma_R)$，$d(p,\ \Gamma_\rho^*)$分别是点p到Γ_R和Γ_ρ^*上的距离，则定义

$$d_D(R-1)=\max_{p\in\Gamma}d(p,\ \Gamma_R),$$

$$d_D^*(1-\rho)=\max_{p\in\Gamma}d(p,\ \Gamma_\rho^*),$$

$$U_D(R-1)=\min_{p\in\Gamma}d(p,\ \Gamma_R),$$
$$U_D^*(1-\rho)=\min_{p\in\Gamma}d(p,\ \Gamma_\rho^*),$$
$$d_D(\Gamma_{R_1},\ \Gamma_R)=\min_{p\in\Gamma_{R_1}}d(p,\ \Gamma_R),$$
$$d_D^*(\Gamma_{\rho_1}^*,\ \Gamma_\rho^*)=\min_{p\in\Gamma_{\rho_1}^*}d(p,\ \Gamma_\rho^*).$$

1.2. 我们知道有估计式

$$U_D(R-1)\geqslant\frac{(R-1)^2}{16R^2r},\ U_D^*(1-\rho)\geqslant\frac{|\varphi_+'(0)|}{16}(1-\rho)^2, \tag{1}$$

（参见[1]中35页—37页）。

在一般情况下，只要 D 的面积是有限的，就有 $T_D(r)=0\left(\frac{1}{1-r}\right)$。但这估计一般说是不够用的。对一些特殊的区域$D$，我们将改进这些结果。

引理. 若D为一凸区域，则

$$U_D^*(1-\rho)\geqslant\frac{|\varphi_+'(0)|}{4}(1-\rho).\ \square$$

这结果的证法与[1]中相应的证法一样，只要在[1]中所用的变形定理改用下面的Gronwall-Lowner定理则可。

若$F(z)$，$F(0)=0$，$F'(0)=1$，等角映射$|z|<1$为某一含有原点的凸区域，则必致

$$\frac{|z|}{1+|z|}\leqslant|F(z)|\leqslant\frac{|z|}{1-|z|},$$

$$\frac{1}{(1+|z|)^2}\leqslant|F'(z)|\leqslant\frac{1}{(1-|z|)^2}$$

（参看[2]中第297页）。

定义 对于区域D，若其边界Γ能够经过$\frac{1}{z}+a$型的线性变换变成一个凸区域的边界，则简称D为凸区域的"反像"。$\square$

所以，由上面的结果可以得到

系1. 若区域D为凸域之“反像”，则有

$$U_D(R-1)\geqslant\frac{1}{4Rr}(R-1). \ \square$$

利用初等变换，作为上面二个命题和不等(1)的推论，我们有

系2. 设D为有界连通的集合，则

$$d_D(\Gamma_{R_1},\ \Gamma_{R_2})\geqslant\frac{(R_1-R_2)^2}{16R_2^2R_1r};$$

若D为有界单连通区域，则

$$d_D^*(\Gamma_{\rho_1}^*,\ \Gamma_{\rho_2}^*)\geqslant\frac{|\varphi_+'(0)|}{16\rho_1}(\rho_1-\rho_2)^2;$$

若D为一凸区域，则

$$d_d^*(\Gamma_{\rho_1}^*,\ \Gamma_{\rho_2}^*)\geqslant\frac{|\varphi_+'(0)|}{4}(\rho_1-\rho_2),\ \ \rho_1\geqslant\rho_2;$$

若D为一凸区域之“反像”，则

$$d_D(\Gamma_{R_1},\ \Gamma_{R_2})\geqslant\frac{(R_1-R_2)}{4R_1R_2r},\ \ R_1\geqslant R_2. \ \square$$

1.3. 设$\Psi_-(z)$和$\Psi_+(z)$在它们定义域的闭域上是连续的(例如它们定义域的边界是Jordan曲线时就是如此)，这时

定义. 分别记$I_D(\delta)=\omega(\delta,\ \Psi_-,\ c(\overline{D_\infty^*}))$，$^*I_D(\delta)=\omega(\delta,\ \Psi_+,\ c(\overline{D}))$是$\Psi_-(z)$在$\overline{D_\infty^*}=D_\infty^*+\Gamma$上和$\Psi_+(z)$在$\overline{D}=D+\Gamma$上之连续模. 它们相应的反函数记为$I_D^{-1}(\delta)$，$^*I_D^{-1}(\delta)$. 又分别记$J_D(\delta)=\omega(\delta,\varphi_-,\ c(|\omega|\geqslant1))$，$^*J_D(\delta)=\omega(\delta,\varphi_+,\ c(|\omega|\leqslant1))$是$\varphi_-(\omega)$在$|\omega|\geqslant1$上和$\varphi_+(\omega)$在$|\omega|\leqslant1$上的连续模. □

由连续模的性质我们可以得到

引理. 若(区域D和D_∞^*之边界)Γ为一Jordan曲线，则有

$$I_D^{-1}(R-1)\leqslant U_D(R-1)\leqslant d_D(R-1)\leqslant J_D(R-1);$$
$$^*I_D^{-1}(1-\rho)\leqslant U_D^*(1-\rho)\leqslant d_D^*(1-\rho)\leqslant {}^*J_D(1-\rho). \ \square$$

1.4. 对于光滑的弧$L: z=z(s)$，$0\leqslant s\leqslant l$，这里s为L的弧长

参数．记$\theta(s, L)=\arg z'(s)$为L上$z(s)$处的切线正向与正实轴之交角（这时我们可选它为s的连续函数）．

定义． 若$\theta(s, L)$在$0\leqslant s\leqslant l$上之连续模$\omega(\delta)=\omega(\delta, \theta, c(L))$使得

$$\int_0^{c_0}\frac{\omega(t)}{t}dt<\infty, \quad c_0>0, \text{ 则记} L\in(\Lambda). \ \square$$

曲线类(Λ)是Ляпунов曲线类的一种拓广．

定义． 设Γ为一逐段光滑的Jordan曲线，其上角点处的内夹角分别记为$\pi\alpha_1, \cdots \pi\alpha_k$，则简记$\Gamma\in P.S.(\alpha, \beta)$（在不会发生误会的情况下，有时也记其内域$D\in P.S.(\alpha,\beta)$），这里

$$\alpha=\min(1, \alpha, \cdots, \alpha_k),$$

$$\beta=\min(1, 2-\alpha_1, \cdots, 2-\alpha_k).$$

若Γ的每段光滑弧都属于(Λ)，则简记$\Gamma\in P.L.(\alpha, \beta)$（或者$D\in P.L.(\alpha, \beta)$）．$\square$

我们知道，对于$\Gamma\in P.S.(1, 1)$，$\varphi_\pm(\omega)$，$\psi_\pm(z)$在其所定义的闭区域上满足任何小于1 级 的 Hölder-Lipschitz 条 件 （参看[4]），而且$\varphi'_+(\omega)\in H_p$，$-\infty<p<+\infty$，即是说

$$\int_0^{2\pi}|\varphi'_+(re^{i\theta})|^p d\theta$$

在$0<r<1$上有界（参看[3]）．所以这时有

$$T_D(r)=O(1),$$

$$K_1(D)(R-1)^{1+\varepsilon}\leqslant U_D(R-1)\leqslant d_D(R-1)\leqslant K_2(D)(R-1)^{1-\varepsilon},$$

$$^*K_1(D)(1-\rho)^{1+\varepsilon}\leqslant U_D^*(1-\rho)\leqslant d_D^*(1-\rho)\leqslant {}^*K_2(D)(1-\rho)^{1-\varepsilon},$$

这里$\varepsilon>0$是任给的，K_1，K_2，$^*K_1$，$^*K_2$与D，ε有关与R或者ρ无关．

若$\Gamma\in P.L.(1, 1)$，即$\Gamma\in(\Lambda)$，则由[5]中之结果不难知道，$|\varphi'_\pm(\omega)|$，$|\Psi'_\pm(z)|$分别在它们的定义域上是界于两个正的 常 数之间的，也即是说，$\varphi_\pm(\omega)$，$\Psi_\pm(z)$在它们的定义域 （闭域）上

满足一级的Hölder-Lipschitz条件，因而有

$$K_3(D)(R-1)\leqslant U_D(R-1)\leqslant d_D(R-1)$$
$$\leqslant K_4(D)(R-1),$$
$$^*K_3(D)(1-\rho)\leqslant U_D^*(1-\rho)\leqslant d_D^*(1-\rho)$$
$$\leqslant {}^*K_4(D)(1-\rho),$$

K_3，$^*K_3$，K_4，$^*K_4$和R或ρ无关。

下面我们推广这些结果于有角点时的情况。

定理1 设$\Gamma\in P.S.(\alpha_+,\ \alpha_-)$，$\alpha_\pm>0$，则在$|\omega|=1$上$\varphi_\pm(\omega)\in$ $\mathrm{Lip}(\lambda_\pm,\ p)$，即

$$\|\varphi_\pm(e^{i\theta+ih})-\varphi_\pm(e^{i\theta})\|_{L^p(0,2\pi)}=O(|h|^{\lambda_\pm}),$$

在Γ上$\Psi_\pm(z)\in\mathrm{Lip}(\eta_\pm,\ p)$，即

$$\|\Psi_\pm(z(s+h))-\Psi_\pm(z(s))\|_{L^p(\Gamma)}=O(|h|^{\eta_\pm}),$$

这里$1<p\leqslant\infty$，$\lambda_\pm=\min\left(\alpha_\pm+\frac{1}{p}-\varepsilon,\ 1\right)$，$\eta_\pm=\min\left(\frac{1}{2-\alpha_\pm}+\frac{1}{p}-\varepsilon,\ 1\right)$，$\varepsilon>0$为任何小的给定的常数。

当$\Gamma\in P.L.(\alpha_+,\ \alpha_-)$时，上面的$\varepsilon$可以改为零，并且当$p=1$时定理也成立。

($\mathrm{Lip}(\alpha,\ \infty)$理解为普通意义下的$\alpha$级 Hölder-Lipschitz 条件)。□

证明. 对于$\Gamma\in P.S.(\alpha_+,\ \alpha_-)$，我们只证明$\Psi_+(z)\in Lip$ $(\eta_+,\ p)$，$1<p\leqslant\infty$，而其余的命题的证明是完全相似的。

设Γ的方程为$z=z(s)$，$0\leqslant s\leqslant l$，s为弧长参数。设$z(s_1)$，$z(s_2)$，…，$z(s_k)$为Γ之角点，其对应的内夹角分别为$\pi\alpha_1$，$\pi\alpha_2$，…，$\pi\alpha_k$。取

$$\xi(z)=(z-z(s_1))^{\frac{1}{\alpha_1}}(z-z(s_2))^{\frac{1}{\alpha_2}}\cdots(z-z(s_k))^{\frac{1}{\alpha_k}}$$

之一单值枝，它把Γ之内域D变成单连通区域$^*D$（可能是落在许多页的黎曼面上），其边界$^*\Gamma$显然是一光滑的位于黎曼面上的Jordan曲线，作$^*D$上之一映射函数$\omega=g(\xi)$映射$^*D$为单位园$|\omega|<1$（在黎曼面上的黎曼定理的这种形式是成立的!）这时$g(\xi(z))$

等角映射D为$|\omega|<1$. 由于映射函数$g(\xi)$是很多的，我们可以选$g(\xi(z))$和$\Psi_+(z)$满足一样的“定解”条件，例如在边界上三个点的值是相同的或者在域中一点两函数的值相同，且对应的导数也相同，这时由唯一性定理，这两函数就是相同的。即我们可以选$g(\xi)$使得$\Psi_+(z)=g(\xi(z))$（实际上不相同也不要紧，因为这两函数的“连续性”是等价的，而我们的定理主要是涉及连续模的）。

由于$^*D$和$|\omega|<1$都是光滑的区域，所以$g(\xi)$在$^*\Gamma$上是满足r_+级Hölder-Lipschitz条件的，这里r_+为任何小于1的正常数（例如可参看[3]和[4]）。又由于光滑或逐段光滑而不具有尖点的曲线的弦和弧的长度是无穷小同级的，故有

$$
\begin{aligned}
&|\Psi_+(z(s+h))-\Psi_+(z(s))|\\
&=O(|\xi(z(s+h))-\xi(z(s))|^{r_+})\\
&=O\left\{\int_s^{s+h}|\xi'(z(t))|dt\right\}^{r_+}\\
&=O\left\{\sum_{i=1}^{k}\int_s^{s+h}\left|\frac{\xi(z(t))}{(z(t)-z(s_j))^{1/\alpha_i}}\right|\right.\\
&\qquad\left.\times|z(t)-z(s_i)|^{1/\alpha_i-1}dt\right\}^{r_+}.
\end{aligned}
$$

在这里我们用到$|z'(t)|=1$在角点外是成立。注意被积函数中除开$(z(t)-z(s_i))^{1/\alpha_i-1}$一项可能无界外，其余因子都是有界的；再利用$|z(t)-z(s_i)|/|t-s_i|$，$i=1, 2, \cdots, k$，$|t-s_i|\leqslant l/2$，是界于两个正常数之间的性质，就有

$$
\begin{aligned}
&|\Psi_+(z(s+h))-\Psi_+(z(s))|^{1/r_+}\\
&=O\left\{\sum_{i=1}^{k}\int_s^{s+h}|z(t)-z(s_i)|^{1/\alpha_i-1}dt\right\}\\
&=O\left\{\sum_{i=1}^{k}\int_s^{s+h}|z(t)-z(s_i)|^{\frac{1}{2-\alpha_-}-1}dt\right\}\\
&=O\left\{\sum_{i=1}^{k}\int_s^{s+h}|t-s_i|^{\frac{1}{2-\alpha_-}-1}dt\right\}\\
&=O\left\{|h|\sum_{i=0}^{k}\int_0^{l}\left|\frac{h}{l}y+s-s_i\right|^{\frac{1}{2-\alpha_-}}dt\right\}.
\end{aligned}
$$

利用推广的Minkowski不等式，并且选r_+接近于1，使得$r_+p\geqslant 1$（因为$p>1$），令$b=\frac{1}{2-a_-}+\frac{1}{pr_+}$，则有

$$\|\Psi_+(z(s+h))-\Psi_+(z(s))\|_{L^p(\Gamma)}^{\frac{1}{r_+}}$$

$$=O\left\{|h|\sum_{i=1}^{k}\left\|\int_0^l\left|\frac{h}{l}y+s-s_i\right|^{\frac{1}{2-a_-}-1}dy\right\|_{L^{pr_+}(\Gamma)}\right\}$$

$$=O\left\{|h|\sum_{i=1}^{k}\int_0^l\left\|\left|\frac{h}{l}y+s-s_i\right|^{\frac{1}{2-a}-1}\right\|_{L^{pr_+}(\Gamma)}dy\right\}$$

$$=O\left\{|h|\sum_{i=1}^{k}\int_0^l\left(\left|l+\frac{h}{l}y-s_i\right|^{b-1}+\left|\frac{h}{l}y-s_i\right|^{b-1}\right)dy\right\}$$

（在$p=\infty$时，这些关系式显然是正确的）。

当$b\geqslant 1$时，显然

$$\sum_{i=1}^{k}\int_0^l\left(\left|l+\frac{h}{l}y-s_i\right|^{b-1}+\left|\frac{h}{l}y-s_i\right|^{b-1}\right)dy=O(1).$$

故这时有

$$\|\Psi_+(z(s+h))-\Psi_+(z(s))\|_{L^p(\Gamma)}=O(|h|^{r_+}).$$

而当$b<1$时，设使得$\left|l+\frac{h}{l}y-s_i\right|$或$\left|\frac{h}{l}-s_i\right|$在$0\leqslant y\leqslant l$中有零点的$s_i$，则显然有

$$|h|\sum_{i=1}^{k_1}\int_0^l\left(\left|l+\frac{h}{l}y-s_i\right|^{b-1}+\left|\frac{h}{l}y-s_i\right|^{b-1}\right)dy$$

$$=O(|h|^b),$$

$$\sum_{i=k_1-1}^{k}\int_0^l\left(\left|l+\frac{h}{l}y-s_i\right|^{b-1}+\left|\frac{h}{l}y-s_i\right|^{b-1}\right)dy$$

$$=O(1).$$

因此这时有

$$\|\Psi_+(z(s+h)) - \Psi_+(z(s))\|_{L^p(\Gamma)} = O(|h|^{br_+}).$$

由于r_+是可以任意接近于1的常数，故在$\eta_+<1$的情况下，定理的这一部分就已得到证明。

当$\eta_+ = 1$时，即$\frac{1}{2-\alpha_-}+\frac{1}{p}>1$，则由已经证得的结论知道，在$p=\infty$时，$\Psi_+(z)\in \mathrm{Lip}(\frac{1}{2-\alpha_-}-\varepsilon, \infty)$，$z\in\Gamma$，因此（由微商的定义出发）不难直接验证$\Psi_+'(z)\in L^p(\Gamma)$。由$\Psi_+'(z)\in L^p(\Gamma)$就自然可以导出$\Psi_+(z)\in \mathrm{Lip}(1, p)$，因为

$$\Psi_+(z(s+h)) - \Psi_+(z(s)) = \int_s^{s+h} \Psi_+'(z(t))\frac{dz}{dt}dt$$

导致
$$|\Psi_+(z(s+h)) - \Psi_+(z(s))| \leqslant \int_s^{s+h} |\Psi_+'(z(t))|dt$$
$$= \frac{|h|}{l}\int_0^l \left|\Psi_+'\left[z\left(\frac{h}{l}y+s\right)\right]\right|dy,$$

所以
$$\|\Psi_+(z(s+h)) - \Psi_+(z(s))\|_{L^p(\Gamma)} \leqslant |h|\,\|\Psi_+'\|_{L^p(\Gamma)}$$
（另一种证法可以利用[6]中的结果）。

这样就证明了定理的第一部分。

当$\Gamma\in P.L.(\alpha_+, \alpha_-)$时，所有的证法都一样，只要在上面的证明过程中取$r_+=1$即可。至于可以取$r_+=1$这一点，我们将要证明。

我们知道，映射边界为(Λ)类的Jordan 光滑曲线的区域为圆时，其映射函数（在边界上）是满足1级的 Hölder-Lipschitz 条件的（因其导数之模界于两正的常数之间，参看[5]），因此要能够令$r_+=1$，只要证明$^*\Gamma$的任何一段子弧属于（Λ）类即可。当然$^*\Gamma$是在黎曼面上光滑的Jordan曲线，但在点$\xi(z(s_i))$，$i=1, \cdots, k$处附近可能破坏了（Λ）类的特征。为此，我们要指出这是不可能的。

不失一般性，我们只要证明，$^*\Gamma$上含有点$\xi(z(s_2))$，但不含有点$\xi(z(s_1))$和$\xi(z(s_3))$的任一子弧$^*T\in(\Lambda)$即可。为叙述方便，

我们设$z(s_2)=0$，即$\xi(z(s_2))=0$。这时$^*T$被原点$\xi=0$分为二段$^*T_+$，$^*T_-$，而$^*T$，$^*T_+$，$^*T_-$。在Γ上对应的像分别记为T，T_+，T_-。

我们知道，$\theta(s, T)=\arg z'(s)$，在$z=0$处是不连续的，在这里它有一个第一类不连续点，跃度为$1-\alpha_2$，除此之外就是处处连续的了。为了方便，我们规定$\xi(z(s))=\xi_1(z(s))[z(s)]^{1/\alpha_2}$，则$^*T$的切角为

$$\theta(s, {}^*T)=\arg\xi'(z(s))+\arg z'(s)$$

$$=\left(\frac{2}{\alpha_2}-1\right)\arg z(s)+\arg\xi_1(z(s))+\arg\xi_1'(z(s))+\theta(s,T)$$

它在s_2处是连续的。即是说，$^*T$在$\xi(z(s_2))=0$处是光滑的。

在T_+（或$^*T_+$）上，由于$\xi_1(z(s))$，$\xi_1'(z(s))$都是z的不为零的解析函数，故$\arg\xi_1(z(s))$和$\arg\xi_1'(z(s))$满足一级的Hölder-Lipschitz条件。而$\theta(s, T)=\arg z'(s)$在T_+上(并不是在全部T上)对于s的连续模$A(\delta)=\omega(\delta, \theta, c(\overline{T_+}))$。由于$T_+\in(\Lambda)$，有

$$\int_0^{c_0}\frac{A(t)}{t}dt<\infty.$$

另一方面，不失一般性可选弧长参数在T上$s>a>0$，$\arg z(0)\neq 0$，则这时有

$$|\arg z(s+h)-\arg z(s)|=\left|\arg s\int_0^{1+\frac{h}{s}}z'(st)dt\right.$$
$$\left.-\arg s\int_0^1 z'(st)dt\right|$$

$$=\left|\arg\left(1+\frac{\int_1^{1+\frac{h}{s}}z'(st)dt}{\int_0^1 z'(st)dt}\right)\right|$$

$$=0\left\{\left|\int_1^{1+\frac{h}{s}}z'(st)dt\right|\right\}=0(|h|).$$

总结上面的讨论可以知道，$\theta(s, {}^*T)$对s之连续模$\omega_+(\delta)$（在T_+上部分的）满足

$$\int_0^{c_0} \frac{\omega_+(t)}{t} dt < \infty.$$

同样可以证明，$\theta(s,\ ^*T)$在T_-上之连续模$\omega_-(\delta)$使得

$$\int_0^{c_0} \frac{\omega_-(t)}{t} dt < \infty.$$

由于这时$^*T$已成为没有角点的光滑弧，即$\theta(s,\ ^*T)$在T上是连续的。于是不难证明，$\theta(s,{}^*T)$在T上对s的连续模$\omega(\delta) \leqslant 2\max\{\omega_-(\delta),\ \omega_+(\delta)\}$，因而，

$$\int_0^{c_0} \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty,$$

即$^*T$是(Λ)类弧。因而也就证明了$^*\Gamma$的任何子弧是属于(Λ)类的。

定理证毕。

作为一个推论我们有

系. 若有界单连通区域$D \in P.S.(\alpha,\ \beta)$，$\alpha,\ \beta > 0$，则

$$c_1(R-1)^{2-\alpha+\varepsilon} \leqslant U_D(R-1) \leqslant d_D(R-1) \leqslant c_2(R-1)^{\beta-\varepsilon},$$

$$c_1^*(1-r)^{2-\beta+\varepsilon} \leqslant U_D^*(1-r) \leqslant d_D^*(1-r) \leqslant c_2^*(1-r)^{\alpha-\varepsilon},$$

$\varepsilon > 0$为任给定的小常数，c_1，c_2，c_1^*，c_2^*和R，r无关（对比〔4〕中相应结果）。而在$D \in \mathrm{P.L.}(\alpha,\ \beta)$时，$\varepsilon$可选为零。□

同时，我们不难看出$\varphi_-'(\omega) \in H_p$，$p < \dfrac{1}{1-\alpha}$（参看〔3〕），于是就可推出

$$T_D(r) = 0\left\{\frac{1}{(1-r)^\sigma}\right\},\quad \sigma = \max\{0,\ 1-2\alpha+\eta),$$

$\eta > 0$为任何小的常数。

注意：当$D+\Gamma$退化为一逐段光滑（或逐段属于(Λ)类）的Jordan弧时，若只考虑φ_-，ψ_-的结果，则本节的定理还是成立的，证法也是相似的。但若有线积分，则要沿着弧线来回各一次，这里要注意的是在弧上两岸的函数角极值不是一样的，所以“来”

与“回”的被积函数是不相同的．这时φ_+，ψ_+没有意义，$\alpha_+=0$，α、π为弧线上角点处最小夹角的角度．而且有

$$c_1(R-1)^2\leqslant U_D(R-1)\leqslant d_D(R-1)\leqslant c_2(R-1)^{\alpha_--\varepsilon},$$

$\varepsilon>0$　c_1，c_2和R无关．而当Γ是逐段属于(Λ)类时，可令$\varepsilon=0$．

§2.　多项式不等式

2.1. 我们用$(P_n)_m^A$表示m个复变量的n次解析多项式的总体．特别对于单复变量，就用$(P_n)^A$代替$(P_n)_1^A$．

设D为一有界的连续统，$P_n(z)\in(P_n)^A$，我们知道，由

$$\max_{z\in D}|p_n(z)|\leqslant M$$

则必使得

$$\max_{z\in\Gamma_R}|p_n(z)|\leqslant MR^n$$

（参看〔4〕第12页）．故由公式

$$p_n^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{|t-z|=U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\frac{p_n(t)}{(t-z)^{k+1}}dt,\quad z\in D,$$

可得到　$$\max_{z\in D}|p_n^{(k)}(z)|\leqslant\frac{k!}{2\pi}\cdot\frac{2\pi U_D\left(\frac{1}{n}\right)}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}}\max_{z\in\Gamma_{1+\frac{1}{n}}}|p_n(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{ek!M}{\left(U_D\left(\frac{1}{n}\right)\right)^k}.$$

即是说我们有：

对于有界的连续统D，$p_n\in(P_n)^A$导致

$$\|p_n^{(k)}\|_{C(D)}\leqslant\frac{ek!}{\left(U_D\left(\frac{1}{n}\right)\right)^k}\|p_n\|_{C(D)},$$

或者逐次地推导有

$$\|p_n^{(k)}\|_{C(D)}\leqslant\left(\frac{e}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^k\|p_n\|_{C(D)}.$$

2.2. 设D为单连通有界区域．当$z\in\Gamma_r^*$，$0<r<1$时，圆$|t-z|=U_D^*(1-r)+U_D\left(\frac{1}{n}\right)$不会跑到外平准曲线$\Gamma_{1+\frac{1}{n}}$外面去，于是由下面两个式子

$$p_n^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{|t-z|=U_D^*(1-r)+U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\frac{p_n(t)}{(t-z)^{k+1}}dt,$$

$$z\in\Gamma_r^*,$$

$$\|p_n\|_{C\left(\Gamma_{1+\frac{1}{n}}\right)}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\|p_n\|_{C(\overline{D})}\leqslant e\|p_n\|_{C(\overline{D})},$$

$p_n\in(p_n)^A$，我们有

$$\|p_n^{(k)}\|_{C(\Gamma_r^*)}\leqslant\frac{ek!\|p_n\|_{C(\overline{D})}}{\left[U_D^*(1-r)+U_D\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k}.$$

因此有 $$\|p_n^{(k)}\|_{L^p(D)}=\left\{\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}|\varphi_+'(re^{i\theta})|^2 |p_n^{(k)}(\varphi_+(re^{i\theta}))|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left\{\int_0^1 rT_D(r)\ \|p_n^{(k)}\|_{C(\Gamma_r^*)}\,dr\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

所以我们得到

定理2. 设D为有界单连通区域，$p_n\in(P_n)^A$，则必有

$$\|p_n^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant ek!\left\{\int_0^1\frac{T_D(r)rdr}{\left[U_D^*(1-r)+U_D\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{kp}}\right\}^{\frac{1}{p}}\|p_n\|_{C(\overline{D})},$$

$k=0,1,\cdots;\ 0<p\leqslant\infty$. □

另一方面，由上节的结果，或者在定理2中将$U_D^*(1-r)$换为零，可得一较简单的不等式：

$$\|p_n^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant(\text{mes}D^{\frac{1}{p}})\frac{ek!}{\left(U_D\left(\frac{1}{n}\right)\right)^k}\|p_n\|_{C(\bar{D})}.$$

2.3. 设Γ为 Jordan 可求长的曲线，D为它的内域，$p_n(z)\in(P_n)^A$，

$$\|p_n\|_{C(\bar{D})}=M,$$

则由最大模原则，在Γ上有一点z_0使得

$$|p_n(z_0)|=M,$$

利用不等式

$$\|p_n'\|_{C(\bar{D})}\leqslant\frac{e}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}M,$$

则有 $$|p_n(z)-p_n(z_0)|\leqslant\int_{z_0}^{z}|p_n'(z)||dz|\leqslant\frac{eM}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\int_{z_0}^{z}|dz|,$$

这里积分是沿着Γ上取的，$z\in\Gamma$. 因此有

$$|p_n(z)|\geqslant|p_n(z_0)|-|p_n(z)-p_n(z_0)|$$
$$\geqslant M\left(1-\frac{e}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\int_{z_0}^{z}|dz|\right),$$

所以得到：对 $U_D\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant el$，

$$\int_\Gamma|p_n(z)|^p|dz|\geqslant M^p\int^{U_D\left(\frac{1}{n}\right)/e}\left(1-\frac{es}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^p ds$$

$$\geqslant M^p\frac{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}{e(p+1)},$$

即 $$\|p_n\|_{C(\bar{D})}\leqslant\left[\frac{e(p+1)}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\right]^{\frac{1}{p}}\|p_n\|_{L^p(\Gamma)},\quad 0<p\leqslant\infty,$$

因此有 $\|p_n\|_{L^q(\Gamma)}=\left\{\int_\Gamma |p_n|^p|p_n|^{q-p}|dz|\right\}^{\frac{1}{q}}$

$$\leqslant\left[\frac{e(p+1)}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\right]^{\frac{q-p}{qp}}\|p_n\|_{L^p(\Gamma)}^{\frac{q-p}{q}}\|p_n\|_{L^p(\Gamma)}^{\frac{p}{q}}$$

$$\leqslant\left[\frac{e(p+1)}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|p_n\|_{L^p(\Gamma)},\quad p\leqslant q.$$

因此我们得到：

定理3. 设区域D之边界Γ为可求长Jordan曲线，$p_n\in(p_n)^A$，若n满足$U_D\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant el$，$l$为$\Gamma$之长度，则有

$$\|p_n\|_{L^q(\Gamma)}\leqslant\left[\frac{e(p+1)}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\right]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|p_n\|_{L^p(\Gamma)},$$

$0<p\leqslant q\leqslant\infty$. □

利用2.2节的结果就可得到：

定理3*. 在上面定理条件下

$$\|p_n^{(k)}\|_{L^r(D)}\leqslant A\left[\frac{e(p+1)}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\right]^{\frac{1}{p}}\|p_n\|_{L^p(\Gamma)},$$

这里 $0<r,\ p\leqslant\infty,\quad A=ek_1\left\{\int_0^1\frac{T_D(t)\,t\,dt}{A(t)^{kr}}\right\}^{\frac{1}{r}},$

$$A(t)=U_D^*(1-t)+U_D\left(\frac{1}{n}\right).\ \square$$

注： 当$D+\Gamma$退化为一条可求长 Jordan 弧时，本节定理仍然正确。

2.4. 设D为有界单连通区域，$\bar{D}=D+\Gamma\in S_2(r,\theta)$（参看

第二章定义)。对$p_n\in(P_n)^A$，设

$$\|p_n\|_{C(\bar{D})}=M,$$

因而在Γ上有一点z_0，使得$|p_n(z_0)|=M$。于是存在一个以z_0为顶点，半径为r，张角为θ的扇形$\Delta\subset\bar{D}$(由$S_2(r,\theta)$的定义)。这时，对$z\in\Delta$我们有

$$|p_n(z)-p_n(z_0)|\leqslant\int_{z_0}^{z}|p_n'(z)||dz|\leqslant\frac{eM}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}|z-z_0|,$$

因而在Δ中

$$|p_n(z)|\geqslant|p_n(z_0)|-|p_n(z)-p_n(z_0)|$$

$$\geqslant M\left(1-\frac{e}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}|z-z_0|\right).$$

所以可以得到

$$\iint_D|p_n(z)^p dxdy\geqslant\iint_\Delta|p_n(z)|^p dxdy$$

$$\geqslant M^p\theta\int_D^{U_D\left(\frac{1}{n}\right)/e}\left(1-\frac{er}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^p rdr$$

$$\geqslant\frac{\theta\left(U_D\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2M^p}{e^2(p+1)(p+2)},$$

这里n要选得足够大，使得$U_D\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant er$。因此得到

$$\|p_n\|_{C(\bar{D})}\leqslant\left(\frac{e^2(p+1)(p+2)}{\theta U_D\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)^{\frac{1}{p}}\|p_n\|_{L^p(D)},\quad 0<p\leqslant\infty,$$

于是我们有

$$\|p_n\|_{L^q(D)}=\left\{\iint_D|p_n|^p|p_n|^{q-p}dxdy\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\left(\frac{e^2(p+1)(p+2)}{\theta\left(U_D\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}\right)^{\frac{q-p}{pq}}\|P_n\|_{L^{\frac{p}{q}}(D)}^{\frac{q-p}{q}}\|p_n\|_{L^p(D)}^{\frac{p}{q}},$$

$q\geqslant p$.

即是说我们得到了

定理4. 设单连通闭区域$\bar{D}\in S_2(r_0,\ \theta_0)$，$r_0,\ \theta_0>0$，$p_n\in(P_n)^A$，$n$满足$U_D\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant er_0$，则有

$$\|p_n\|_{L^q(D)}\leqslant\left(\frac{e^2(p+1)(p+2)}{\theta_0\left(U_D\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|p_n\|_{L^p(D)},$$

$0<p\leqslant q\leqslant\infty$. □

利用2.2节的结果就得到

定理4*. 在定理4的条件下

$$\|p_n^{(k)}\|_{L^r(D)}\leqslant A\left(\frac{e^2(p+1)(p+2)}{\theta_0\left(U_D\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}\right)^{\frac{1}{p}}\|p_n\|_{L^p(D)},$$

这里$0<r,\ p\leqslant\infty$，A为定理3*中所述之常数. □

2.5. 在这里我们再提出一类多项式不等式.

定理5. 设区域D之边界Γ为可求长Jordan曲线，$p_n\in(P_n)^A$，$0<p\leqslant\infty$，则

$$\|p_n\|_{L^p(\Gamma_R)}\leqslant R^n\left(\frac{A_R(a)}{B(a)}\right)^{\frac{2}{p}}\|p_n\|_{L^p(\Gamma)},$$

这里$A_R(a)=\max\limits_{z\in\Gamma R}|z-a|$，$B(a)=\min\limits_{z\in\Gamma}|z-a|$，

$a\in D$是任意给定的. □

证明. 实际上，$\xi=\frac{1}{z-a}$把$\bar{D}=D+\Gamma$之补集D_∞^*映成某一个Jordan区域G，而Γ_R变成了K_R. 这时对任何$g(\xi)\in A(G)$，当R下

降于1 时，$\|g(\xi)\|_{L^p(K_R)}$是非降的．这只要转化成圆域的情况来考虑即可，而在圆域的情况下，即是我们已知的Hardy定理（参看〔8〕中第54页）．

令$Q_n(\xi)=p_n(z)$，$\lambda(\xi)=\psi_-(z)$，则显然

$$Q_n(\xi)/[\lambda(\xi)]^n\in A(G),$$

故当$R\to 1$时

$$\left\|\frac{Q_n(\xi)}{(\lambda(\xi))^n}\right\|_{L^p(K_R)}$$

是非降的．因而知道

$$\left\|\frac{p_n(z)}{(z-a)^{\frac{2}{p}}(\psi_-(z))^n}\right\|_{L^p(\Gamma_R)}$$

对R也是非降的，于是有

$$\|p_n\|_{L^p(\Gamma_R)}\leqslant R^n(A_R(a))^{\frac{2}{p}}\left\|\frac{p_n(z)}{(z-a)^{2/p}(\psi_-(z))^n}\right\|_{L^p(\Gamma)}$$

$$\leqslant R^n\left(\frac{A_R(a)}{B(a)}\right)^{\frac{2}{p}}\|p_n\|_{L^p(\Gamma)}.$$

定理证毕．

注意到：$U_{D_R^+}(t)=U_D\left(\frac{t}{R}\right)$，$U^*_{D_R^+}(t)=U^*_D\left(\frac{t}{R}\right)$，$T_{D_R^+}(t)=T_D\left(\frac{t}{R}\right)$，$D_R^+$为$\Gamma_R$之内域，我们有

定理5*． 在定理5的条件下，有

$$\|p_n\|_{L^q(\Gamma_R)}\leqslant R^n\left(\frac{A_R(a)}{B(a)}\right)^{\frac{2}{p}}\left(\frac{e(p+1)}{U_D\left(\frac{1}{nR}\right)}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|p_n\|_{L^p(\Gamma)},$$

这里$0<p\leqslant q\leqslant\infty$．□

令$q=\infty$，并应用定理2，则有

定理5．** 在定理5的条件下有

$$\|p_n^{(k)}\|_{L^r(D_R^+)}\leqslant R^n\left(\frac{A_R(a)}{B(a)}\right)^{\frac{2}{p}}\left(\frac{e(p+1)}{U_D\left(\frac{1}{nR}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}\dot{A}_R\|p_n\|_{L^p(\Gamma)},$$

这里k为非负整数，$0<r$，$p\leqslant\infty$，

$$\dot{A}_R = ek! \left\{\int_0^1 T_D\left(\frac{t}{R}\right)\frac{tdt}{Q(t)^{kr}}\right\}^{\frac{1}{r}},$$

$$Q(t) = U_D^*\left(\frac{1-t}{R}\right) + U_D\left(\frac{1}{nR}\right). \square$$

注：对$\Gamma\in(A)$，$p_n\in(P_n)^A$，

$$\|p_n^{(k)}\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant c_1 n^k\|p_n\|_{L^p(\Gamma)},\quad 1<p<\infty,$$

$$\|p_n^{(k)}\|_{L^q(\Gamma)}\leqslant c_2 n^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|p_n\|_{L^p(\Gamma)},$$

$p>0$，$q\geqslant p$，$1\leqslant q<\infty$，因而在定理5*的条件下，只要$R>1$，$q\geqslant 1$，就有

$$\|p_n^{(k)}\|_{L^q(\Gamma_R)}\leqslant c_3 R^n n^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|p_n\|_{L^p(\Gamma)},$$

c_1，c_2，c_3和n，p_n无关(参看第六章最后证明的不等式)。

2.6. 在这一节中我们对有理多项式的一些不等式作些注记。

设D是连通集合，$\bar{D}$是连续统，$\bar{D}$之补集$K=\sum_{i=1}^m K^{(i)}$，$K^{(i)}$是单连通的区域，$K^{(1)}$含$z^{(1)}=\infty$，并选定$z^{(i)}\in K^{(i)}$，$i=1,\cdots,m$。

设$z=\overset{(i)}{\psi}_-(\omega)$等角映射$|\omega|>1$于$K^{(i)}$，

$z^{(i)}=\overset{(i)}{\psi}_-(\infty)$，$\alpha^{(i)}=\overset{(i)}{\psi}{}'_-(\infty)>0$，

$i=1,2,\cdots,m$。

令$\overset{(i)}{\psi}(z)$为$\overset{(i)}{\psi}_-(\omega)$的反函数。

这时我们仍记D的边界是Γ，它的外平准曲线Γ_R，$R>1$是$\sum_{i=1}^m\overset{(i)}{\Gamma}_R$，$\overset{(i)}{\Gamma}_R$是$\overset{(i)}{\psi}_-(|\omega|=R)$。$\overset{(i)}{\Gamma}$是$K^{(i)}$的边界。

像1.1节一样，相似地定义$U_D(R-1)$，$d_D(R-1)$。

若$\overset{(i)}{\Gamma}$是Jordan曲线（可以有重点），则$\overset{(i)}{\psi}_-(\omega)$，$\overset{(i)}{\psi}_-(z)$直到定义域边界连续。这时定义

$$\overset{(i)}{I}_D(\delta) = \omega(\delta,\ \overset{(i)}{\psi}_-,\ c(K^{(i)} + \overset{(i)}{\Gamma}));$$

$$\overset{(i)}{J}_D(\delta) = \omega(\delta,\ \overset{(i)}{\psi}_-,\ c(|\omega| \geqslant 1));$$

$\overset{(i)}{I}{}_D^{-1}(\delta)$为$\overset{(i)}{I}_D(\delta)$的反函数；

$$I_D^{-1}(\delta) = \min_i \overset{(i)}{I}{}_D^{-1}(\delta),\ J_D(\delta) = \max_i \overset{(i)}{J}_D(\delta).$$

这时，像对单连通区域的情况一样可得

$$I_D^{-1}(R-1) \leqslant U_D(R-1) \leqslant d_D(R-1) \leqslant J_D(R-1).$$

相似地定义P.S.$(\alpha,\ \beta)$，P.L.$(\alpha,\ \beta)$。若$K^{(i)} \in$ P.S.$(\alpha_i,\ \beta_i)$，则$D \in$ P.S.$(\alpha,\ \beta)$，$\alpha = \min\{\beta_i\}$，$\beta = \min(\alpha_i)$。对于P.L.$(\alpha,\ \beta)$类也有这种关系。

对一般连续统$\bar{D}$，我们有

$$U_D(R-1) \geqslant \text{const.}(R-1)^2;$$

对$D \in$ P.S.$(\alpha,\ \beta)$，有

$$c_1(R-1)^{2-\alpha+\varepsilon} \leqslant U_D(R-1) \leqslant d_D(R-1)$$
$$\leqslant c_2(R-1)^{\beta-\varepsilon},$$

这里c_1，c_2和R无关，$\varepsilon > 0$为任意给定的小常数，当$D \in$ P.L.$(\alpha,\ \beta)$时，ε可以为零。

而且这时有

$$\overset{(i)}{\varphi}_-(\omega) \in \text{Lip}(\lambda,\ p),\quad |\omega| = 1,$$

$$\lambda = \min\left(\beta + \frac{1}{p} - \varepsilon,\ 1\right),\quad p > 1,$$

$$\overset{(i)}{\Psi}_-(z) \in \text{Lip}(\eta,\ p),\quad z \in \overset{(i)}{\Gamma},$$

$$\eta = \min\left(\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{p} - \varepsilon,\ 1\right),\quad \varepsilon > 0,$$

而当$D \in P.L.(\alpha,\ \beta)$时，$\varepsilon$可为零，$p$可为1。

记$(R_n)^A$为只有有限个极点，而且在每个极点处的级不超过n的半纯函数的集合，即n次解析有理多项式的集合。

设$G_n(z)\in(R_n)^A$，除去$z^{(l)}$，$l=1$，…，m外没有极点．这时显然

$$G_n(z)/[\overset{(i)}{\Psi}_-(z)]^n \quad \in A(K^{(i)})\cap C(K^{(i)}+\overset{(i)}{\Gamma}),$$

因此由极大模原则有

$$\left\|\frac{G_n(z)}{\overset{(i)}{\Psi}_-(z)^n}\right\|_{C(\overset{(i)}{\Gamma}_R)}\leqslant\|G_n(z)\|_{C(\overset{(i)}{\Gamma})}$$

$$\leqslant\|G_n(z\|_{C(\overline{D})},\quad R\geqslant 1.$$

所以得到

定理6． 在上述条件下

$$\|G_n(z)\|_{C(\Gamma_R)}\leqslant R^n\|G_n(z)\|_{C(\overline{D})}.\ \square$$

这样一来，2.1—2.4节中的一些不等式对有理多项式$G_n(z)$也有相应的结果．例如有

定理3．** 在上面的定理条件下

$$\|G_n^{(k)}(z)\|_{C(\overline{D})}\leqslant\left(\frac{e}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^k\|G_n(z)\|_{C(\overline{D})},$$

若Γ为可求长，$l=\min l(\overset{(i)}{\Gamma})$，$l(\overset{(i)}{\Gamma})$为$\overset{(i)}{\Gamma}$之长度，则当$n$满足$U_D\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant el$时，我们有

$$\|G_n(z)\|_{L^q(\Gamma)}\leqslant\left(\frac{e(p+1)}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|G_n(z)\|_{L^p(\Gamma)},$$

$0<p\leqslant q\leqslant\infty$．$\square$

定理4．** 若$\overline{D}\in S_2(r_0,\ \theta_0)$，$r_0$，$\theta_0>0$．$U_D\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant er_0$，则有

$$\|G_n(z)\|_{L^q(D)}\leqslant\left(\frac{e^2(p+1)(p+2)}{\theta_0U_D\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|G_n(z)\|_{L^p(D)},$$

$0<p\leqslant q\leqslant\infty$．$\square$

用定理5的证法可得

定理5*.** 在本节所述条件下

$$\|G_n(z)\|_{L^p(\Gamma_R)}\leqslant R^n\left(\frac{A_R(a)}{B(a)}\right)^{\frac{2}{p}}\|G_n(z)\|_{L^p(\Gamma)},$$

这里$0<p\leqslant\infty$, $A_R(a)=\max\limits_{z\in\Gamma_R}|z-a|$, $B(a)=\min\limits_{z\in\Gamma}|z-a|$, $a\in D$为任给定的点. □

正像2.5节后的注记一样, 同样对$\Gamma\in(\Lambda)$有

$$\|G_n^{(k)}\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant c_1n^k\|G_n\|_{L^p(\Gamma)},\quad 1<p<\infty,$$

$$\|G_n^{(k)}\|_{L^q(\Gamma)}\leqslant c_2n^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|G_n\|_{L^p(\Gamma)},$$

$$p>0,\ q\geqslant p,\ 1<q<\infty,$$

$$\|G_n^{(k)}\|_{L^q(\Gamma_R)}\leqslant c_3R^nn^{k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|G_n\|_{L^p(\Gamma)},$$

$$q\geqslant p,\ 1<q<\infty,$$

后一不等式当$R>1$时, 只要Γ可求长就够了. 这些不等式证明的基础参看第六章（定理12）.

§3. 解析函数的嵌入不等式

3.1. 利用定理2, 我们可以得到

定理7. 若单连通区域D是 Carathéodory 型的（参看[3], [7]), 并且对于确定的p, $0<p<\infty$, 使得

$$\lambda_{k,p}(D)=k!e\left\{\int_0^1\frac{T_D(r)rdr}{U_D^*(1-r)^{kp}}\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

则对任何$f(z)\in A(D)$有

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant a_p\lambda_{k,p}(D)\sup_{z\in D}|f(z)|.$$

这里a_p为满足$\|\cdot\|_{L^p(D)}\in p(a_p)$ 之数, 故对$p\geqslant1$, $a_p=1$, 对$0<p<1$, $1\leqslant a_p\leqslant2^{\frac{1}{p}-1}$（这时我们就取 $a_p=2^{\frac{1}{p}-1}$）. □

证明. 若$\sup\limits_{z\in D}|f(z)|=+\infty$, 则这结果不证自明. 当$f(z)$ 在D中有界时, 根据 Farrell 之结果（参看[7]), 存在多项式序列

$\{Q_m(z)\}$在D中广义一致收敛于$f(z)$，并且，

$$\lim_{m\to\infty}\max_{z\in\overline{D}}|Q_m(z)|\leqslant\sup_{z\in D}|f(z)|,$$

也即是说，

$$\max_{z\in\overline{D}}|Q_m(z)|\leqslant\sup_{z\in D}|f(z)|+\varepsilon_m,$$

$$\lim_{m\to\infty}\varepsilon_m=0.$$

由于 $Q_m(z)$是多项式（不管它的次数是多少），由定理2就有

$$\|Q_m^{(h)}(z)\|_{L^p(D)}\leqslant\lambda_{h,p}(D)\max_{z\in\overline{D}}|Q_m(z)|,$$

因此，对m而言，$\|Q_m^{(h)}\|_{L^p(D)}$是一致有界的，并且在D中$Q_m^{(h)}(z)$广义一致收敛于$f^{(h)}(z)$，由Fatou定理知道，$\|f^{(h)}\|_{L^p(D)}<\infty$。

这时对于任何$E\subset D$有

$$\|f^{(h)}-Q_m^{(h)}\|_{L^{p'}(E)}\leqslant(\text{mes}E)^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}2^{\frac{1}{p}}\{\|f^{(h)}\|_{L^p(D)}+$$

$$\|Q_m^{(h)}\|_{L^p(D)}\}\leqslant c\ (\text{mes}\,E)^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}},$$

这里p'为任何小于p之正数。因此，由熟知的积分号下换限的定理知道

$$\lim_{m\to\infty}\|f^{(h)}-Q_m^{(h)}\|_{L^{p'}(D)}=0.$$

而另一方面

$$\|f^{(h)}\|_{L^{p'}(D)}\leqslant a_{p'}(\|f^{(h)}-Q_m^{(h)}\|_{L^{p'}(D)}+\|Q_m^{(h)}\|_{L^{p'}(D)}$$

$$\leqslant a_{p'}(\|f^{(h)}-Q_m^{(h)}\|_{L^{p'}(D)}+(\text{mes}D)^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}\|Q_m^{(h)}\|_{L^p(D)})$$

$$\leqslant a_{p'}(\|f^{(h)}-Q_m^{(h)}\|_{L^{p'}(D)}+\lambda_{h,p}(D)\max_{z\in\overline{D}}|Q_m(z)|(\text{mes}D)^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}})$$

$$\leqslant a_{p'}(\|f^{(h)}-Q_m^{(h)}\|_{L^{p'}(D)}+\lambda_{h,p}(D)(\text{mes}\,D)^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}$$

$$\cdot(\sup_{z\in D}|f(z)|+\varepsilon_m)).$$

令$m\to\infty$，则得到

$$\|f^{(h)}\|_{L^{p'}(D)}\leqslant a_{p'}\ \lambda_{h,p}(D)(\text{mes}D)^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}}\sup_{z\in D}|f(z)|.$$

但由于这式子对任何$p'<p$都成立，令$p'\to p$，则有

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)} \leqslant a_p \lambda_{k,p}(D) \sup_{z\in D} |f(z)|.$$

定理证毕.

把这一结果具体化，则得到：

若D为有界的Carathéodory区域，$f(z)\in A(D)$，则

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)} \leqslant \frac{a_p e k!\,16^k}{|\varphi_+'(0)|^k}\left\{\int_0^1 \frac{T_D(r) r dr}{(1-r)^{2kp}}\right\}^{\frac{1}{p}} \sup_{z\in D}|f(z)|,$$

而当D为凸区域时，

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)} \leqslant \frac{4^k a_p e k!}{|\varphi_+'(0)|^k}\left\{\int_0^1 \frac{T_D(r) r dr}{(1-r)^{kp}}\right\}^{\frac{1}{p}} \sup_{z\in D}|f(z)|.$$

若Carathéodory型区域 $D\in$ P.S.$(\alpha,\ \beta)$，$f(z)\in A(D)$，则当

$$\int_0^1 \frac{dr}{(1-r)^{\lambda}} < \infty,\ \lambda = \max(1-2\alpha,\ 0) + (2-\beta)Rp + \varepsilon$$

时，有与$f(z)$无关的常数c使得

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)} \leqslant c \sup_{z\in D}|f(z)|,$$

这里$\varepsilon>0$，而当$D\in P.L.(\alpha,\ \beta)$ 时，可令$\varepsilon=0$.

若$f(z)\in A(D)$，$D=\sum_{i=1}^{m} D_i$，D_i为单连通的 Carathéodory 型区域，并且$\sum_{i=1}^{m}\lambda_{k,p}(D_i)<\infty$，则

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)} \leqslant c^p \sum_{i=1}^{m} \|f^{(k)}\|_{L^p(D_i)} \leqslant c_p\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_{k,p}(D_i)\right) \sup_{z\in D}|f(z)|,$$

这里当$p\geqslant 1$时，$c_p=1$，当$0<p<1$时，$1\leqslant c_p\leqslant m^{\frac{1}{p}}$.

3.2. 在这一节中将考虑上面的结果中改 $\sup|f(z)|$ 为 $\|f\|_{L^q(D)}$时的情况.

首先考虑 $\|f\|_{L^q(D)}<\infty$，$0<q<\infty$ 时的情况. 这时对内平准

曲线Γ_r^*，$0<r<1$上的点子，利用$|f(z)|^q$之次调合性有

$$|f(z)|^q\leqslant\frac{1}{\pi(U_D^*(1-r))^2}\iint\limits_{|t-z|<U_D^*(1-r)}|f(t)|^q d\xi d\eta$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi(U_D^*(1-r))^2}\iint\limits_D|f(t)|^q d\xi d\eta,\quad t=\xi+i\eta,$$

因此有

$$\max_{z\in\Gamma^*_{r^{\frac{1}{2}}}}|f(z)|\leqslant\frac{\|f\|_{L^p(D)}}{\pi^{\frac{1}{q}}(U_D^*(1-r^{\frac{1}{2}}))^{2/q}}.$$

由于

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{|t-z|=\tau(r)}\frac{f(t)dt}{(t-z)^{k+1}},\quad z\in\Gamma_r^*,$$

这里$\tau(r)=d_D^*(\Gamma^*_{r^{\frac{1}{2}}},\ \Gamma_r^*)$（参看§1），因此有

$$\max_{z\in\Gamma_r^*}|f^{(k)}(z)|\leqslant\frac{k!\|f\|_{L^q(D)}}{\pi^{\frac{1}{q}}(U_D^*(1-r^{\frac{1}{2}}))^{2/q}\tau(r)^k},$$

所以得到

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant\left\{\int_0^1\int_0^{2\pi}|\varphi_+'(re^{i\theta})|^2 d\theta\max_{z\in\Gamma_r^*}\right.$$

$$\left.|f^{(k)}(z)|^p rdr\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{k!}{\pi^{\frac{1}{q}}}\left\{\int_0^1\frac{T_D(r)rdr}{c_k(r,p,q)}\right\}^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^q(D)},$$

$$c_k(r,p,q)=U_D^*(1-r^{\frac{1}{2}})^{\frac{2p}{q}}\tau(r)^{kp},$$

总结上述，我们得到

定理8. 对于单连通区域D（不一定要求有界），若

$$\mu_{k,p,q}(D)=\frac{k!}{\pi^{1/q}}\left\{\int_0^1\frac{T_D(r)rdr}{c_k(r,p,q)}\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

这里$0<p$，$q<\infty$，k为某一非负整数，

$c_k(r,\ p,\ q)=U_D^*(1-r^{\frac{1}{2}})^{\frac{2p}{q}}\tau(r)^{kp}$，$\tau(r)=d_D^*(\Gamma^*_{r^{\frac{1}{2}}},\ \Gamma_r^*)$，则对任何$f(z)\in A(D)$有

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant \mu_{k,p,q}(D)\|f\|_{L^q}(D). \ \square$$

利用特殊区域的特点，这定理的具体化有：

若D为有界单连通区域，$f(z)\in A(D)$，则

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant\frac{k!2^k 32^{k+\frac{2}{q}}}{\pi^{\frac{1}{q}}|\varphi_1'(0)|^{k+2/q}}\left\{\int_0^1\frac{T_D(r)r^{\theta_1}dr}{(1-r)^{\theta_2}}\right\}^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^q(D)},$$

这里$p>0$，$q<\infty$，$\theta_1=\dfrac{3}{2}-2kp$，$\theta_2=2(k+\dfrac{2}{q})p$. 而当$D$为凸区域时

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant\frac{k!8^{k+\frac{2}{q}}}{\pi^{\frac{1}{q}}|\varphi_1'(0)|^{k+\frac{2}{q}}}$$

$$\cdot\left\{\int_0^1\frac{T_D(r)rdr}{(1-r)^{(\frac{2}{q}+k)p}}\right\}^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^q(D)},$$

这里$0<p$，$q<\infty$.

若$D\in P.S.(\alpha,\beta)$，$f(z)\in A(D)$，

$\max(1-2\alpha,0)+(2-\beta)\left(\dfrac{2}{q}+k\right)p<1$，则

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant c\|f\|_{L^q(D)}, \qquad (*)$$

这里c和$f(z)$无关.

设 $f(z)\in A(D)$，$D=\sum\limits_{i=1}^m D_i$，$D_i$为单连通区域，$\mu=\sum\limits_{i=1}^m \mu_{k,p,q}(D_i)<\infty$，$0<p$，$q<\infty$，则有

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant c_p\mu\|f\|_{L^q(D)},$$

这里c_p和3.1节中的定义相同.

3.3. 在上节不等式(*)中，p是受α，β约制的，但用另外的方法我们可解消这一约制.

定理9. 设D为有有限连通数的连通区域，它的边界Γ是逐段光滑的，并且内夹角都大于零，则对任何D中之解析函数$f(z)$有

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant c^k\|f\|_{L^q(D)},$$

这里$0<q<\infty$，$0<p<q/[(2^k-1)q+2^k]$，常数c和$f(z)$，k无关。
□

证明. 我们只证定理对$k=1$成立即可，因为对$k>1$的情况可用$k=1$时的结果递推导出。

不难看到，这时D必是有限个单连通区域D_i，$i=1$，…，m的和集(可以相交)。对于每个D_i，其边界L_i至多有一个角点z_i，并且L_i在z_i处的内夹角$\alpha_i\pi$能够满足$0<\alpha_i\leqslant 1$（对于$\alpha_i>1$，就可以改用h个新的光滑区域来掩盖）。取m相当大，使得每一个D_i的直径充分小（这时有些D_i可能根本没有角点，它们本身就是一个光滑区域），以致在$w=(z-z_i)^{\frac{1}{\alpha_i}}$的变换下，$D_i$变成一单叶的单连通的光滑区域。

若我们的定理对每个D_i证明了，即存在常数$c_i=c_i(p,q,D_i)$使得

$$\|f'(z)\|_{L^p(D_i)}\leqslant c_i\|f(z)\|_{L^q(D_i)},$$

则有

$$\begin{aligned}\|f'(z)\|_{L^p(D)}&\leqslant k\sum_{i=1}^{m}\|f'\|_{L^p(D_i)}\\&\leqslant k\sum_{i=1}^{m}c_i\|f\|_{L^q(D_i)}\\&\leqslant\left(k\sum_{i=1}^{m}c_i\right)\|f(z)\|_{L^q(D)}.\end{aligned}$$

这时定理对D也就证明了。因此，为了证明本定理，只要证明下面特殊的命题即可。

设单连通区域D之边界Γ经过点$z=0$，并且除这点外是光滑的，Γ在这点的内夹角为2π，$\delta\leqslant\alpha<1$，δ为某一正数（例如可取$\delta=\min(\alpha_i)$）。则对任何$0<q<\infty$，存在常数$c=c(p,q,D)$，它与$f(z)\in A(D)$无关，$0<p<\dfrac{q}{q+2}$，使得

$$\|f'\|_{L^p(D)}\leqslant c\|f\|_{L^q(D)}.$$

首先我们可以看出，当$\alpha=1$时，即Γ为光滑时，这命题是上

节不等式(＊)的一个推论 ($\alpha=\beta=1$, $k=1$)，故这时我们的命题无疑是成立的。现在我们来证明当$\mu<\alpha<1$时这命题也是成立的，这里

$$\mu=1-\left(\frac{2}{2-p}\right)\frac{q-(q+2)p}{q+(q+2)p}.$$

这时 $W=z^{\frac{1}{\alpha}}$等角映射D为一个光滑的Jordan区域D'，利用$\alpha=1$之结果于D'上即有

$$\begin{aligned}\|f'\|_{L^p(D)}&=\left\{\iint\limits_{D'}\left|\frac{\varphi'(\omega)}{\alpha w^{\alpha-1}}\right|^p|\alpha w^{\alpha-1}|^2dudv\right\}^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\alpha^{\frac{2-p}{p}}\left\{\iint\limits_{D'}|w^{\alpha-1}|^{(2-p)s}dudv\right\}^{\frac{1}{ps}}\|\varphi'(\omega)\|_{L^{p_1}(D')}\\&\leqslant c'\|\varphi(\omega)\|_{L^q(D')}\\&=c'\left\{\iint\limits_{D}|f(z)|^q\left|\frac{1}{\alpha}z^{\frac{1}{\alpha}-1}\right|^2dxdy\right\}^{\frac{1}{q}}\\&\leqslant c\|f(z)\|_{L^q(D)},\end{aligned}$$

这里$f(z)=\varphi(\omega)$，$\omega=\mu+i\nu$，$p<p_1=\left(p+\frac{q}{q+2}\right)\Big/2<\frac{q}{q+2}$;

$\frac{p}{p_1}+\frac{1}{s}=1$，($s=[q+(q+2)p]/[q-(q+2)p]$，及$(1-\alpha)(2-p)s<2$。所以

$$\iint\limits_{D'}|w^{\alpha-1}|^{(2-p)s}dudv<\infty.$$

于是我们的命题对 $\mu<\alpha\leqslant1$，$0<p<\frac{q}{q+2}$，是成立的。且常数只与α，p，q有关，而与$f(z)$无关（c和α之关系可化归和μ之关系，因而最终化归和D之总体的关系）。

再考虑 $\mu^2<\alpha\leqslant\mu$时的情况。利用映射函数$\omega=z^{\frac{1}{\mu}}$，则D变为一个区域D''，D''的边界除$w=0$外是光滑的，并且在$w=0$处的内夹角$\alpha'\pi$满足$\mu<\alpha'\leqslant1$。根据上面的论证，对于区域D''，我们的命题是成立的。故对于任何确定的p，$0<p<\frac{q}{q+2}$，有

$$\|f'\|_{L^p(D)}=\left\{\iint\limits_{D''}\left|\frac{\varphi_1'(\omega)}{\mu w^{\mu-1}}\right|^p|\mu w^{\mu-1}|^2dudv\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\mu^{\frac{2-p}{p}}\left\{\iint\limits_{D''}|w^{\mu-1}|^{(2-p)s}dudv\right\}^{\frac{1}{ps}}\|\varphi_1'(\omega)\|_{L^{p_1}(D'')}$$

$$\leqslant c''\|\varphi_1'(\omega)\|_{L^{p_1}(D'')}\leqslant c'''\|\varphi_1(\omega)\|_{L^q(D'')}$$

$$=c'''\left\{\iint\limits_D|f(z)|^q\left|\frac{1}{\mu}z^{\frac{1}{\mu}-1}\right|^2dxdy\right\}^{\frac{1}{q}}\leqslant c\|f(z)\|_{L^q(D)},$$

这里$f(z)=\varphi_1(\omega)$，$\omega=\mu+i\nu$，$p<p_1=\left(p+\frac{q}{q+2}\right)\Big/2<\frac{q}{q+2}$，

$s=\frac{q+(q+2)p}{q-(q+2)p}$，$\max\limits_{z\in\overline{D}}\left|\frac{1}{\mu}z^{\frac{1}{\mu}-1}\right|^2<\infty$，$\iint\limits_{D''}|w^{\mu-1}|^{(2-p)s}dudv<\infty$。所以我们的命题对任何$\alpha$，$p$，当$0<p<\frac{q}{q+2}$，$\mu^2<\alpha\leqslant\mu$（因而$\mu^2<\alpha\leqslant1$）时是成立的。

用相似的方法，逐次可证，对于任何正整数m，我们的命题对$\mu^m<\alpha\leqslant1$是成立的。选m充分大，使得$\mu^m<\delta$，这就证明了我们的命题。

定理证毕。

3.4. 现在来考虑不等式右边只涉及函数的实部时的情况。我们有

定理10. 设D为有界单连通区域，$q\geqslant1$，$0<p<\infty$，

$$\eta_{k,p,q}(D)=k!\ 23\left(\frac{U_D^*(1)}{U_D^*\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{2}{q}}$$

$$\cdot\left\{\int_0^1\frac{T_D(r)r}{\tau(r)^{kp}}\left(\int_0^{\bar{r}}\frac{E(t)}{1-t}dt\right)^pdr\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

$$E(t)=U_D^*(1-t^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{q}},$$

则对任何$f(z)\in A(D)$有

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant\eta_{k,p,q}(D)\|\mathrm{Re}f(z)\|_{L^q(D)},\ (k\geqslant1);$$

$$\|f(z)-\operatorname{Im}f(z_0)\|_{L^p(D)}\leqslant\eta_{0,p,q}(D)\|\operatorname{Re}f(z)\|_{L^q(D)},$$
$$(k=0).$$

这里$\tau(r)=d_D^*(\Gamma^*_{r^{\frac{1}{2}}},\ \Gamma_r^*)$，$z_0=\varphi_+(0)$。□

在证明中我们需要

引理． 设 $\varphi(z)=U(z)+iV(z)\in A(|z|<1)$，$V(0)=0$，$|U(re^{i\theta})|\leqslant M(r)$，这里$M(r)$为$0\leqslant r<1$ 上非降函数，$M(0)>0$。这时有

$$|\varphi(re^{i\theta})|\leqslant 23\frac{M\left(\frac{1}{2}\right)}{M(0)}\int_0^r\frac{M(t^{\frac{1}{2}})}{1-t}dt.\ \square$$

证明． 由

$$U(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{U(\mathrm{Re}^{it})(R^2-r^2)dt}{R^2+r^2-2Rr\cos(t-\theta)},0<r<R<1,$$

得到 $$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}=-\frac{R}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{U(\mathrm{Re}^{it})(R^2-r^2)\sin(t-\theta)}{(R^2+r^2-2Rr\cos(t-\theta))^2}dt.$$

因此 $$\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|\leqslant\frac{M(R)(R^2-r^2)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\sin t|dt}{\left((R-r)^2+4Rr\sin^2\frac{1}{2}t\right)^2}$$

$$\leqslant\frac{2M(R)(R^2-r^2)}{a^2\pi(R-r)^4}$$

$$\int_0^\pi\frac{\frac{1}{2}a^2\sin\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}t\ dt}{\left(1+a^2\sin^2\frac{1}{2}t\right)^2}$$

$$\leqslant\frac{2M(R)(R^2-r^2)}{a^2\pi(R-r)^4}\int_0^\infty\frac{tdt}{(1+t^2)^2}$$

$$\leqslant\frac{M(R)}{2Rr(R-r)},$$

这里$a^2=4Rr/(R-r)^2$。令 $R=\sqrt{r}$，则有

$$\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|\leqslant\frac{M(r^{\frac{1}{2}})}{r^{\frac{1}{2}}(1-r)},\quad 0<r<1.$$

利用极大模原则，当$0<r<\frac{1}{4}$时，$\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|\leqslant\frac{64}{3}M\left(\frac{1}{2}\right)$，因此有

$$\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|\leqslant 22\frac{M\left(\frac{1}{2}\right)M(r^{\frac{1}{2}})}{M(0)(1-r)},\quad 0<r<1.$$

即

$$|V(re^{i\theta})|\leqslant 22\frac{M\left(\frac{1}{2}\right)}{M(0)}\int_0^r\frac{M(t^{\frac{1}{2}})}{(1-t)}dt.$$

另一方面，显然有

$$|U(re^{i\theta})|\leqslant\frac{M\left(\frac{1}{2}\right)}{M(0)}\int_0^r\frac{M(t^{\frac{1}{2}})}{(1-t)}dt.$$

故引理得证。

定理10的证明

因为$q\geqslant 1$，这时我们知道$|\mathrm{Re}f(z)|^q$是次调合函数，因此有

$$|\mathrm{Re}f(z)|^q\leqslant\frac{1}{\pi U_D^*(1-r)^2}\iint_{|W-z|<U_D^*(1-r)}|\mathrm{Re}f(w)|^q du dv$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi U_D^*(1-r)^2}\|\mathrm{Re}\,f(z)\|_{L^q(D)}^q,\quad z\in\Gamma_r^*.$$

即是说

$$|\mathrm{Re}f(z)|\leqslant\frac{1}{\pi^{1/q}U_D^*(1-r)^{2/q}}\|\mathrm{Re}\,f(z)\|_{L^q(D)},$$

$z\in\Gamma_r^*$.

利用上面的引理有

$$|f(z)-I_m f(z_0)|\leqslant\frac{23}{\pi^{1/q}}\left(\frac{U_D^*(1)}{U_D^*\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{2/q}$$

$$\int_0^r\frac{E(t)}{1-t}dt\|\mathrm{Re}f(z)\|_{L^q(D)},$$

这里$z\in\Gamma_r^*$，因而象定理8的证明一样可得

$$\|f(z)-I_m f(z_0)\|_{L^p(D)}\leqslant\eta_{0,p,q}(D)\|\mathrm{Re}f(z)\|_{L^q(D)},$$

这里证明了定理10的第二个不等式。

对于第一个不等式，考虑

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{|t-z|=\tau(r)}\frac{f(t)-I_m f(z_0)}{(t-z)^{k+1}}dt, z\in\Gamma_r^*,$$

这时圆 $|t-z|=\tau(r)$ 含在$\Gamma_{r^{1/2}}^*$之中，利用极大模原则有

$$|f^{(k)}(z)|\leqslant\frac{k!23}{\tau(r)^k}\left(\frac{U_D^*(1)}{U_D^*\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\frac{2}{q}}$$

$$\int_0^{r^{1/2}}\frac{E(t)}{1-t}dt\|\mathrm{Re}f(z)\|_{L^q(D)}, z\in\Gamma_r^*,$$

用同样的方法(定理8)，就可证明第一个不等式。

对于具体的区域，定理10有许多特殊形式。

若D为有界单连通区域，则

$$\eta_{k,p,q}(D)\leqslant\frac{k!32\cdot 2^{22/q+k}U_D^*(1)^{2/q}}{(|\varphi_+'(0)|)^{4/q+k}}\times$$

$$\times\left\{\int_0^1|1-(1-r^{1/2})^{-4/q}|^p\frac{T_D(r)r^{1-3/2kp}}{(1-r)^{2pk}}dr\right\}^{1/p}.$$

若D为凸区域，则

$$\eta_{k,p,q}(D)\leqslant k!23q\frac{U_D^*(1)^{\frac{2}{q}}}{2}\left(\frac{8}{|\varphi_+'(0)|}\right)^{k+\frac{4}{q}}\times$$

$$\times\left\{\int_0^1|1-(1-r^{\frac{1}{2}})^{-\frac{2}{q}}|^p\frac{T_D(r)rdr}{r(1-r)^{kp}}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

若 $D=\sum_{i=1}^m D_i$，D_i为单连通区域，$\eta_{k,p,q}(D_i)<\infty$，则对$f(z)\in A(D)$有

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant C_p\left(\sum_{i=1}^m\eta_{k,p,q}(D_i)\right)\|\mathrm{Re}f\|_{L^q(D)},$$

$k\geqslant1$,

这里$q\geqslant1$，C_p和3.1节的定义同；对 $p\geqslant1$，$C_p=1$；对 $0<p<1$，$1<C_p\leqslant m^{\frac{1}{p}}$。

而当$\mathrm{I_m} f(z_0)=0$，$z_0\in D$，并且D是连通的，则

$$\|f(z)\|_{L^p(D)}\leqslant C\|\mathrm{Re} f(z)\|_{L^q(D)},$$

这里C和$f(z)\in A(D)$无关。

若$D\in$ P.S. $(\alpha,\ \beta)$，则必$D=\sum_{i=1}^{m_*} D_i$，$D_i\in$ P.S. $(\alpha_i,\ \beta_i)$，而且使得$\beta_i=1$。故由上面的结果不难知道，这时若$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$q\geqslant 1$，

$$0<p<\frac{1-\max(0,\ 1-2\alpha)}{\left(k+\frac{2}{q}\right)},$$

则对$f\in A(D)$有

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant c\|\mathrm{Re} f\|_{L^q(D)},\quad k\geqslant 1.$$

这里c和f无关。

我们可以看出，对于$\Gamma\in$ P.S. $(\alpha,\ \beta)$，当

$$0<p<[1-\max(0,\ 1-2\alpha)]q/2$$

时有

$$\|f(z)-\mathrm{Im} f(z_0)\|_{L^p(D)}\leqslant c\|\mathrm{Re} f(z)\|_{L^q(D)},$$

c 和 $f\in A(D)$无关。但在这种情况下得到的结果是不够好的。利用定理9的证法我们可以得到

定理11. 若$D\in$ P.S(α,β)，$\alpha>0$，$\beta\geqslant 0$，则有

$$\|f(z)-\mathrm{I_m} f(z_0)\|_{L^p(D)}\leqslant c\|\mathrm{Re} f(z)\|_{L^q(D)},$$

这里$q>1$，p为任何小于q的正数，c和$f\in A(D)$无关，$z_0\in\varphi_+(0)$。□

这个结果的证明步骤我们不再重复。这结果推广了Babuška的结果，而所用方法和他也有所不同(参看[9,12,13])。

同样的方法可以证明

理定12. 设$D\in$ P.S.(α,β)，$\alpha>0$，$\beta\geqslant 0$，$q\geqslant 1$，$0<p<\frac{q}{q+2}$，则

$$\|f'\|_{L^p(D)}\leqslant c\|\mathrm{Re} f\|_{L^q(D)},$$

这里c和$f\in A(D)$无关。□

这一结果不能像定理9一样逐次推广到高阶导数的情况,因为这里要受到条件$q\geqslant1$的限制，而定理9中的q是可以任意小的。

3.5. 在这一节中我们讨论线积分和面积分之间的不等式.首先我们证明一个预备定理。

引理. 设$\varphi(z)\in A(|z|<1)\cap H_q$，$0<q<\infty$，则对$0<q\leqslant p\leqslant\infty$有

$$\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{1}{(2\pi(1-r))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}$$

$$\cdot\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{i\theta})|^q d\theta\right\}^{\frac{1}{q}},$$

这里$\varphi(e^{i\theta})$是$\varphi(z)$在$|z|=1$上的角极值。□

证明. 根据所给的条件，知道$\varphi(z)$存在Blaschke函数$b(z)$，使得$\varphi(z)=b(z)h(z)$，这里$h(z)\in H_q$，在$|z|<1$内没有零点；$|b(z)|<1$，$|z|<1$，并且在$|z|=1$上$|b(z)|$之角极值几乎处处为1（参看[3]）。这时选$[h(z)]^q$的一支，则显然$[h(z)]^q\in H_1$，因而它可用Cauchy公式来表示：

$$[h(z)]^q=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{[h(t)]^q}{t-z}dt,\quad |z|<1,$$

因而有
$$|h(z)|^q\leqslant\frac{1}{2\pi(1-|z|)}\int_0^{2\pi}|h(e^{i\theta})|^q d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-|z|)}\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{i\theta})|^q d\theta,$$

即是说
$$|\varphi(z)|^q\leqslant\frac{1}{2\pi(1-|z|)}\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{i\theta})|^q d\theta.$$

所以由$\int_0^{2\pi}|\varphi(re^{i\theta})|^q d\theta$的上升性(Hardy定理)，有

$$\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}=\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi(re^{i\theta})|^q|\varphi(re^{i\theta})|^{p-q}d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\max_{0<\theta<2\pi}|\varphi(re^{i\theta})|^{1-\frac{q}{p}}\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi(re^{i\theta})|^q d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi(1-r))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi(re^{i\theta})|^q d\theta\right\}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$$

$$\cdot\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi(re^{i\theta})|^q d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=(2\pi(1-r))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left\{\int_0^{\pi}|\varphi(re^{i\theta})|^q d\theta\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

引理证毕。

有了这个引理我们就可以来证明下面的定理。

定理13. 设区域D之边界Γ为 Jordan 可求长曲线，$0<p$, $q<\infty$,

$$\delta_{p,q}(D)=\left\{\int_0^1\frac{[T_D(r)]^{1-\frac{p}{2q}}}{(2\pi(1-r))^{p/2q}}rdr\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

则对任何$f(z)\in E_q(D)$ $\left(即\int_{\Gamma_r}|f(z)|^q|dz|对0<r<1为有界，参看[3]\right)$，有

$$\|f(z)\|_{L^p(D)}\leqslant\delta_{p,q}(D)\|f(z)\|_{L^q(\Gamma)},$$

这里$f(z)$在Γ上是由角极值定义的。□

证明. 利用带有权函数的Hölder不等式有

$$\|f\|_{L^p(D)}=\left\{\int_0^1\int_0^{2\pi}|f(\varphi_+(re^{i\theta})|^p|\varphi_+'(re^{i\theta})|^2 rd\theta dr\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left\{\int_0^1\left(\int_0^{2\pi}|\varphi_+'(re^{i\theta})|^2d\theta\right)^{1-\frac{p}{2q}}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\int_0^{2\pi}|\varphi_-'(re^{i\theta})|^2|f(\varphi_+(re^{i\theta})|^{2q}d\theta\right)^{\frac{p}{2q}}rdr\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left\{\int_0^1[T_D(r)]^{1-\frac{p}{2q}}r\left(\int_0^{2\pi}|\varphi_+'(re^{i\theta})\cdot h^q(re^{i\theta})|^2d\theta\right)^{\frac{p}{2q}}dr\right\}^{\frac{1}{p}},$$

这里$f(\varphi_+(re^{i\theta}))=h(re^{i\theta})b(re^{i\theta})$，$b(w)$是$f(\varphi_+(w))$的Blaschke函数（我们不难看出它是存在的）。

利用上面的引理则有

$$\|f\|_{L^p(D)}\leqslant\left\{\int_0^1\frac{[T_D(r)]^{1-\frac{p}{2q}}}{(2\pi(1-r))^{p/2q}}r\right.$$

$$\cdot\left(\int_0^{2\pi}|\varphi_+'(e^{i\theta})h^q(e^{i\theta})|d\theta\right)^{\frac{p}{q}}dr\Bigg\}^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left\{\int_0^1\frac{[T_D(r)]^{1-\frac{p}{2q}}}{[2\pi(1-r)]^{p/2q}}rdr\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\cdot\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi_+'(e^{i\theta})||f(\varphi_+(e^{i\theta}))|^qd\theta\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=\delta_{p,q}(D)\|f(z)\|_{L^q(\Gamma)}.$$

定理证毕。

现在来考虑具体的例子。

设 $D\in$ P.S.(α,β)，$\alpha>0$，$\beta\geqslant0$，则 $T_D(r)=0((1-r)^{-\lambda})$，$\lambda=\max(0,1-2\alpha+\varepsilon)$，$\varepsilon>0$，故有

$$\delta_{p,q}(D)=O\left\{\int_0^1\frac{dr}{(1-r)^b}\right\},$$

$$b=\frac{p}{2q}+\left(1-\frac{p}{2q}\right)\max(0,1-2\alpha+\varepsilon),$$

因而当$p<2q$时就有$\delta_{p,q}(D)<\infty$。所以得到：

若有界单连 通 区 域 $D\in$ P.S.(α,β)，$\alpha>0$，$\beta\geqslant0$，对 于 q，$0<q<\infty$，只要$0<p<2q$，则对任何$f(z)\in E_q(D)$有

$$\|f(z)\|_{L^p(D)}\leqslant c\|f(z)\|_{L^q(\Gamma)},$$

这里c和函数$f(z)$无关。

可以证明，对D之边界$\Gamma\in(\Lambda)$，上面的p可等于$2q$。

许多特例使我们猜测下面更好的命题是成立的：

若有界单连通区域D的边界Γ为可求长的Jordan曲线，则对任何$f(z)\in E_q(D)$，$0<q<\infty$，有

$$\|f(z)\|_{L^{2q}(D)}\leqslant(2\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{q}}\|f(z)\|_{L^q(\Gamma)}.$$

利用3.2节的结果，显然可以得到：

设D之边界Γ为可求长Jordan曲线，对于$0<q$，p，$r<\infty$和正整数k，$\mu_{k,p,r}(D)\delta_{r,q}(D)<\infty$，则对任何$f(z)\in E_q(D)$有

$$\|f^{(k)}\|_{L^p(D)}\leqslant\mu_{k,p,r}(D)\delta_{r,q}(D)\|f\|_{L^q(\Gamma)}.$$

3.6. 设可求长Jordan曲线 $\Gamma\in$ P.S.(α,β)，α，$\beta>0$，调和函

数$U(z)\in e_p(D)$，$p>1$，即

$$\sup_{0<\rho<1}\|U(z)\|_{L^p(\Gamma_\rho^*)}<\infty,$$

这时$U(z)$在Γ上几乎处处有角极值，并且在Γ上$U(z)\in L^p(\Gamma)$。

容易证明$\psi_+'(z)\in L^s(\Gamma)$，$s<\dfrac{2-\beta}{1-\beta}$. 于是利用 Hölder 不等式可以导致

$$\|U(\varphi_+(e^{i\theta}))\|_{L^q(0;2\pi)}\leqslant c\|U(z)\|_{L^p(\Gamma)},$$

这里常数c和$U(z)$无关而只和Γ，q，p有关，$0<q<p/(2-\beta)$. 于是当$p>2-\beta$时，我们可使$q>1$. 设$U(z)$是解析函数$f(z)$的实部，于是由M.Riesz不等式有

$$\|f(\varphi_+(e^{i\theta}))-\mathrm{Im}f(\varphi_+(0))\|_{L^q(0;2\pi)}\leqslant c'\|U(z)\|_{L^p(\Gamma)}.$$

另一方面，我们由 $\varphi_+(e^{i\theta})$ 的连续性知道 $\varphi_+'(e^{i\theta})\in L^s(0,2\pi)$，$s<\dfrac{1}{1-\alpha}$，再利用Hölder不等式即得

$$\|f(z)-\mathrm{Im}f(\varphi_+(0))\|_{L^r(\Gamma)}$$
$$\leqslant c''\|f(\varphi_+(e^{i\theta}))-\mathrm{Im}f(\varphi_+(0))\|_{L^q(0,2\pi)},$$

这里$0<r<2q$. 总之我们得到

定理14. 若$\Gamma\in$ P.S.(α,β)，α，$\beta>0$，$f\in A(D)$，$\mathrm{Re}f\in e_p(D)$，$p>2-\beta$，则必

$$\|f(z)-\mathrm{Im}f(z_0)\|_{L^r(\Gamma)}\leqslant c\|\mathrm{Re}f(z)\|_{L^p(\Gamma)},\quad z_0\in D,$$

这里$0<r<\dfrac{\alpha}{2-\beta}p$，$c=c(r,p,\Gamma,z_0)$和$f$无关. □

同时不难看出，当$\Gamma\in(\Lambda)$时，可取$r=p>1$.

3.7. 我们来证明一个不等式，这不等式的雏形见于Михлин的书[10]中. 但是他在证明中假设了光滑区域的映射函数的导数的模是界于两个正常数之间的，而只有(Λ)类曲线围成的区域的映射函数才有这一性质.

对一般光滑的曲线，Мергелян在他的博士论文中曾经指出：若$z(s)$是Γ之自然方程，$j(s)$是$z'(s)$在Γ上的连续模，当

$$\int_{\varepsilon}^{c} \frac{j(t)}{t} dt > |\lg\lg\varepsilon\|\lg\lg\lg\varepsilon|, \quad \varepsilon>0$$

时，能够找到$\varphi(z)\in A(D)$，在$\overline{D}=D+\Gamma$上$\varphi(z)\in \text{Lip}(\alpha)$，使得$n$次多项式对$\varphi(z)$在$\overline{D}$上的逼近度$\rho(n)$有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\rho(n)n^{\alpha}}{(\log n)^{\alpha}}=\infty.$$

若所有光滑区域的映射函数的导数的模界于两个正的常数之间，则映射函数必然在边界上满足1级的Hölder-Lipschitz条件。这时由函数构选的理论（参看第五章§1）知道，对任何在$\overline{D}$上属于$\text{Lip}(\alpha)$的$\varphi(z)\in A(D)$之逼近度$\rho(n)$，有

$$\rho(n)=O\left\{\frac{(\lg n)^{\alpha}}{n^{\alpha}}\right\}.$$

这就引导到矛盾。所以Михлин原来的证法只对充分光滑的区域才可用。现在我们考虑一般的情况，并导出一些其他类型的不等式。

引理1. 设$\varphi(\omega)=\varphi(0)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\omega^n\in A(|\omega|<1)$，$\varphi'(\omega)\in E_p(|\omega|<1)$，$p>1$，则有

$$\|\varphi(\omega)-\varphi(0)\|_{C(|\omega|<1)}\leqslant c\|\partial\text{Re}\varphi(\omega)\|_{L^p(0,2\pi)},$$

这里∂为$\dfrac{\partial}{\partial r}$，$\dfrac{\partial}{\partial\theta}$，$\dfrac{\partial}{\partial u}$，$\dfrac{\partial}{\partial v}$之一，$c=c(p)$ 和 $\varphi(\omega)$ 无关，$\omega=re^{i\theta}=\mu+i\nu$。□

证明. 只对∂为$\dfrac{\partial}{\partial r}$的情况证明，其余结论的证明是相似的。

选$1<p_1<\min(2,p)$，则有

$$|\varphi(\omega)-\varphi(0)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\leqslant\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(n|a_n|)^{q_1}\right\}^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\times\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{p_1}\right\}^{\frac{1}{p_1}}, \quad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1;$$

另一方面，利用Young-Hausdorff不等式有

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(n|a_n|)^{q_1}\right\}^{\frac{1}{q_1}}\leqslant\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial\text{Re}\varphi(\omega)}{\partial r}\right|^{p_1}d\theta\right\}^{\frac{1}{p_1}},$$

$$\omega=e^{i\theta}.$$

同时，对$p_1>1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{p_1}<\infty$.

引理证毕．

下面的不等式是显然的：

引理2. 设D之边界Γ为可求长 Jordan 曲 线，$f(z)\in A(D)$，$f^{(k)}(z)\in E_p(D)$，$0<p<\infty$，则 $\partial^k G(z)=\partial^k G/\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}\partial s^{k_3}\partial n^{k_4}\in L^p(\Gamma)$．$k=k_1+\cdots+k_4$，$G(z)$为$\text{Re}f(z)$或$\text{Im}f(z)$，并且

$$\|\partial^k G(z)\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant\|f^{(k)}(z)\|_{L^p(\Gamma)}$$

在Γ上函数都由边界值定义（包括$\partial^k G(z)$）．□

由$f(z)-f(z_0)=\int_{z_0}^{z}f'(z)dz$和Hölder不等式可得

引理3. 设区域D之边界Γ为Jordan可求长曲线，$f(z)\in A(D)$，$f'(z)\in E_p(D)$，$p\geqslant1$，则必有$f(z)\in c(\overline{D})$（并在Γ上绝对连续，而且当$p>1$时，在Γ上还满足$1-\frac{1}{p}$级的 Hölder–Lipschitz 条件），并且

$$\|f(z)-f(z_0)\|_{c(\overline{D})}\leqslant c\|f'(z)\|_{L^p(\Gamma)},\quad z_0\in\overline{D},$$

$c=c(\Gamma,p,z_0)$与$f(z)$无关．□

下面的结果是Михлин不等式的推广．

定理15. 若区域D之边界$\Gamma\in$ P.S.$(\alpha,\ \beta)$，$\alpha,\ \beta>0$，$f(z)\in A(D)$，$f'(z)\in E_p(D)$ $p>s/(2-s+\beta s-\beta)$，$1<s<(2-\beta)/(1-\beta)$，则有

$$\|f(z)-f(z_0)\|_{C(\overline{D})}\leqslant C\|\partial G\|_{L^p(\Gamma)},$$

这里$c=c(\Gamma,\ z_0,\ p)$和f无关，$z_0\in D$，G为$\text{Re}f$或$\text{I}_m f$，$\partial=\partial/\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}\partial n^{k_3}\partial s^{k_4}$，$k_i\geqslant0$，$1=k_1+\cdots+k_4$，$n$是指对于$\Gamma$之法线方向，$s$为对于$\Gamma$之切线方向（以后都沿用这一解释），函数在边界上都由边界值定义．□

证明. 为了叙述方便，我们只证$\partial=\frac{\partial}{\partial n}$的情况，其余的证明是相似的.

不难由$\Psi_+(z)$的特性知道$[\Psi'_+(z)]^{-1}\in L^r(\Gamma)$, $0<r<\frac{1}{1-\beta}$. 利用Hölder不等式和引理1知道

$$\begin{aligned}\sup_{z\in D}|f(z)-f(z_0)| &= \sup_{|\omega|<1}|\varphi(\omega)-\varphi(0)| \\ &\leqslant C'\left\|\frac{\partial \mathrm{Re}\varphi(e^{i\theta})}{\partial r}\right\|_{L^s(0,2\pi)} \\ &= C'\left\|\frac{\partial \mathrm{Re}f(z)}{\partial n}\left|\frac{1}{\Psi'_+(z)}\right|^{1-\frac{1}{s}}\right\|_{L^s(\Gamma)} \\ &\leqslant C\left\|\frac{\partial \mathrm{Re}f(z)}{\partial n}\right\|_{L^p(\Gamma)}, \quad f(z)=\varphi(\Psi_+(z)).\end{aligned}$$

定理证毕.

相似的还有

定理16. 1°. 设$\Gamma\in$ P.S.(α, β), $\alpha, \beta>0$, $f(z)\in A(D)$, $f'(z)\in E_q(D)$, $q>p/\eta$, $\eta=(2\alpha-\alpha\beta+2\beta-3)p+2\alpha-\alpha\beta$, $p>\frac{\alpha}{2-\alpha}$, 则若$f'(z_0)=0$, $z_0\in D$, 有

$$\|f'\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant C\|\partial G\|_{L^q(\Gamma)},$$

C和$f(z)$无关，∂G和上定理定义的相同.

2°. 设Γ之自然方程为$z=z(s)$, $\frac{d^{k-2}}{ds^{k-2}}\arg z'(s)$绝对连续, $\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\arg z'(s)\in L^\lambda(\Gamma)$, $\lambda>1$, $k\geqslant 2$. 设$f(z)\in A(D)$, $f^{(k)}(z)\in E_\lambda(D)$, $f'(z_0)=0$, …, $f^{(k)}(z_0)=0$, 必有

$$\|f^{(k)}(z)\|_{L^\sigma(\Gamma)}\leqslant C\|\partial^k G\|_{L^\lambda(\Gamma)},$$

这里C和f无关，$\sigma\leqslant\lambda$, $\partial^k=\partial^k/\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}\partial s^{k_3}\partial n^{k_4}$, $k_1+\cdots+k_4=k$, $G(z)$的意义和上定理的相同. □

证明. 我们只证法线微商的不等式，并设G为$\mathrm{Re}f$, 因为对证

法做一个不大的修改就可以证明一般情况下的结论。

记 $\varphi(\omega)=f(\varphi_+(\omega))$，把它展成幂级数来考虑，就可以看到 $\mathrm{Re}(e^{ik\theta}\varphi^{(k)}(\omega))=\partial^k\mathrm{Re}\varphi(\omega)/\partial r^k$ 对任何正整数k成立，这里$\omega=re^{i\theta}$。因而由M.Riesz不等式就有

$$\begin{aligned}&\|\varphi^{(k)}(\omega)-\varphi^{(k)}(0)\|_{L^{p_1}(0,2\pi)}\\&=\|e^{ik\theta}(\varphi^{(k)}(\omega)-\varphi^{(k)}(0))\|_{L^{p_1}(0,2\pi)}\\&\leqslant C_1\left\|\frac{\partial^k\mathrm{Re}\varphi(\omega)}{\partial r^k}\right\|_{L^{p_1}(0,2\pi)},\end{aligned}$$

对$P_1>1$成立，$C_1=C_1(P_1)$。

考虑$\Gamma\in$P.S.(α,β)时的情况。这时令$k=1$。注意到$\varphi_+'(e^{i\theta})\in L^{r_1}(0,2\pi)$，$0<r_1<\dfrac{1}{1-\alpha}$，$[\Psi_+'(z)]^{-1}\in L^{r_2}(\Gamma)$，$0<r_2<\dfrac{1}{1-\beta}$，则有

$$\begin{aligned}&\|f'(z)\|_{L^p(\Gamma)}=\left\{\int_0^{2\pi}(\varphi'(e^{i\theta})|^p|\varphi_+'(e^{i\theta})|^{(1+p)}d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi_+'(e^{i\theta})|^{(1+p)t}d\theta\right\}^{\frac{1}{pt}}\|\varphi'(e^{i\theta})\|_{L^{pt_1}(0,2\pi)}\\&\leqslant C^*\left\|\frac{\partial\mathrm{Re}\varphi(e^{i\theta})}{\partial r}\right\|_{L^{pt_1}(0,2\pi)}\\&=C^*\left\{\int_\Gamma\left|\frac{\partial\mathrm{Re}f(z)}{\partial n}\right|^{pt_1}|\Psi_+'(z)|^{1-pt_1}|dz|\right\}^{\frac{1}{pt_1}}\\&\leqslant C^*\left\{\int_\Gamma|\Psi_+'(z)|^{(1-pt_1)\eta}|dz|\right\}^{\frac{1}{pt_1\eta}}\left\|\frac{\partial\mathrm{Re}f(z)}{\partial n}\right\|_{L^{pt_1\delta}(\Gamma)}\\&=C\left\|\frac{\partial\mathrm{Re}f(z)}{\partial n}\right\|_{L^q(\Gamma)},\end{aligned}$$

在这里$(1+p)t<\dfrac{1}{1-\alpha}$，$t_1^{-1}+t^{-1}=1$，$pt_1>1$，$(pt_1-1)\eta<\dfrac{1}{1-\beta}$，$\eta^{-1}+\delta^{-1}=1$，$t$，$t_1$，$\eta$，$\delta>1$，$q=pt_1\delta$。

定理的第一部分得证。

对$k>1$，这时可设$\varphi(0)$，$\varphi'(0)$，…，$\varphi^{(k)}(0)=0$。

由条件$\frac{d^{k-2}}{ds^{k-2}}\arg z'(s)$在$\Gamma$上绝对连续，$\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\arg z'(s)\in L^{\lambda}(\Gamma)$，可得$\varphi_{+}^{(k)}(e^{i\theta})\in L^{\lambda}(0,2\pi)$，$\Psi_{+}^{(k)}(z)\in L^{\lambda}(\Gamma)$。前一结论为推广了的Seidel CMupHoB定理，后一结论用同样的方法不难证明(参看[11])。

另一方面，由于$\Gamma\in(\Lambda)$，故$|\varphi_{+}'|$，$|\Psi_{+}'|$均界于两正常数之间(实际上它们直到边界上都是连续的)。

注意到

$$f^{(k)}(z)=\varphi'(\omega)\varphi_{+}^{(k)}(\omega)+\sum_{i=1}^{k}\varphi^{(i)}(\omega)p_i(\omega),$$

这里$P_i(\omega)$是$\varphi_{+}'(\omega)$，…，$\varphi_{+}^{(k-1)}(\omega)$的某个多项式，因而它们是有界的。于是不难看到

$$\|f^{(k)}(z)\|_{L^{\lambda}(\Gamma)}\leqslant C_1\|\varphi^{(k)}(e^{i\theta})\|_{L^{\lambda}(0,2\pi)}$$

$$\leqslant C_2\left\|\frac{\partial^k\mathrm{Re}\varphi(e^{i\theta})}{\partial r^k}\right\|_{L^{\lambda}(0,2\pi)}$$

(注意引理3)。同样可以看到

$$\frac{\partial^k\mathrm{Re}\varphi(e^{i\theta})}{\partial r^k}=H_1(z)\Psi_{+}^{(k)}(z)\frac{\partial\mathrm{Re}f(z)}{\partial n}$$

$$+\sum_{i=2}^{k}H_i(z)\frac{\partial^i\mathrm{Re}f(z)}{\partial n^i},$$

这里$z\in\Gamma$，$H_1(z)$，…，$H_k(z)$均为有界函数。故由上面的不等式可得

$$\|f^{(k)}(z)\|_{L^{\lambda}(\Gamma)}\leqslant C\left\|\frac{\partial^k\mathrm{Re}f(z)}{\partial n^i}\right\|_{L^{\lambda}(\Gamma)},$$

这时不难看出定理第二部分是成立的。

注意到引理3和定理15的第二部分说明，(在一定条件下)$f^{(k)}$和$\partial^k G$在$L^{\lambda}(\Gamma)$中的范数是等价的。

由本章3.1节，3.3节之结果可得

系1. 设$\Gamma\in$ P.S.(α,β)，α，$\beta>0$，$f(z)\in A(D)$，$f'(z)\in E_p(D)$，$f'(z_0)=0$，$z_0\in D$，则$f^{(\theta_1)}(z)\in L^{\theta_1}(D)$，并且

$$\|f^{(\theta_1)}\|_{L^{\theta_1}(D)}\leqslant C\|\partial G\|_{L^p(\Gamma)},$$

这里 $0<\theta_2<\max\left(\frac{1}{2^{\theta_1}-1},\quad\frac{1-\max(1-2\alpha,\ 0)}{(2-\beta)\theta_1}\right)$，$1<s<\frac{2-\beta}{1-\beta}$，$p>s/(s\beta-s-\beta+2)$，$C$与$f$无关．□

由本章3.2节、3.3节的不等式可得

系2. 设$\Gamma\in$ P.S.$(\alpha,\ \beta)$，α，$\beta>0$，$f(z)\in A(D)$，$f'(z_0)=0$，$z_0\in D$，$f'(z)\in E_q(D)$，则

$$\|f^{(\eta+1)}\|_{L^\sigma(D)}\leqslant C\|f'\|_{L^{2p}(D)}\leqslant C^{\#}\|\partial G\|_{L^q(\Gamma)},$$

这里C，$C^{\#}$和$f(z)$无关，$0<\sigma<\max(\sigma_1,\ \sigma_2)$，$\sigma_1=p/((2^\eta-1)p+2^{\eta-1})$，$\sigma_2=(1-\max(1-2\alpha,\ 0))/((2-\beta)\times\left(\frac{1}{p}+\eta\right))$．$p$，$q$如定理15中所述，$q>p/\sigma_3$，$\sigma_3=(2-\beta)(\alpha p+\alpha-p)+p(\beta-1)$，$p>\frac{\alpha}{2-\alpha}$．□

由3.2节的不等式还可以得到

系3. 在定理15(2°)的条件下，则

$$f^{(k+\eta)}(z)\in L^{\theta_1}(D),\ 0<\theta_1<\frac{\lambda}{1+\lambda\eta},$$

$$\|f^{(k+\eta)}(z)\|_{L^{\theta_1}(D)}\leqslant C\|\partial^k G\|_{L^\lambda(\Gamma)},$$

C和f无关．□

最后应该指出的是，§3中的不等式还可结合成许多新的嵌入不等式，特别是和§2中的结果交错地组合可以得到一系列新的关于多项式的不等式．

§4. Cauchy型积分及其应用

设Γ: $z=z(s)$为一可求长 Jordan曲线，s为弧长参数，其总长

为l. 在Γ上是几乎处处有切线的. 设$\varphi(z)\in L^p(\Gamma)$，引用范数

$$\|Q\|=\{\int_\Gamma|\varphi(z(s))|^p ds\}^{1/p}<\infty,$$

若$\omega(\delta)=\omega_1(\delta,\ \varphi,\ \|\cdot\|)$，$\int_0^c\omega(t)/t\ dt<\infty$,则记 $\varphi\in\Lambda_s(p)$。应用传统奇异积分的方法和$\|\cdot\|$ 意义下积分号下的推广Minkowski不等式$\|\int\cdot ds\|\leqslant\int\|\cdot\|ds$，可证下列定理.

定理17. 若$\varphi\in\Lambda_s(p)$，$p\geqslant1$，则主值积分

$$\text{V.P.}\ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)}{t-z}dt$$

对几乎处处$z\in\Gamma$存在，因而$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)}{t-z}dt$，$z\bar{\in}\Gamma$ 之内外角极值$f^+(z)$，$f^-(z)$在Γ上几乎处处存在并且有

$$f^\pm(z)=\text{V.P.}\ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)}{t-z}dt\pm\frac{1}{2}\varphi(z),\quad z\in\Gamma.\ \Box$$

为了分析$f^\pm(z)$的性质，我们引入条件(m) :$m>0$，并且在Γ上几乎处处的s和h有

$$\left|\frac{z(s+h)-z(s)}{h}\right|\geqslant m.$$

用第六章Faber 级数转化理论中的记号，这相当于$d_\Gamma(t)/t\geqslant m$.

定理18. 若$\Gamma\in(m)$ 或$t/d_\Gamma(t)=O(1)$，$\varphi\in\Lambda_s(p)$，$p\geqslant1$，则$f^\pm\in L^p(\Gamma)$. □

定理19. 在上面定理的条件下，有

$$\omega_1(\delta,\ f^\pm,\ \|\cdot\|)=O\left\{\int_0^\delta\frac{\omega(t)}{t}dt+\delta\int_\delta^c\frac{\omega(t)}{t^2}dt+\omega(t)\right\},$$

这里$\omega(t)=\omega_1(t,\ \varphi,\ \|\cdot\|)$. □

这些定理的详细证明可参看[19]. 由这些定理可导出下列结论:

系1. 若$\Gamma\in(m)$，$\omega_1(\delta,\ \varphi,\ \|\cdot\|)=O(\delta^\alpha)$ $(0<\alpha<1)$，则$\omega_1(\delta,\ f^\pm,\ \|\cdot\|)=O(\delta^\alpha)$. 若$\omega_1(\delta,\ \varphi,\ \|\cdot\|)=O(\delta)$， 则$f^\pm\in\Lambda_s(p)$. 若$\varphi\in\Lambda_s(p)$，则

$$\int_0^c\omega_1(\delta,\ f^\pm,\ \|\cdot\|)\frac{|\lg t|}{t}dt<\infty.\ \Box$$

系2. 若$\Psi\in\Lambda_s(p)$，$p\geqslant1$，则奇异积分方程

$$\text{V.P.}\ \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt=\Psi(t_0)$$

对Γ几乎处处成立之解是

$$\varphi(t_0)=\text{V.P.}\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\Psi(t)}{t-t_0}dt$$

（指几乎处处成立）。当$\Gamma\in(m)$，$m>0$时，$\varphi\in L^p(\Gamma)$。□

系3. 若$\Gamma\in(m)$，$m>0$，$\omega(t)=\omega_1(t,\ \varphi,\ \|\cdot\|)$，$\int_0^c\omega(t)|\lg t|/t\ dt<\infty$，$p\geqslant1$，则公式

$$\text{V.P.}\int_\Gamma\frac{dt}{t-t_0}\text{V.P.}\int_\Gamma\frac{\varphi(t_1)}{t_1-t}dt_1=-\pi^2\varphi(t_0)$$

在Γ上几乎处处成立。□

把系2之结果用于单位圆有

系4. 在$[0,\ 2\pi]$上定义的函数$\Psi(\theta)\in\Lambda_\theta(p)$，$p\geqslant1$，对于方程

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\cot\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)d\theta+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)d\theta=\varphi(\theta_0)$$

具有反转公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)\cot\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right)d\theta+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta)d\theta=-\varphi(\theta_0).$$

上面二个等式均指几乎处处成立。□

对于$|z|<1$内解析函数$f\in H_1$，即$\|f(re^{i\theta})\|_{L(0,2\pi)}$对$r\in[0,1]$有界，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\text{Re}f(e^{i\theta})\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta+k$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_{|t|=1}\frac{\text{Re}f(t)}{t-z}dt+k^*,$$

k，k^*为常数。因而有

系5. 若$f(z)\in H_1$，$\text{Re}f(e^{i\theta})\in\Lambda_\theta(p)$，$p\geqslant1$，则在$|z|=1$上$f(e^{i\theta})$的$p$级积分连续模有

$$\omega_1(\delta, f, \|\cdot\|) = O\left\{\int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t}dt + \delta\int_\delta^{2\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt + \omega(t)\right\},$$

并在$|z|=1$上几乎处处存在

$$\mathrm{Im}f(e^{i\theta}) = \mathrm{V.P.}\ \frac{1}{\pi i}\int_{|t|=1}\frac{\mathrm{Re}f(t)}{t-e^{i\theta}}dt + k^*,$$

这里$\omega(t)=\omega_1(t, \mathrm{Re}f(e^{i\theta}), L^p[0, 2\pi])$. □

设实函数$g(\theta)\in L[0, 2\pi)$,

$g(\theta)\sim\sum(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)$,

而共轭级数 $\sum(a_n\sin n\theta - b_n\cos n\theta)$之Abel和构成$g(\theta)$ 之共轭函数$\bar{g}(\theta)$，它几乎处处存在于$[0, 2\pi]$上，但不一定可积．由三角级数的理论知解析函数

$$G(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta$$

的实部在$|z|=1$上几乎处处以$g(\theta)$为角极值，虚部在$|z|=1$上几乎处处以$\bar{g}(\theta)$为角极值，至多是差一个常数，因此有

系6. 若$g(\theta)\in\Lambda_\theta(p)$, $p\geqslant 1$,则$\bar{g}(\theta)\in L^p[0, 2\pi]$，并且

$$\omega_1(\delta, \bar{g}, L^p[0, 2\pi]) = O\left\{\int_0^\delta\frac{\omega(t)}{t}dt + \delta\int_\delta^{2\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt + \omega(t)\right\},$$

这里$\omega(t)=\omega_1(t, g, L^p[0, 1])$. □

这结果是 Hardy-Littlewood 定理 [6] 的推广．特别值得提起的是，由$g\in\Lambda_\theta(1)$导致$\bar{g}\in L[0, 2\pi]$，这是熟知定理（若$|f|\log^+|f|\in L$，则 $\bar{f}\in L$)的很好一点补充．

§5. 具有二例外值的角域函数

定理20. 在复平面上设在角域$A(\varphi, \rho)$: $|\arg z|<\varphi, 0<|z|<\rho$中解析的函数$f(z)\neq 1,2$, $|f(z_n)|<k, n=1,\cdots$,这里$z_n\in A(\varphi,$

ρ)并且

$$\left.\begin{array}{ll} 1^\circ & \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0, \\ 2^\circ & \lim\limits_{n\to\infty} |z_{n+1}|/|z_n| > 0, \\ 3^\circ & |\arg z_n| < \varphi - \delta \text{对某} \delta > 0 \end{array}\right\} (U)$$

则对任何给定的充分小的正数ε，ε'($\varepsilon<\varphi$，$\varepsilon'<\rho$)有

$$|f(z)| < M(k,\ \varepsilon,\ \varepsilon'),\ z \in A(\varphi-\varepsilon,\ \rho-\varepsilon'),$$

这里$M(k,\ \varepsilon,\ \varepsilon')$为依赖于$k,\varepsilon,\varepsilon'$而与$f(z)$独立的正的常数。□

证明. 考虑在$A(\varphi,\rho)$中的解析函数族$\{f_\lambda(z)\}$，$f_\lambda(z)\neq 1,2$，$|f_\lambda(z_n)|<k$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，这里参量λ形成一集合$\{\lambda\}$，而$f\in\{f_\lambda\}$。定理所要证明的是$|f_\lambda(z)|<M(k,\ \varepsilon,\ \varepsilon')$，$z\in A(\varphi-\varepsilon,\ \rho-\varepsilon')$，而$M(k,\ \varepsilon,\ \varepsilon')$与$\lambda$无关。

不失一般性，我们设

1) $r_{n+1}<r_n<\rho<1$，$|z_n|=r_n$；

2) 这里存在一常数$\eta>0$，使得$r_{n+1}/r_n>\eta$，$n=1,2,\cdots$；

3) $\varepsilon=\varepsilon'<\min(\rho r_1,\ \delta)$。

我们用$\Delta_n(\varphi,\ \rho)$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，记下列区域：

$$|\arg z|<\varphi,\ \frac{2r_n}{\rho}(r_1\rho\eta-\varepsilon)<|z|<\frac{2r_n}{\rho}(\rho-\varepsilon/2);$$

而记$\Delta_0(\varphi,\ \rho)$为区域：

$$|\arg z|<\varphi,\ r_1\rho\eta-\varepsilon<|z|<\rho-\varepsilon/2.$$

由条件2°及1)，2)，3)，我们有

$$A(\varphi,\rho-\varepsilon)\subset\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_n(\varphi,\ \rho).$$

对于函数$f_\lambda(z)$，$\lambda\in\{\lambda\}$，令

$$f_{\lambda 0}(z)=f(z),\ f_{\lambda,n}(z)=f_\lambda\left(\frac{2r_n z}{\rho}\right),\ n=1,\ \cdots,$$

这里$z\in\Delta_0(\varphi,\ \rho)$。这时$f_{\lambda,n}(z)$在$\Delta_0(\varphi,\ \rho)$中具有例外值1和2，因而形成$\Delta_0(\varphi,\ \rho)$中的正规族(见[20])。

若定理不对，则$\{f_\lambda(z)\}$在$A(\varphi-\varepsilon,\ \rho-\varepsilon)$中不一致有界。因

为若$z\in\Delta_0(\varphi-\varepsilon,\ \rho)$，则$\dfrac{2r_n}{\rho}z\in\Delta_n(\varphi-\varepsilon,\ \rho)$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，并且$A(\varphi-\varepsilon,\ \rho-\varepsilon)\subset\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Delta_n(\varphi-\varepsilon,\ \rho)$．所以$\{f_{\lambda n}(z)\}$，$\lambda\in\{\lambda\}$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，在$\Delta_0(\varphi-\varepsilon,\ \rho)$中不一致有界．故对任何正整数$l$，我们可选一点$z_l\in\Delta_0\left(\varphi-\varepsilon, \rho-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$及二数$n_l\in\{n\}$，$\lambda_l\in\{\lambda\}$，使得

$$|f_{\lambda_l n_l}(z_l)|>l.$$

所以，$\{f_{\lambda_l n_l}(z)\}$的任一子序列在$\Delta_0\left(\varphi-\dfrac{\varepsilon}{4},\ \rho\right)$中不收敛于一解析函数．而由正规族的定义，我们能选一子序列$\{f_{\lambda_i n_i}(z)\}\subset\{f_{\lambda_l n_l}(z)\}$，使得

$$\lim_{i\to\infty}f_{\lambda_i n_i}(z)=\infty$$

在$\Delta_0\left(\varphi-\dfrac{\varepsilon}{2},\ \rho-\dfrac{\varepsilon}{4}\right)$中一致成立．因而存在常数$N$，当$i>N$时，

$$\min_{z\in\Delta_{n_i}(\varphi-\varepsilon,\rho)}|f_{\lambda_i}(z)|>k.$$

这就得到

$$|f_{\lambda_i}(z_{n_i})|>k,\ i>N,\ z_{n_i}\in\Delta_{n_i}(\varphi-\varepsilon,\ p).$$

由这矛盾即得定理的证明．

系1． 设J为一Jordan弧，除经过$z=0$外，其余全在$A(\varphi,\ \rho)$域内．若$f(z)$ ($\neq1,\ 2$) 在$A(\varphi,\ \rho)$中解析，在J上有界，则在$A(\varphi-\varepsilon,\ \rho-\varepsilon')$中有界．□

Hardy-Littlewood 的一个 Lindelöf 型定理是：若 $g(z)$ 在$A(\theta^\circ,\ r^\circ)$中解析有界，$\lim g(z)=0(z\in J^\circ,\ z\to0)$，$J^\circ$为触$z=0$而其余全在$A(\theta^\circ,\ r^\circ)$内的 Jordan弧，则 $\lim g(re^{i\theta})=0(r\to0)$ 在$|\theta|<\theta^\circ-\varepsilon$中一致成立．因此有

系2． 若$f(z)$在$A(\varphi,\ \rho)$ 中解析，$f(z)\neq1,\ 2$，$\lim f(z)=0$ $(z\in J,\ z\to0)$，则$\lim f(re^{i\theta})=0(r\to0)$ 在$|\theta|<\varphi-\varepsilon$中一致成立．这里$\varepsilon>0$为任何给定的常数．□

系3．若$g(z)$在$A(\varphi, \rho)$中解析，并存在达$z=0$的二条 Jordan 弧J_1，J_2使得

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in J_1}} g(z) \neq \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in J_2}} g(z),$$

则 $g(z)$ 在 $A(\varphi, \rho)$ 可取任何有限复数为值，至多只有一个例外。□

M.Tsuji在[21]中证明了下列定理：

若$g(z)\neq 0$，在$A(\theta^\circ, r^\circ)$中有界解析，它在$A(\theta^\circ-\varepsilon, r^\circ-\varepsilon')$中的零点为$\{z(n)\}$，则必

$$\sum |z(n)|^{\frac{\pi}{\theta_1}} < \infty.$$

因此，由定理20可得

系4． 若$z_n\in A(\varphi, \rho)$满足条件(U)，并且

$$\sum |z_n|^{\frac{\pi}{\varphi}} = \infty,$$

若$f(z)$在$A(\varphi, \rho)$中解析，并且$f(z)\neq 1, 2$，$f(z_n)=0$，$n=1, 2, \cdots$，则$f(z)\equiv 0$。□

定理21． 若$z_n\in A(\varphi, \rho)$满足条件(U)，并且

$$\sum |z_n|^{\frac{\pi}{\varphi}} = \infty.$$

设$\{f_m(z)\}$是$A(\varphi, \rho)$中的解析函数族，并且

$f_m(z)\neq 1, 2$，$m=1, 2, \cdots$，

$\lim\limits_{m\to\infty} f_m(z_n)=a_n$，$|a_n|<k$，$n=1, \cdots$，则$f_m(z)$在$A(\varphi, \rho)$中广义一致收敛。□

证明． 若$f_m(z)$在$A(\varphi, \rho)$中不广义一致收敛，由于它形成一正规族，故必存在两子序列$f_{m_1}(z)$，$f_{m_2}(z)$分别在$A(\varphi, \rho)$中广义一致收敛于$g(z)$和$h(z)$，而且$g(z)-h(z)$不恒为零．因为使得$g(z^*)=C$的$z^*\in A(\varphi, \rho)$必是$\{z^*_{m_1}\}$的极限点．这里$f_{m_1}(z^*_{m_1})=C$，m_1为充分大(引自Hurwitz的一定理)，故由$f_{m_1}(z)\neq 1, 2$，$z\in A(\varphi, \rho)$，我们有$g(z)\neq 1, 2$，$z\in A(\varphi, \rho)$．类似可证$h(z)\neq 1, 2$，$z\in A(\varphi, \rho)$。但另一方面，$g(z_n)=h(z_n)=a_n$，$|g(z_n)|=|h(z_n)|=|a_n|<k$，$n=1, 2, \cdots$，由定理20，有$|g(z)|$，$|h(z)|<M(k,$

$\varepsilon, \varepsilon')$，$z\in A(\varphi-\varepsilon, \rho-\varepsilon')$。因而

$$|g(z)-h(z)|<2M(k, \varepsilon, \varepsilon'),$$
$$z\in A(\varphi-\varepsilon, \rho-\varepsilon').$$

而由$g(z_n)-h(z_n)=0$，$\{z_n\}\subset A(\varphi-\varepsilon, \rho-\varepsilon')$，$n=1, 2, \cdots$，导致$g(z)-h(z)\equiv 0$。与假矛盾，因而定理得证。

考虑在 $A(\varphi, \rho)$中定义的调合函数 $U(z)$，它不取一有限实值，例如$U(z)\neq -1$，则$e^{g(z)}$或$e^{-g(z)}$将不取无穷个值，这里$g(z)=U(z)+iV(z)$为一解析函数。由定理20可得

定理22. 若$z_n\in A(\varphi, \rho)$满足条件(U)，$U(z)$在 $A(\varphi, \rho)$中调合，$U(z)\neq -1$，则我们有

1) 若$U(z_n)<k$，$n=1, 2, \cdots$，则必有$U(z)<M_1(k,\varepsilon, \varepsilon')$，$z\in A(\varphi-\varepsilon, \rho-\varepsilon')$；

2) 若$U(z_n)>k$，$n=1, 2,\cdots$，则必有$U(z)>M_2(k,\varepsilon, \varepsilon')$，$z\in A(\varphi-\varepsilon, \rho-\varepsilon')$，这里$M_1(k, \varepsilon, \varepsilon')$，$M_2(k,\varepsilon,\varepsilon')$与$U(z)$无关。□

这个定理是M.Tsuji 一定理的推广，而且这里采用的方法不同，M.Tsuji证明当$U>0$于半平面$x>0$，于C上有界，则必在$|z|\leqslant 1$，$|\arg z|\leqslant\varphi_0<\frac{\pi}{2}$中有界。$C$为以$z=0$为端点位于 $x>0$ 的一Stolz区域的Jordan弧（见[22]）。

若$U(z)$在$A(\varphi, \rho)$中调合，$U(z)\neq -1$，并且

$$\lim_{r\to 0}U(re^{i\alpha})=\lim_{r\to 0}U(re^{i\beta})=h$$
$$\alpha<\beta, \ |\alpha|, \ |\beta|<\varphi,$$

则由定理22，$U(z)$在$A(\varphi-\varepsilon, \rho-\varepsilon')$，$(|\alpha|, |\beta|<\varphi-\varepsilon)$ 中有界，因而$\lim U(re^{i\theta})=h$对$\theta\in[\alpha, \beta]$一致成立。考虑调和函数族 $U_t(z)=U(tz)$，$(0<t\leqslant 1)$，区域为 B：$|\arg z|<\varphi-\varepsilon$，$\frac{\rho-2\varepsilon'}{2}\leqslant|z|<\rho-2\varepsilon'$。显然，$\{U_t(z)\}$ 是一正规族。因在 B^*：$\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$，$\frac{\rho-2\varepsilon'}{2}\leqslant|z|\leqslant\rho-2\varepsilon'$中有$\lim\limits_{t\to 0}U_t(z)=h$，并且 B^*

$\subset B$，因而$\lim\limits_{t\to0}U_t(z)=h$于$z\in B$一致成立，也即$\lim\limits_{r\to0}U(re^{i\theta})=h$对$|\theta|<\varphi-\varepsilon$一致成立。所以我们有

定理23. 若 $U(z)$ 在 $A(\varphi,\ \rho)$ 中调和，$U(z)\neq-1$，并且$\lim\limits_{r\to0}U(re^{i\alpha})=\lim\limits_{r\to0}U(re^{i\beta})=h(\alpha\neq\beta,\ |\alpha|,\ |\beta|<\varphi)$，则$\lim\limits_{r\to0}U(re^{i\theta})=h$对$|\theta|<\varphi-\varepsilon$一致成立。□

L.H.Loomis曾得这一结果的特例，他设$U(z)>0$，$Rez>0$（见[23]）。

§6．关于Poisson积分的边界性质

这里我们将推广Poisson积分的Fatou定理[24]。

设$f(\theta)\in L[-\pi,\ \pi]$，若对$\theta=\theta_0$

$$\lim_{\theta\to\theta_0+0}\frac{f(\theta)-f(\theta_0)}{\theta-\theta_0}=f'_+(\theta_0),$$

$$\lim_{\theta\to\theta_0-0}\frac{f(\theta)-f(\theta_0)}{\theta-\theta_0}=f'_-(\theta_0)$$

存在。令

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)P(r,\ t-\theta)dt,$$

这里 $z=re^{i\theta}$，$0\leqslant r<1$；$P(r,\ x)=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$。

定理24. 当$z\to e^{i\theta_0}(z\in L)$时，

$$\frac{\partial f(z)}{\partial\theta}\to\frac{1}{2}[f'_+(\theta_0)+f'_-(\theta_0)]+\frac{\lambda}{\pi}[f'_+(\theta_0)-f'_-(\theta_0)],$$

这里L不切于圆，$\lambda\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$是于$z=e^{i\theta_0}$处$L$与向径$[0,\ e^{i\theta_0}]$的交角。左边来的$L$，其$\lambda$为正。□

证明. 为简单计，设 $\theta_0=0$。首先对逐段线性函数来证明定理。令

$$g(\theta)=\begin{cases}f'_+(0)\theta+f(0), & 0\leqslant\theta<\pi,\\ f'_-(0)\theta+f(0), & -\pi\leqslant\theta\leqslant0,\end{cases}$$

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)P(r,\ t-\theta)dt,\ z=re^{i\theta},\quad r\in[0,\ 1).$$

则
$$\frac{\partial g(z)}{\partial\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\frac{\partial P(r,t-\theta)}{\partial\theta}dt$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\frac{\partial P(r,t-\theta)}{\partial t}dt$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}g(t)\frac{\partial P(r,t-\theta)}{\partial t}dt$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}g(t)\frac{\partial P(r,t-\theta)}{\partial t}dt$$
$$=\frac{P(r,\ \pi-\theta)}{2\pi}[g(-\pi+0)-g(\pi-0)]$$
$$+\frac{f_+'(0)}{2\pi}\int_0^{\pi}P(r,\ t-\theta)dt$$
$$+\frac{f_-'(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}P(r,\ t-\theta)dt$$
$$=A+\frac{f_+'(0)}{2\pi}\int_{-\theta}^{\pi-\theta}P(r,\ x)dx$$
$$+\frac{f_-'(0)}{2\pi}\int_{\theta}^{\pi+\theta}P(r,\ x)dx,$$

这里
$$A=\frac{P(r,\ \pi-\theta)}{2\pi}[g(-\pi+0)-g(\pi-0)].$$

因为
$$\int P(r,\ x)dx=x+2\sum_{k=1}^{\infty}r^k\frac{\sin kx}{k}=x+2\mathrm{tg}^{-1}\frac{r\sin x}{1-r\cos x},$$

所以我们有
$$\frac{\partial g(z)}{\partial\theta}=A+\frac{f_+'(0)+f_-'(0)}{2}+\frac{B}{\pi}[f_+'(0)-f_-'(0)],$$

这里
$$B=\mathrm{tg}^{-1}\frac{r\sin\theta}{1-r\cos\theta}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{r\sin\theta}{1+r\cos\theta}.$$

当$z=re^{i\theta}\to1\,(z\in L)$时，$A\to0$，$B\to\lambda$，$g_\pm'(0)=f_\pm'(0)$。故定理对

逐段线性函数成立。

在一般情况下，对$h(z)=f(z)$，$g(z)$有

$$\frac{\partial h(z)}{\partial\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)P(r,\ t-\theta)R(r,\ t-\theta)dt,$$

这里 $$R(r,\ x)=\frac{2r\sin x}{1-2r\cos x},$$

我们有 $$\frac{\partial f(z)}{\partial\theta}-\frac{\partial g(z)}{\partial\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left[\frac{f(t)-f(0)}{t}-f'_{-}(0)\right]$$
$$\times P(r,\ t-\theta)tR(r,\ t-\theta)dt$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\frac{f(t)-f(0)}{t}-f'_{+}(0)\right]P(r,\ t-\theta)t$$
$$\times R(r,\ t-\theta)dt.$$

一个简单计算可证$|tR(r,\ t-\theta)|\leqslant M$，$M$为与$r$，$t$，$\theta$ 无关的常数。因此

$$\left|\frac{\partial f(z)}{\partial\theta}-\frac{\partial g(z)}{\partial\theta}\right|\leqslant\frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left|\frac{f(t)-f(0)}{t}-f'_{-}(0)\right|$$
$$\times P(r,\ t-\theta)dt+\frac{M}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left|\frac{f(t)-f(0)}{t}-f'_{+}(0)\right|$$
$$\times P(r,\ t-\theta)dt\equiv M(K_1+K_2).$$

对于K_1，我们有

$$K_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_1(t)P(r,\ t-\theta)dt,$$

这里 $$K_1(t)=\begin{cases}0 & 0\leqslant t<\pi,\\ \left|\dfrac{f(t)-f(0)}{t}-f'_{-}(0)\right|, & -\pi\leqslant t<0,\end{cases}$$

它在$t=0$处连续，$K_1(0)=0$，因而由一已知定理，当$z\to1(z\in L)$时，$K_1\to0$。类似的有$K_2\to0$，即

$$\lim_{\substack{z\to1\\ z\in L}}\frac{\partial f(z)}{\partial\theta}=\lim_{\substack{z\to1\\ z\in L}}\frac{\partial g(z)}{\partial\theta}=\frac{1}{2}[f'_{+}(0)+f'_{-}(0)]$$
$$+\frac{\lambda}{\pi}[f'_{+}(0)+f'_{-}(0)].$$

定理证毕

采用记号

$$F(\theta)=\int_0^{\theta} f(t)dt,$$

若对$\theta=\theta_0$，$F'_{\pm}(\theta_0)$存在，记$f_{\pm}(\theta_0)$。因为

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)P(r,\ t-\theta)dt=\frac{P(r,\ \pi)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)P(r,\ t-\theta)dt,$$

由定理24我们有

系。对$f(\theta)\in L[-\pi,\ \pi]$，若$f_{\pm}(\theta_0)$存在，则

$$\lim_{z\to e^{i\theta_0}} f(z)=\frac{1}{2}[f_+(\theta_0)+f_-(\theta_0)]$$

$$+\frac{\lambda}{\pi}[f_+(\theta_0)-f_-(\theta_0)],\quad z\in L,$$

这里λ，L的意义与定理24的相同。□

对一般Cauchy型积分，有许多类似定理[25]。

参 考 文 献

[1] W. E. Sewell, Degree of Approximation by Polynomials in the Complex Domain,1942.

[2] 小松勇作，等角写像论（日文版）。

[3] Г. М. Голузин，复变函数的几何理论，陈建功译，1956.

[4] С.Н.Мергелян, Некоторые Волросы Конструктивной Теории Функчий, Труды Матем Ин-Та, имени В. А. Стеклова, 42(1951).

[5] Я.Л.Геронимус,О Некоторых Свойствах Функчий Нелрерывных В Замкнутом Круге, ДАН. XCVII, №.6 (1954),889—891.

[6] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, A Convergence Criterion for Fourier Series, Math. Zeit,28(1928), 612—634.

[7] O. J. Farrell, On Approximation to an Analytic Function

by Polynomials, Bull of the Amer. Math. Soc. **40** (1934), 908—914.

[8] 辻正次,复素变数函数论(日文版).

[9] Ivo Babuška, об одном свойстве Гармонических функчий, Czechoslouak Math.Jour.T.**5**(80), №**2**(1955), 220—233.

[10] С. Г. Михлчн, Лрямые Методы В Математической фиzике, 1950.

[11] 吴学谋，关于等角写像的边界性质，数学学报，**7:2** (1957)，271—276.

[12] 吴学谋，Note on Some Function-Theoretic Inequalities, Bull. de lacademie Polonaise de sciences,Vol. Vl №**3** (1958), 141—143.

[13] 吴学谋，关于解析函数的一些不等式,函数论研究报告,**1** (1957), 57—65.

[14] 吴学谋，关于 Bieberbach 多项式，数学学报，**13** (1963)，145—151.

[15] 吴学谋,Some Properties of Analytic Function Omitting Two Values, Revue de Math. Pure et Appl. **II** (1957), 145—150.

[16] 吴学谋,A Theorem on the Poission Integral, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phyc de la R. P. R. **3**(51) n°3 (1959), 313—316.

[17] 吴学谋，解析函数的一些边界性质与嵌入不等式 (I) (II)，华中工学院学报，**3**，4 (1979).

[18] 吴学谋，Faber级数的误差转化分析，科学通报，**9**(1981).

[19] 吴学谋，Cauchy 型积分及其应用，函数论研究报告，**1** (1957)，67—72.

[20] P. Montel, Lecons sur les Familles Normales de Fonctions Analytiques, Paris, 1927.

[21] M. Tsuji, On Blaschke´ Theorem, Japanese Journal of Mathematics,3 (1926—27), 65—68.

[22] M. Tsuji, On a Positive Harmonic Function in a Half-Plane, Journal of the Mathematical Society of Japan. **7:1** (1955), 76—78.

[23] L. H. Loomis, The Gonverse of the Fatou Theorem, Trans. Amer. Math. Soc.,53 (1943), 239—250.

[24] P. Fatou, Séries Trigonométrigues et Séries de Taylor, Acta Mathematica, 30 (1906), 335—400.

[25] 吴学谋，复函数逼近的一些研究(I)(II)，武汉建材学院学报,3，4 (1980).

[26] 吴学谋，光滑区域中解析函数用多项式来逼近的线性中值 误差，函数论研究报告，1(1957)。

第五章

复变函数构造论中的一些定理

§1. Fekete 多项式和 Мергелян 结果的推广

1.1. 设D为有界的连续统，Γ为其边界，D_∞^*为其补集中含无穷远点的区域，Γ_R为D之外平准曲线，D_R^+为Γ_R之内域，D_R^-为Γ_R之外域。

设$\{\sigma_k^{(n)}\}$，$n=0,1,2,\cdots$；$k=1,2,\cdots,n+1$，为D上的 Fekete 点叙列，即$z_k^{(n)}$在D上变动，当$z_k^{(n)}=\sigma_k^{(n)}$时，

$$V_n(z_1^{(n)},\cdots,z_{n+1}^{(n)})=\prod_{i<j=1}^{j=n+1}(z_i^{(n)}-z_j^{(n)})$$

的模达到最大值(参看[1]第七章，及[2])，记$V_n=V_n(\sigma_1^{(n)},\cdots,\sigma_{n+1}^{(n)})$，$G_n(z)=(z-\sigma_1^{(n)})(z-\sigma_2^{(n)})\cdots(z-\sigma_{n+1}^{(n)})$。则不难看到，当$z\in D$，$\xi\in\Gamma_\rho$时$\frac{1}{\xi-z}\frac{G_n(z)}{G_n(\xi)}=\frac{1}{\xi-z}-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{(\xi-\sigma_i^{(n)})V_n}$
$V_n(\sigma_1^{(n)},\cdots,\sigma_{i-1}^{(n)},z,\sigma_{i+1}^{(n)},\cdots,\sigma_{n+1}^{(n)})$，
因而有

$$\left|\frac{1}{\xi-z}\frac{G_n(z)}{G_n(\xi)}\right|\leqslant\frac{n+2}{U_D(\rho-1)},\quad z\in D,\ \xi\in\Gamma_\rho.$$

当$z\in D$确定时，不难看出

$$\frac{[\psi_-(\xi)]^{n+2}}{\xi - z}\frac{G_n(z)}{G_n(\xi)}$$

对于ξ，是属于$A(D^*_\infty)$的，并在Γ_ρ上显然有

$$\left|\frac{[\psi_-(\xi)]^{n+2}}{\xi - z}\frac{G_n(z)}{G_n(\xi)}\right| \leqslant \frac{(n+2)\rho^{n+2}}{U_D(\rho-1)}, \xi \in \Gamma_\rho, z \in D$$

（参看第四章§1的定义）。根据极大模原则，这不等式在D_ρ^-中一致成立，因而当$\xi \in \Gamma_R$，R>ρ时，由这不等式可以得到

$$\left|\frac{1}{\xi - z}\frac{G_n(z)}{G_n(\xi)}\right| \mathrm{R}^{n+2} \leqslant \frac{(n+2)\rho^{n+2}}{U_D(\rho-1)}.$$

即是说

$$\left|\frac{1}{\xi - z}\frac{G_n(z)}{G_n(\xi)}\right| \leqslant \frac{(n+2)}{U_D(\rho-1)}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}, z \in D, \xi \in \Gamma_R.$$

定义。设$f(z)$在D上有定义，对于确定的n，在Fekete点列$\sigma_k^{(n)}$，$k=1,\cdots,n+1$，上和$f(z)$相等的$J_n(z)=J_n(z,f,D)\in(P_n)^A$，称为$D$上$f(z)$的($n$次) Fekete(插补) 多项式。□

由插补的理论，我们知道，对$f(z)\in E_1(D_R^+)$，

$$f(z) - J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{G_n(z)}{G_n(\xi)}\frac{f(\xi)-p_n(\xi)}{\xi - z}d\xi, z \in D_R^+,$$

这里$f(\xi)$是$f(z)$在Γ_R上的角极值，$p_n\in(P_n)^A$是任给定的。

我们不难看到

$$|f(z) - J_n(z)| \leqslant \frac{(n+2)}{2\pi U_D(\rho-1)}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}\int_{\Gamma_R}|f(\xi)$$

$$-p_n(\xi)||d\xi|, \quad z \in D,$$

或者当$f(z)\in E_p(D_R^+)$，$p>1$，时，由Hölder不等式有

$$|f(z) - J_n(z)| \leqslant \frac{(n+2)[l(\Gamma_R)]^{1-\frac{1}{p}}}{2\pi U_D(\rho-1)}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}$$

$$\|f(\xi)-p_n(\xi)\|_{L^p(\Gamma_R)}, \quad z \in D,$$

这里$l(\Gamma_R)$为Γ_R之长度；

$$\int_{|W|=R} |\varphi'_-(w)|\ |dw| \leqslant \frac{2\pi d\mathrm{R}^2}{R-1},\quad d=\lim_{w\to\infty}\left|\frac{\varphi_-(w)}{w}\right|.$$

总之，我们得到

定理1. 设 D 为任意给定的有界连续统，Γ_R 为其外平准线，D_R^+为Γ_R之内域，$d=\lim\limits_{w\to\infty}\left|\dfrac{\varphi_-(w)}{w}\right|$，则对任何$f(z)\in E_p(D_R^+)$，$p\geqslant 1$，有

$$\|f(z)-J_n(z,\ f,\ D)\|_{C(D)}$$

$$\leqslant \frac{(n+2)}{2\pi U_D(\rho-1)}\left[\frac{2\pi d\mathrm{R}^2}{\mathrm{R}-1}\right]^{1-\frac{1}{p}}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}\|f(z)$$

$$-p_n(z)\|_{L^p(\Gamma_R)},\tag{1}$$

这里ρ，$1<\rho\leqslant \mathrm{R}$，$p_n\in(P_n)^A$是任给的。□

读者不难由第一转化引理和第四章中的不等式给出$\|f^{(h)}(z)-J_n^{(h)}(z,\ f,\ D)\|_{C(D)}$，$\|f^{(h)}(z)-J_n^{(h)}(z,f,\ D)\|_{C(D_r^+)}$，$1\leqslant r\leqslant \mathrm{R}$，以及一般的$\|f^{(h)}(z)-J_n^{(h)}(z,\ f,\ D)\|_{L^{\theta_1}(D_r^+)}$，$\|f^{(h)}(z)-J_n^{(h)}(z,\ f,\ D)\|_{L^{\theta_2}(\Gamma_r)}$的估计的形式。

在定理1中，若$\sup\limits_{z\in D_R^+}|f(z)|\leqslant M$，我们就有

$$\sup_{z\in D}|f(z)-J_n(z)|\leqslant \frac{(n+2)Md\mathrm{R}^2}{U_D(\rho-1)(\mathrm{R}-1)}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2},\tag{2}$$

把定理1用到D_r^+上，$1<r<\rho<\mathrm{R}$，则有

$$\|f(z)-J_n(z,\ f,\ D_r^+)\|_{C(\bar{D}_r^+)}$$

$$\leqslant \frac{(n+2)}{2\pi U_{D_r}(\rho-1)}\left[\frac{2\pi d\mathrm{R}^2}{R-1}\right]^{1-\frac{1}{p}}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}\|f(z)-p_n(z)\|_{L^p(\Gamma_R)}$$

$$\leqslant \frac{(n+2)\mathrm{R}^2}{2\pi a(\rho-r)^2}\left[\frac{2\pi d\mathrm{R}^2}{R-1}\right]^{1-\frac{1}{p}}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}\|f(z)-p_n(z)\|_{L^p(\Gamma_R)},\tag{3}$$

$$a=\lim_{z\to\infty}\left|\frac{\psi_-(z)}{z}\right|=\frac{1}{d}.$$

特别当 $\sup\limits_{z\in D_R^+}|f(z)|\leqslant M$ 时有

$$\|f(z)-J_n(z,\ f,\ D_r^+)\|_{C(\bar{D}_r^+)}$$

$$\leqslant\frac{(n+2)\rho^2d^2MR^2}{(\rho-r)^2(R-1)}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n. \tag{4}$$

由(2) 式不难看到

$$\|f^{(k)}(z)-J_n^{(k)}(z,f,\ D)\|_{C(\bar{D}_r^-)}\leqslant c\left(\frac{r}{R}\right)^n n^{4+k}M, \tag{5}$$

这里$1<r\leqslant R$, $k\geqslant 0$或者$r=1$, $k=0$(对$k>0$也相应成立，只不过形式更复杂，读者可自己由转化原则导出它的估计式)，c可取得与n, R, $f(z)$无关。例如对$r=1$（这时我们认定$\overline{D}_r^+$为D本身),$k=0$之情况，知道当$R<1+\dfrac{2}{n}$时，由(2) 这不等式显然成立；而当$R\geqslant 1+\dfrac{2}{n}$时，令$\rho=1+\dfrac{2}{n}$即可导出(5). 其余的情况下的不等式可由转化原则导出。在$r=1$, $k=0$时的不等式(5)比 Мергелян用另外方法导的要好些（参看[4]).

利用第四章§1中的估计式知道，若D之内域为凸区域的“反像”,则(5) 中之因子n^{4+k}可改为n^{3+k}. 若$D\in$ **P.S.**$(\alpha,\ \beta)$, $\alpha,\beta>0$, 则可改为$n^{4-\alpha+\varepsilon+k}$, $\varepsilon>0$（对$D\in$ **P.L.**$(\alpha,\ \beta)$, $\varepsilon=0$).

同样的思想，由(1) 式，若(2)式中之M改为 $\|f-p_n\|_{L^p(\Gamma_R)}$,则相应的因子$n$上之指标就可多加一个$\left(-\dfrac{1}{p}\right)$.

1.2. 设D为一有界的、不分割平面的连续统，D^0为D之内域（内点组成之集合). 设$f(z)\in C(D)\cap A(D^0)$,则 Мергелян在[5]和[6]中指出有$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{C(D)}\leqslant c\min_{h>0}[\omega(d_D(h)+\eta(n,\ h,\ D)],$$

这里c和n, h无关, $\omega(\delta)=\omega(\delta,\ f,\ C(D))$是$f(z)$ 在D上的连续模, $\eta(n,\ h,\ D)$是$(P_n)^A$对在D之外平准区域 D_{1+h}^{+}中所有模不大于1的解析函数在D上之逼近的上确界, $d_D(h)=\max\limits_{p\in\Gamma}d(p,\ \Gamma_{1+h})$.

根据上节之结果, 我们知道

$$\eta(n,\ h,\ D)\leqslant c\frac{n^4}{(1+k)^n}.$$

因而取$h=\dfrac{5\lg n}{n}$则得 Мергелян 定理的转化形式:

对于有界的、不分割平面的连续统D, 设$f(z)\in C(D)\cap A(D^0)$, 则存在$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{C(D)}\leqslant c\omega\left(d_D\left(\frac{5\lg n}{n}\right),\ f,\ C(D)\right), \tag{6}$$

c和n无关.

1.3. 设$\varphi_-(w)$ 等角映射$|w|>1$为D_∞^*, 而当D之边界Γ为Jordan 曲线时, $\varphi_-(w)$ 在$|w|\geqslant1$上连续, 其连续模为 $J_D(\delta)=\omega(\delta,\ \varphi_-,\ c(|w|\geqslant1))$. 我们不难看到这时有$d_D(h)\leqslant J_D(h)$, 因而由上节定理可推得

定理2. 设D为一Jordan区域, $f(z)\in A(D)\cap C(\overline{D})$, $f^{(k)}(z)\in C(\overline{D})$, 则存在$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{C(\overline{D})}=0\left\{\left[J_D\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right]^k\omega_{(k)}\left(J_D\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right)\right\}, \tag{7}$$

$\omega_{(k)}(\delta)=\omega(\delta,\ f^{(k)},\ C(\overline{D}))$为$f^{(k)}(z)$在$\overline{D}$上的连续模. □

实际上, 对$k=0$, 定理直接由上节结论导出, 对$k>0$, 结论可由$k=0$时之结论用周知的方法导出(参看[5]或[1]定理2.1之证明).

特别当$D\in$**P.S.**$(\alpha,\ \beta)$, $\beta>0$, 时, 则在上定理条件下有

$$\|f-p_n\|_{C(\overline{D})}=0\left\{\frac{1}{n^{k\beta-\varepsilon}}\omega\left(\frac{1}{n^{\beta-\varepsilon}},f^{(k)},C(\overline{D})\right)\right\}, \tag{8}$$

$\varepsilon>0$. 这结果是 Мергелян得出来的（参看[5]）.

而由于P.L.(α, β)类曲线的性质，(8)式将变得稍好一些：

系. 设$D\in$P.L.(α, β), $\beta>0$, $f\in A(D)$, $f^{(k)}\in C(\overline{D})$, 则有$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{C(\overline{D})}=0\left\{\left(\frac{\lg n}{n}\right)^{k\beta}\omega\left(\left(\frac{\lg^n}{n}\right)^{\beta}, f^{(k)}C(\overline{D})\right)\right\}.\square$$

当L为一光滑的不封闭的Jordan弧时，Мергелян 曾指出(参看[5]，[6])，若L上定义的函数$f(z)$的k次（线性）导数$f^{(k)}(z)$在L上连续，其连续模为$\omega_{(k)}(\delta)=\omega(\delta, f^{(k)}, C(L))$，则存在$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{C(L)}=0\{n^{-k+\varepsilon}\omega_{(k)}(n^{-1+\varepsilon})\},\ \varepsilon>0.$$

但是，根据对逐段光滑曲线性质的讨论，我们知道：当L为一逐段光滑不封闭的 Jordan 弧线时，由$\varphi_-(w)$ 在$|w|=1$上连续性的特点可得，$d_D(h)=d_L(h)=0(h^{\beta-\varepsilon})$，这里$\beta\pi$是$L$的折角中最小的角度（当$L$为光滑时就令$\beta=1$），$\varepsilon>0$;而当$L$为逐段属于$(\Lambda)$类时，可令$\varepsilon=0$(参看第四章有关定理的论述)。因此由1.2节之结果可得到：

若不封闭的逐段光滑弧线L的折角的最小角值为$\beta\pi>0$（在完全光滑时$\beta=1$，一般$\beta<1$），$f(z)\in C(L)$，其k次（线性）导数$f^{(k)}(z)\in C(L)$，$\omega_k(\delta)=\omega(\delta, f^{(k)}, C(L))$，则存在$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{C(L)}=0\{n^{-\beta k+\varepsilon}\omega_{(k)}(n^{-\beta+\varepsilon})\},\ \varepsilon>0.$$

而当L逐段属于(Λ)时有

$$\|f-p_n\|_{C(L)}=0\left\{\left(\frac{\lg^n}{n}\right)^{k\beta}\omega_{(k)}\left(\left(\frac{\lg^n}{n}\right)^{\beta}\right)\right\}.$$

1.4. 我们现在来研究解析曲线的情况.

设Γ为一解析的 Jordan 闭曲线，D为其内域. 设 $f(z)\in A(D)\cap C(\overline{D})$，并存在$w$的$n$次多项式$Q_n(w)$及非升的$\varepsilon(n)$，使得

$$\|f(\varphi_+(w)-Q_n(w)\|_{C(|w|<1)}=0\{\varepsilon(n)\}. \qquad (\bullet)$$

由于Γ的解析性，$\varphi_+(w)$ 就可适当地开拓到单位圆外．也即是说，能找到ρ，$R>1$，$\varphi_+(w)$ 映$|w|<\rho$为z平面的某一个区域$\dot{D}_\rho$，$\Gamma_R\subset\dot{D}_\rho$，$D_R^+\subset\dot{D}_\rho$。由于$Q_n(w)$在$|w|=1$上对$n$和$w$来说都是有界的，因此

$$\|Q_n(w)\|_{C(|w|<\rho)}=0(\rho^n),$$

也即是说

$$\|Q_n(\psi_+(z))\|_{C(\overline{D}_R^+)}=0(\rho^n). \qquad (**)$$

利用 Fekete 插补的理论知道，存在$R_m(z)\in(P_m)^A$，使得

$$\|Q_n(\psi_+(z))-R_m(z)\|_{C(\overline{D})}=0\left\{\frac{m^4\rho^n}{R^m}\right\}.$$

令$m=\sigma n$，选σ为充分大的整数，使得$\rho<R^\sigma$，因而存在数r_1，$0<r_1<1$，使得

$$\|Q_n(\psi_+(z))-R_{\sigma n}(z)\|_{C(\overline{D})}=O\{n^4r_1^n\},$$

因而又存在数r_2，$0<r_1<r_2<1$，使得

$$\|Q_n(\psi_+(z))-R_{\sigma n}(z)\|_{C(\overline{D})}=O\{r_2^n\}.$$

现在作$P_n(z)\in(P_n)^A$。当$n=\sigma k+l$，$l=0,1,\cdots,\sigma-1$时，令$p_n(z)=R_{\sigma k}(z)$。这时由

$$\|f(z)-Q_n(\psi_+(z))\|_{C(\overline{D})}=O\{\varepsilon(n)\},$$

有

$$\|f(z)-R_{\sigma n}(z)\|_{C(\overline{D})}=O\{\varepsilon(n)+r_2^n\}.$$

因而有

$$\|f(z)-p_n(z)\|_{C(\overline{D})}=O\{\varepsilon(\sigma k)+r_2^{\sigma k}\},$$

$$n=\sigma k+l,\ l=0,1,\cdots,\sigma-1.$$

所以就存在两个常数λ和r，$0<\lambda<1$，$r_2<r<1$，使得

$$\|f(z)-p_n(z)\|_{C(\overline{D})}=O\{\varepsilon(\lambda n)+r^n\}. \qquad (\because)$$

用同样的方式我们可以讨论在$L^p(\Gamma)$，$L^p(D)$中的逼近问题，只要注意$|\varphi_+'|$，$|\psi_+'|$界于两正的常数之间即可，而这时估计式(* *)相应地变成

$$\|Q_n(\psi_+(z))\|_{C(\overline{D}_R^+)}=O\{n^{\frac{1}{p}}\rho^n\},\ O\{n^{\frac{2}{p}}\rho^n\},$$

而条件(*)相应地改为

$$\left.\begin{array}{l}\|f(\varphi_+(w))-Q_n(w)\|_{L^p(|w|=1)}\\ \|f(\varphi_+(w))-Q_n(w)\|_{L^p(|w|<1)}\end{array}\right\}=O\{\varepsilon(n)\}.$$

这时的结论(∗)就相应地改为

$$\|f(z)-p_n(z)\|_{L^p(\Gamma)},\ \|f(z)-p_n(z)\|_{L^p(D)}$$
$$=O\{\varepsilon(\lambda n)+r^n\}.$$

总结上面的讨论，我们得到

定理3. 设Γ为解析的Jordan闭曲线，D为其内域，$f(z)\in E_p(D)$，$(f(z)\in A(D)\cap L^p(D))$，$0<p\leqslant\infty$，并且有$w$的$n$次多项式$Q_n(w)$使得

$$\|f(\varphi_+(w))-Q_n(w)\|_{L^p(|w|=1)}=O\{\varepsilon(n)\}$$
$$(\|f(\varphi_+(w))-Q_n(w)\|_{L^p(|w|<1)}=O\{\varepsilon(n)\}),$$

$\varepsilon(t)$对$t\in(0,\infty)$非升，则有$p_n(z)\in(P_n)^A$，及$0<\lambda$，$r<1$，使得

$$\|f(z)-p_n(z)\|_{L^p(\Gamma)}=O\{\varepsilon(\lambda n)+r^n\}$$
$$(\|f(z)-p_n(z)\|_{L^p(D)}=O\{\varepsilon(\lambda n)+r^n\})。\square$$

自然，定理3对一般的соъолев空间$W_p^{(1)}(\Gamma)$，$W_p^{(1)}(D)$也有相应的结果，论证的方法相同、定理的形式读者可自行列出来。

由定理3我们立刻可以得到

系1. 设Γ，D如定理3所述，$f^{(k)}\in E_p(D)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则有$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{n^{-k}\omega_{(k)}\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$
$$\omega_{(k)}(\delta)=\omega(\delta,f^{(k)},L^p(\Gamma)).\ \square$$

当L为一解析不闭的Jordan弧线时，利用上面的证法同样可证明相应的结果。

定理3*. 设L为一解析非闭的Jordan弧线，$f(z)$在L上有定义，k次线性导数$f^{(k)}(z)\in L^p(L)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则存在$p_n\in(P_n)^A$，使得

$$\|f-p_n\|_{L^p(L)}=O\{n^{-k}\omega_{(k)}(n-1)\}.$$

这里 $$\omega_{(k)}(\delta)=\omega(\delta,f^{(k)},L^p(L))$$
$$=\sup_{\substack{|h|<\delta\\ s>0}}\|f^{(k)}(z(s+h))-f^{(k)}(z(s))\|_{L^p(L_\eta)},$$

这里L_η为L之子弧，它的端点和L的端点之距离不小于$\eta>0$。□

由于证法没有什么新的困难，这里我们就不再引录了。但当L为逐段解析的非闭的Jordan弧线时，若$\beta\pi$为其外角（即折角）的最小值，在上面的条件下是否会有

$$\|f-p_n\|_{L^p(L)}=O\{n^{-k\beta}\omega_{(k)}(n^{-\beta})\},$$

以及1.3节最后的结论是否对中值的情况也成立，这都是还没有解答的。自然，若要求的结论形式不要这么好，则类似的结果是可由Faber级数的理论推导出来的（参看第六章）。

我们再引入定理 3 的一个推论。

定义. 记$D(\delta)$是D中Γ的δ邻域，对$f(z)\in L^p(D)$，定义

$$C_p(\delta,f,D)=C_p(\delta,f)=C(\delta)=\|f(z)\|_{L^p(D(\delta))}. \quad □$$

系2. 设Γ和D如定理3中所述，$f(z)\in A(D)\cap L^2(D)$，则有$p_n(z)\in(P_n)^A$，使得

$$\|f-p_n\|_{L^2(D)}=O\left\{C_2\left(\frac{1}{n},f\right)\right\}. \quad □$$

证明. 在$w=0$把$f(\varphi_+(w))$展成幂级数

$$f(\varphi_+(w))=\sum_{n=0}^{\infty}a_nw^n,$$

则有

$$\iint_{|w|<1}|f(\varphi_+(w))-\sum_{k=0}^{n}a_nw^n|^2dudv$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|a_k|^2}{2k+1}\leqslant(1-r^{2n+3})^{-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|^2\frac{(1-r^{2k+1})}{2k+1}$$

$$\leqslant(1-r^{2n+3})^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\frac{(1-r^{2k+1})}{2k+1}$$

$$=(1-r^{2k+3})^{-1}\iint_{r<|w|<1}|f(\varphi_+(w))|^2dudv.$$

取$r=1-\frac{\lambda}{n}$，λ为任何给定的正数，则得到w的n次多项式$Q_n(w)$，

使得

$$\|f(\varphi_+(w))-Q_n(w)\|_{L^2(|w|<1)}=O\{\varepsilon(n)\},$$

$$\varepsilon(n)=O\left\{\left(\iint\limits_{1-\frac{\lambda}{n}<|w|<1}|f(\varphi_+(w))|^2dudv\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

利用Γ的解析性，不难证明，对 $0<\sigma<\infty$，$0<\rho<1$，$f(z)\neq 0$，有

$$\varepsilon(\sigma n)+\rho^n=O\left\{C_2\left(\frac{1}{n},f\right)\right\},$$

再利用定理3就证明了系2。

我们一直猜测，对任何的 Carathéodory 区域 D，设 $f(z)\in A(D)\cap L^p(D)$，$p>0$，则有$p_n\in(P_n)^A$，使得

$$\|f-p_n\|_{L^p(D)}=O\left\{C_p\left(\frac{1}{n},f,D\right)\right\}.$$

但是直到现在我们还无法验证这一般的结论是否正确。

1.5. 对于定理3的系2，推广到用高级导数的特性来描述时我们有

定理4. 设 Γ，D 如定理 3 中所述，$f(z)\in A(D)$，$f^{(h)}(z)\in L^2(D)$，则存在$p_n\in(P_n)^A$，使得

$$\|f-p_n\|_{L^2(D)}=O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{h}{2}}C_2\left(\frac{1}{n},f^{(h)},D\right)\right\}.\ \square$$

为了证明这定理，我们需要几个引理。

引理1. 对于$\varphi(w)\in A(|w|<1)$有

$$\left\{\int_0^{2\pi}\int_0^1|\varphi(re^{i\theta})|^p drd\theta\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\sigma^{\frac{1}{p}}\|\varphi(w)\|_{L^p(|w|<1)},$$

$p>0$。$\square$

实际上，由于$\max\limits_{|w|=\frac{1}{2}}|\varphi(w)|\leqslant\left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\|\varphi\|_{L^p(|w|<1)}$利用极大

模原则有

$$\int_0^1|\varphi(re^{i\theta})|^p dr=\int_0^{\frac{1}{2}}|\varphi(re^{i\theta})|^p dr+\int_{\frac{1}{2}}^1|\varphi(re^{i\theta})|^p dr$$

$$\leqslant\frac{2}{\pi}(\|\varphi\|_{L^p(|w|<1)})^p+2\int_{\frac{1}{2}}^1|\varphi(re^{i\theta})|^p rdr.$$

由此可得到引理的证明。

引理2. 设$\varphi(w)\in A(|w|<1)$，则下面不等式成立，

$$\left\{\iint_{\sigma<|w|<1}|\varphi_{(1)}(w)|^p dudv\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\sigma^{\frac{1}{p}}(1-\sigma)^{\frac{1}{p}}\|\varphi\|_{L^p(|w|<1)},\quad p\geqslant 1,$$

这里$w=u+iv$，$\varphi_{(1)}(w)$为$\varphi(w)$之原函数，$\varphi_{(1)}(0)=0$。□

证明. 实际上

$$\iint_{\sigma<|w|<1}|\varphi_{(1)}|^p dudv\leqslant\int_\sigma^1\left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^r|\varphi(te^{i\theta})|dt\right)^p d\theta\right]rdr$$

$$\leqslant\int_\sigma^1\left(\int_0^{2\pi}\int_0^1|\varphi(te^{i\theta})|^p dtd\theta\right)rdr$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(1-\sigma^2)\int_0^{2\pi}\int_0^1|\varphi(te^{i\theta})|^p dtd\theta.$$

利用引理1,知

$$\|\varphi_{(1)}(w)\|_{L^p(\sigma<|w|<1)}\leqslant[\sigma(1-\sigma)]^{\frac{1}{p}}\|\varphi\|_{L^p(|w|<1)}.$$

推广到较一般的区域有

引理3. 设$\Gamma\in(\Lambda)$，D为其内域，$f(z)\in A(D)\cap L^p(D),p\geqslant 1$,则

$$C_p(\delta,F,D)\leqslant C\delta^{\frac{1}{p}}\|f(z)\|_{L^p(D)},$$

这里$F(z)$为$f(z)$之原函数,$F(z_0)=0,z_0\in D$,而$C=C(p,\Gamma,z_0)$和f，δ无关。□

证明. 设$\varphi(w)=f(\varphi_+(w))\varphi_+'(w),z_0=\varphi_+(0),\varphi_{(1)}(w)=\int_0^w\varphi(t)dt$,则由引理2，显然有

$$C_p(\delta,F,D)=C_1\|\varphi_{(1)}(W)\|_{L^p(1-\delta<|w|<1)}$$
$$\leqslant C_2\delta^{\frac{1}{p}}\|\varphi\|_{L^p(|w|<1)}$$
$$\leqslant C\delta^{\frac{1}{p}}\|f(z)\|_{L^p(D)}.$$
在证明中我们用到了$|\varphi'_+(w)|$界于两个正的常数之间的性质。

定理4的证明. 我们只对$k=1$时的结论证明.对$k>1$的证明是相似的.

设Γ为解析Jordan曲线，$f'(z)\in L^2(D)\cap A(D)$，则由定理3之系2得知存在$Q_n(z)\in(P_n)^A$，使得
$$\|f'-Q_n\|_{L^2(D)}\leqslant C'\left[C_2\left(\frac{1}{n},f',D\right)\right],$$
C' 为常数。因此由引理3有
$$C_2\left(\delta,\ f-\int_{z_0}^{z}Q_n dz\right)\leqslant C''\delta^{\frac{1}{2}}C_2\left(\frac{1}{n},f'\right),$$
C''为常数。所以再应用定理3的系2，知存在$R_n(z)\in(P_n)^A$，使得
$$\|f(z)-\int_{z_0}^{z}Q_n(t)dt-R_n(z)\|_{L^2(D)}$$
$$\leqslant C'''\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}C_2\left(\frac{1}{n},f'\right)$$
$$=O\left\{\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}C_2\left(\frac{1}{n+1},f'\right)\right\}.$$
令
$$p_{n+1}(z)=\int_{z_0}^{z}Q_n(t)dt+R_n(z)$$
即得定理的证明。证明中我们假定了$f(z_0)=0$，但这是不失一般性的。

§2. 统一逼近多项式

2.1. 设$D=\sum_{i=1}^{g}{}^{(i)}D$，${}^{(i)}D$之间的相互距离为正，${}^{(i)}D$,

$i=1,2,\cdots,g$，是具有连通数m_i的连续统，即它具有补区域${}^{(i)}k^{(1)}$ $\cdots$，${}^{(i)}k^{(m_i)}$。

选定点列${}^{(i)}z^{(j)}\in{}^{(i)}K^{(j)}$，${}^{(i)}z^{(j)}\overline{\in}D$，并规定${}^{(i)}K^{(1)}$包含无穷远点和${}^{(i)}z^{(1)}=\infty$。

记${}^{(i)}K^{(j)}$的边界为${}^{(i)}\Gamma^{(j)}$，则D的边界为$\Gamma=\sum\limits_{i,j}{}^{(i)}\Gamma^{(j)}$。

让${}^{(i)}\varphi_-^{(j)}(w)$等角映射$|w|>1$入${}^{(i)}K^{(j)}$，${}^{(i)}\psi_-^{(j)}(z)$是它的反函数，并规定

$$
{}^{(i)}\varphi_-^{(j)}(\infty)={}^{(i)}z^{(j)},\quad {}^{(i)}\varphi_-^{(j)\prime}(\infty)={}^{(i)}a^{(j)}>0。
$$

记${}^{(i)}\Gamma_k^{(j)}$为像集${}^{(i)}\varphi_-^{(j)}(|w|=k)$；${}^{(i)}\Gamma$为${}^{(i)}D$之边界：${}^{(i)}\Gamma=\sum\limits_j{}^{(i)}\Gamma^{(j)}$；${}^{(i)}D$之外平准曲线为

$$
{}^{(i)}\Gamma_R=\sum_j{}^{(i)}\Gamma_R^{(j)};
$$

D之外平准曲线为

$$
\Gamma_R=\sum_i{}^{(i)}\Gamma_R=\sum_{i,j}{}^{(i)}\Gamma_R^{(j)}.
$$

设p到Γ_R之距离为$d(p,\Gamma_R)$，定义

$$
U_D(R-1)=\min_{p\in\Gamma}d(p,\Gamma_R)。
$$

若${}^{(i)}K^{(j)}\in\mathrm{P.S.}(\alpha^{ij},\beta^{ij})$，$\min\limits_{i,j}\alpha^{ij}=\beta$，$\min\limits_{i,j}\beta^{ij}=\alpha$（这时自然$0\leqslant\alpha,\beta\leqslant1$），则称$D\in\mathrm{P.S.}(\alpha,\beta)$或$\Gamma\in\mathrm{P.S.}(\alpha,\beta)$，同样定义$\mathrm{P.L.}(\alpha,\ \beta)$类。

把有限点列$\{{}^{(i)}z^{(j)}\}$，$j\neq1$，反复排列成无穷点列$\{z_n\}$，例如

$$
z_1={}^{(1)}z^{(2)},z_2={}^{(1)}z^{(3)},\cdots,z_{m_1}={}^{(2)}z^{(2)},\cdots,
$$

$$
z_{m_1+m_2-1}={}^{(3)}z^{(2)},\cdots,z_{\eta-g+1}={}^{(1)}z^{(2)},\cdots,
$$

这里 $\eta=\sum\limits_{i=1}^{g}m_i$。

对于正整数n，$z_k^{(n)}$，$k=1,\cdots,n+1$，在D上变动，设当$z_k^{(n)}=\sigma_k^{(n)}$时

$$V_n(z_1^{(n)},\cdots,z_{n+1}^{(n)})=\frac{H_1}{H_2}$$

取极大值V_n，这里

$$H_1=\prod_{\substack{j,k=1\\ j<k}}^{n+1}(z_j^{(n)}-z_k^{(n)}),\ H_2=\prod_{j=1,\ k=1}^{j=n+1,\ k=n}(z_j^{(n)}-z_k).$$

我们仍称$\{\sigma_k^{(n)}\}$为(广义的)Fekete点列．它们可能不是唯一的，但这对我们的讨论无关重要，我们以后只选定它的一组．

像对单连通集合所证的一样，可以看到，对$z\in D$，$t\in\Gamma_\rho$，$\rho>1$，有

$$\frac{1}{t-z}\frac{G_n(z)}{G_n(t)}$$

$$=\frac{1}{t-z}-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{(t-\sigma_i^{(n)})V_n}V_n$$

$$\cdot(\sigma_1^{(n)},\ \cdots,\ \sigma_{i-1}^{(n)},\ z,\ \sigma_{i+1}^{(n)},\ \cdots,\ \sigma_{n+1}^{(n)}),$$

$$G_n(z)=\frac{(z-\sigma_1^{(n)})\cdots(z-\sigma_{n+1}^{(n)})}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)}.$$

同样可得到

$$\left|\frac{1}{t-z}\frac{G_n(z)}{G_n(t)}\right|\leqslant\frac{(n+2)}{U_D(\rho-1)}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2},$$

这里$z\in D$，$t\in\Gamma_R$，$1<\rho\leqslant R$．

设在Γ_R内域$D_R^+\supset D$的函数$f(z)\in A(D_R^+)$能由 Cauchy 型积分表示：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{F(t)}{t-z}dt,\quad z\in D_R^+.$$

则

$$J_n(z,\ f,\ D)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\left[1-\frac{G_n(z)}{G_n(t)}\right]\frac{F(t)}{t-z}dt,\quad z\in D_R$$

是以z_1，…，z_n为极点的n次有理多项式，我们仍称为对于集合D和函数$f(z)$的Fekete（有理插补）多项式．

这时同样可以求得插补公式

$$
\begin{aligned}
& f(z)-J_n(z, f, D) \\
& = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{G_n(z)}{G_n(t)} \frac{[F(t)-R_n(t)]}{t-z} dt,
\end{aligned}
$$

这里$z \in D_R^+$，$R_n(z) \in (R_n)^A$只以z_1，$\cdots z_n$为可能的单极点（因而可能以${}^{(i)}z^{(j)}$为多重极点）（关于$(R_n)^A$参看第四章2.6节的定义），$R_n(z)$是任给的。

$J_n(z, f, D)$是在$\sigma_i^{(n)}$，$(1 \leqslant i \leqslant n+1)$，上和$f(z)$相等的$n$次有理多项式（即属于$(R_n)^A$类），其极点不外是$\{{}^{(i)}z^{(j)}\}$（可能是多重的）。

利用上面的插补公式很容易求出$J_n(z, f, D)$对$f(z)$的误差，那就是定理1推广于有限个复连通集合的和集的结果：

定理1*. 在上面所述的条件下，对$1<\rho \leqslant R$，$1 \leqslant p \leqslant \infty$，

$$
\begin{aligned}
\|f-J_n\|_{C(D)} \leqslant & \frac{(n+2)[l(\Gamma_R)]^{1-\frac{1}{p}}}{2\pi U_D(p-1)} \\
& \cdot \left(\frac{p}{R}\right)^{n+2} \|F(t)-R_n(t)\|_{L^p(\Gamma_R)}
\end{aligned}
$$

这里$J_n = J_n(z, f, D)$；$l(\Gamma_R)$为Γ_R之全长。□

证明方法和定理1的相同。

因为容易证明

$$
l(\Gamma_R) \leqslant \frac{2\eta\sigma R^2\pi}{R-1}, \quad \eta=\sum m_i, \quad \sigma=\max{}^{(i)}\alpha^{(j)}.
$$

所以又有

$$
\begin{aligned}
\|f-J_n\|_{C(D)} \leqslant & \frac{(n+1)}{U_D(p-1)}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\eta\sigma R^2}{R-1}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
& \cdot\left(\frac{p}{R}\right)^{n+2}\|F-R_n\|_{L^p(\Gamma R)}.
\end{aligned}
$$

特别的有

$$
\|f-J_n\|_{C(D)} \leqslant C\frac{n^{4-\frac{1}{p}}}{R^n}\|F-R_n\|_{L^p(\Gamma_R)},
$$

C和n，R，$\|F\|_{L^p(\Gamma_R)}$无关。

而当Γ为可求长时

$$\|f-J_n\|_{C(D)}\leqslant C\frac{n^{3-\frac{1}{p}}}{R^n}\|F-R_n\|_{L^p(\Gamma_R)},$$

C和n，R，$\|F\|_{L^p(\Gamma_R)}$无关。这估计式对${}^{(i)}\Gamma^{(1)}$为凸域边界之"反像"（参看第四章§1）和${}^{(i)}\Gamma^{(2)}$，…，${}^{(i)}\Gamma^{(m_i)}$为凸域之边界时也成立；而当又加上Γ为可求长时，则有

$$\|f-J_n\|_{C(D)}\leqslant C\frac{n^{2-\frac{1}{p}}}{R^n}\|F-R_n\|_{L^p(\Gamma_R)},$$

C与n，R，$\|F\|_{L^p(\Gamma_R)}$无关。

对于$\Gamma\in$P，S.$(\alpha,\ \beta)$，则有

$$\|f-J_n\|_{C(D)}\leqslant C\frac{n^a}{R^n}\|F-R_n\|_{L^p(\Gamma_R)},$$

这里C与n，R，$\|F\|_{L^p(\Gamma_R)}$无关，$a=3-\alpha-\frac{1}{p}+\varepsilon$，$\varepsilon>0$；对$\Gamma\in$P.L.$(\alpha,\ \beta)$可令$\varepsilon=0$。

由于 Мергелян 的结果对我们讨论的这种由有限个"多连"的连续统构成的集合是相应成立的（改用$(R_n)^A$族来逼近），证明和[5]中对单连通集合（不割开平面的连续统）的证明相似。因此有

定理2*. 若D按定理1*的规定，D之内点组成的"内域"为D^0，设$f(z)\in C(D)\cap A(D^0)$，则存在仅以$\{{}^{(i)}z^{(j)}\}$为极点的$R_n\in(R_n)^A$，使得

$$\|f-R_n\|_{C(D)}=0\left\{\omega\left(d\left(\frac{5\lg n}{n}\right)\right)\right\},$$

这里$\omega(\delta)$是$f(z)$连续扩展到某含D之园域上的连续模，$d(h)=\max\limits_{p\in\Gamma}d(P,\ \Gamma_{1+h})$。□

因而若${}^{(i)}\Gamma^{(j)}$皆是Jordan曲线时，我们可以得到

$$\|f-R_n\|_{C(D)}=0\left\{\omega\left(J\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right)\right\},$$

$$J(\delta)=\max_{i;\,j}\omega(\delta,\ {}^{(i)}\varphi_{-}^{(j)},\ C(1\leqslant|w|\leqslant r_0)),$$

r_0为某充分大的数。

读者还不难引出当边界为逐段光滑时这定理的形式。

2.2. 若函数$f(z)$在D上定义，在${}^{(i)}D$上按某一范数${}^{(i)}\|*\|$有${}^{(i)}p_n\in(\mathrm{R}_n)^A$以误差${}^{(i)}\varepsilon(n)$逼近于$f(z)$。现在要问，是否能有统一的（不依赖于$i$的）$p_n\in(\mathrm{R}_n)^A$在${}^{(i)}D$上仍按范数${}^{(i)}\|*\|$逼近于$f(z)$呢？若有，误差的级又将如何求？现在，就某些情况下我们来回答这一问题。

我们规定${}^{(i)}\|*\|$为下面两种情况之一：

1) $\|*\|_{L^{p_i}({}^{(i)}D)}$，$0<p_i\leqslant\infty$

（这时若$p_i\neq\infty$，我们自然要求${}^{(i)}D$中的每一点在${}^{(i)}D$中的任何邻域具有正的面性测度；而对$p_i=\infty$，则相应的范数应理解为$\sup\limits_{z\in{}^{(i)}D}|f(z)|$）；

2) $\|*\|_{L^{p_i}({}^{(i)}\Gamma)}$，$0<p_i\leqslant\infty$

（在这里当$p_i\neq\infty$时，我们自然要求${}^{(i)}\Gamma$为可求长，而$\|f\|_{L^\infty({}^{(i)}\Gamma)}=\sup\limits_{z\in{}^{(i)}\Gamma}|f(z)|$）。

至于${}^{(i)}\|*\|$是选1)还是2)作为定义，将是任意的，且和i无关。例如${}^{(i_1)}\|*\|$可选为$\|*\|_{L^{p_{i_1}}({}^{(i_1)}D)}$，而${}^{(i_2)}\|*\|$选为$\|*\|_{L^{q_{i_2}}({}^{(i_2)}\Gamma)}$。

设$g(z)\in A(D_R^+)$，$1<\mathrm{R}<\mathrm{R}_0$，$\mathrm{R}_0$为某一常数。这里我们总选$\mathrm{R}_0$使得${}^{(i)}\Gamma_R$是相互分离的。并设$g(z)$有界：$|g(z)|<M$。即$g(z)$是分区解析而且有界的。这时，根据上一节所述，以${}^{(i)}z^{(j)}$ ($i=1,\ \cdots,\ g,\ j=1,\ \cdots,\ m_i$)为可能极点的在$D$上对$g(z)$进行插补的$n$次Fekete有理多项式$J_n(z)=J_n(z,\ g,\ D)$，并使得

$$\|g(z)-J_n(z)\|_{C(D)}\leqslant C\frac{n^4}{\mathrm{R}^n}M,$$

这里C和n，R，M无关。

利用这一结论，就可以讨论统一逼近的多项式了。

实际上，若

$$^{(i)}\|f(z)-{}^{(i)}p_n(z)\|=0\{{}^{(i)}\varepsilon(n)\},\ z\in{}^{(i)}D,$$

$^{(i)}p_n(z)\in(\mathrm{R}_n)^A$ 的极点的极限点不落在 D 上，因而可以找到 $^{(i)}Q_n(z)\in(\mathrm{R}_n)^A$，它们的极点只在集合$\{{}^{(i)}z^{(\sigma)}\}$中，并且

$$^{(i)}\|f(z)-{}^{(i)}Q_n(z)\|=O\{{}^{(i)}\varepsilon(n)+r_1^n\},\ 0<r_1<1.$$

这时不难看到

$$\|{}^{(i)}Q_n(z)\|_{C(\bar{D}_R^+)}\leqslant C_1\mathrm{R}_1^n,$$

这里$\mathrm{R}<\mathrm{R}_1<\mathrm{R}_0$，$C_1$和 n，R，i无关而只与D，$f(z)$，R_0有关。

我们作函数$g(z)$，它在$^{(i)}D_R^+$上等于 $^{(i)}Q_n(z)$，于是对应于$g(z)$之Fekete多项式有

$$\|g(z)-J_m(z,\ g,\ D)\|_{C(D)}\leqslant C_2\frac{m^4\mathrm{R}_1^n}{\mathrm{R}^m},$$

C_2为与m，R_1^n，R无关的常数。选$m=tn$使得$\mathrm{R}^t>\mathrm{R}_1$（因R>1，所以选$t$为充分大的正整数即可）。因而这时有

$$\|g(z)-J_{tn}(z,\ g,\ D)\|_{C(D)}=O(n^4r_2^n)=O(r_3^n),$$

$$0<r_2<r_3<1.$$

作有理多项式序列$\{p_n(z)\}$：当$n\in[ti,\ ti+t)$时，令$p_n(z)=J_{ti}(z,\ g,\ D)$。则显然有

$$\|g(z)-p_n(z)\|_{C(D)}=O(r_3^i)=O(r_4^n),$$

$$0<r_3<r_4<1.$$

因此有

$$\|{}^{(i)}p_n(z)-p_n(z)\|_{C({}^{(i)}D)}=O(r^n),\ 0<r<1,$$

这里$p_n(z)\in(\mathrm{R}_n)^A$的极点在集合$\{z_n\}$中，并和$^{(i)}D$ 的编号i无关，它正是我们要求的统一逼近多项式：

$$^{(i)}\|f(z)-p_n(z)\|=O\{{}^{(i)}\varepsilon(n)+r^n\}$$

总结上述即得

定理 5 设D满足2.1节的规定，$^{(i)}\|*\|$满足本节的选择规定，对在D上定义的函数$f(z)$，若有$^{(i)}p_n(z)\in(\mathrm{R}_n)^A$，它们的极点的极限点不在$D$上，则有

$$^{(i)}\|f-{}^{(i)}p_n\|=O\{{}^{(i)}\varepsilon(n)\},\ i=1,\ \cdots,\ g.$$

必存在与指标i无关的$p_n(z)\in(R_n)^A$，其极点只属于集合$\{{}^{(\lambda)}z^{(\sigma)}\}$，使得

$$^{(i)}\|f(z)-p_n(z)\|=O\{{}^{(i)}\varepsilon(n)+r^n\},\quad i=1,\ \cdots,\ g,$$

这里r为某小于1的正数。□

显然关于范数$^{(i)}\|*\|$之选择规定中 1)，2) 可相应地改为Соболев空间的范数$\|*\|_{W_{p_i}^{(l_i)}({}^{(i)}D)}$和$\|*\|_{W_{p_i}^{(l_i)}({}^{(i)}\Gamma)}$，而上定理可相应地成立，且证法相同。定理详细的叙述和证明留给读者自己去做。

下面我们举一个应用定理 5 的例子。

设$D=D_1+\cdots+D_4$。D_1为 Jordan 解析曲线围成的闭区域，D_2是一般的 Jordan 闭区域；D_3为 P.S.$(\alpha,\ \beta)$，$\beta>0$ 型的折线(Jordan弧)；D_4为闭区域，其边界$^{(4)}\Gamma\in(\Lambda)$；并且$D_1,\ \cdots,D_4$是相互不相交的。设有四个函数$f_1(z),\ \cdots,\ f_4(z)$：

i) $f_1(z)$在D_1的内域解析，$f_1^{(k_1)}(z)\in L^2(D_1)$；

ii) $f_2(z)$在D_2的内域解析，$f_2^{(k_2)}(z)\in C(D_2)$在D_2上之连续模为$\omega_2(\delta)$；

iii) $f_3(z)$ 在D_3上定义，并且线性导数$f_3^{(k_3)}(z)\in C(D_3)$的连续模为$\omega_3(\delta)$；

iv) $f_4(z)$在D_4的内域解析，$f_4^{(k_4)}(z)\in E_p(D_4)$，$1<p<\infty$，$\dfrac{d^l}{d\theta^l}f_4^{(k_4)}(\overset{(4)}{\varphi}_-(e^{i\theta}))\in L^p(0,\ 2\pi)$ 在 $L^p(0,\ 2\pi)$ 中的连续模为$\omega_4(\delta)$，$\overset{(4)}{\varphi}_-(w)$映$|w|>1$于$D_4$之补集，$\overset{(4)}{\varphi}_-(\infty)=\infty$。

这时就存在统一的多项式$p_n\in(P_n)^A$，使得

$$\|f_1-p_n\|_{L^2(D_1)}=O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k_1}{2}}C_1\left(\frac{1}{n},\ f_1^{(k_1)},\ D_1\right)\right\},$$

$$\|f_2-p_n\|_{C(D_2)}=O\left\{\left(J_{D_2}\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right)^{k_2}\omega_2\left(J_{D_2}\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right)\right\},$$

$$\|f_3-p_n\|_{C(D_3)}=O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{k_3 3-\varepsilon}\omega_3\left(\frac{1}{n^{3-\varepsilon}}\right)\right\},\quad \varepsilon>0,$$

$$\|f_4-p_n\|_{L^p({}^{(4)}\Gamma)}=O\left\{\frac{1}{n^{k_4+l}}\omega_4\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

同样还可以举出许多类似的例子.

在制作$P_n(z)$的过程中，我们已看出实现统一逼近多项式的一种方法，但这制作程序是不明朗的. 然而，在求得定理5后，我们可以利用直交有理多项式来实现统一逼近. 而误差，则利用第二转化引理(结合第一转化引理). 这时内积

$$(f,\ h)_D = a_1{}^{(1)}(f,\ h)_{{}^{(1)}D} + \cdots + a_g{}^{(g)}(f,\ h)_{{}^{(g)}D},$$

$$a_i > 0$$

的定义方式是多种多样的，这里${}^{(i)}(f,\ h)_{{}^{(i)}D}$是在${}^{(i)}D$上定义的函数空间中的某种内积；而可考虑的偏离也是多种多样的，例如在一个连通成分上考虑在$C({}^{(i_1)}D)$中的误差，在另一成分上则考虑在$L^p({}^{(i_2)}\Gamma_R)$中的误差，在第三个成分上考虑高阶导数在$C({}^{(i_3)}\Gamma_k)$中的误差等等.

还可以看到，我们的范数${}^{(i)}\|*\|$是不限于前面所指的一些类的，一般取

$$\|\mathrm{Re} f\|_{W_{p_i}^{(l_i)}({}^{(i)}D)},\ \|\mathrm{Im} f(z)\|_{W_{p_i}^{(l_i)}({}^{(i)}\Gamma)},$$

等等来作定义，或者取上面所提到的各类范数的线性组合来作范数(只要有意义). 当用直交多项式来实现逼近时，内积的定义更是多种多样，而且可以建立各种各样类型的直交多项式级数的理论.

§3. Bieberbach 多项式及其它

3.1 下面我们讨论一个结果，它与 Bieberbach 多项式对映射函数的逼近度是有关系的.

设D为一有界单连通区域，$f(z)\in A(D)\cap C(\overline{D})$，若有$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|f(z)-p_n(z)\|_{C(\overline{D})}\leqslant E(n),$$

这里$E(t)$对$t\in(0,\ \infty)$非升，$E(+\infty)=0$，则根据第一转化引理和第四章的不等式（定理2）可得

$$\|f'(z)-p'_n(z)\|_{L^1(D)}\leqslant\frac{4}{\operatorname{tg}u}\int_n^\infty\lambda(t)\,E\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t},$$

$$u>1,\quad \lambda(t)=e\left\{\int_0^1\frac{T_D(r)rdr}{\left(U_D\left(\frac{1}{t}\right)+U_D^*(1-r)\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.\qquad(1)$$

设 $R_n(z)=M_n(z,f)\in(P_n)^A$使得

$\|f'(z)-R_n'(z)\|_{L^1(D)}$

达到极小，这时我们有

$$\|p_n'(z)-M_n'(z,f)\|_{L^1(D)}\leqslant 2\|f'(z)-p_n'(z)\|_{L^1(D)}$$

$$\leqslant\frac{8}{\lg u}\int_n^\infty\frac{\lambda(t)\,E\left(\frac{t}{u}\right)}{t}dt=H(n).\qquad(2)$$

利用关于多项式的结果（第四章，定理4）可得：若$\overline{D}\in S_2(r_0,\theta_0)$，则当$U_D\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant er_0$时有

$$\|p_n'-M_n'\|_{C(\overline{D})}\leqslant C(n)H(n),$$

$$C(n)=\frac{4e\theta_0^{-\frac{1}{2}}}{U_D(n^{-1})}\qquad(3)$$

象以前一样，令$\varphi_+(w)$映$|w|<1$为D，$z_0=\varphi_+(0)$。当D之边界Γ为可求长的Jordan曲线时，我们知道$\varphi_+(w)\in H_1$，并且

$$\int_0^{2\pi}|\varphi_+'(e^{i\theta})|d\theta=l,$$

l为Γ之全长。由Fejer不等式，我们知道

$$\int_0^1|\varphi_+'(re^{i\theta})|dr\leqslant\frac{1}{2}l$$

对所有的$\theta\in[0,2\pi]$成立。

由于 $$\left\{\iint_{|w|<1}\left|(p_n'(\varphi_+(w)-M_n'(\varphi_+(w),f))\varphi_+'(w)\right|^2dudv\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant H(n),$$

所以

$$|p_n'(\varphi_+(w)) - M_n'(\varphi_+(w), f)|\,|\varphi_+'(w)| \leqslant \frac{H(n)}{\sqrt{\pi}(1-r)},$$

$$|w| < r.$$

设$I(t)\geqslant 1$为某一非降的函数，则显然得到

$$|p_n(z) - M_n(z,f) - p_n(z_0) + M_n(z_0,f)|$$

$$\leqslant C(n)H(n)\max_{|\theta|\leqslant\pi}\int_{1-\frac{1}{I(n)}}^{1}|\varphi_+'(re^{i\theta})|\,dr + \frac{H(n)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1-\frac{1}{I(n)}}\frac{rdr}{1-r},$$

这里$z\in\overline{D}$．若这时选$I(n)$(上升得适当快)使得

$$C(n)\max_{|\theta|\leqslant\pi}\int_{1-\frac{1}{I(n)}}^{1}|\varphi_+'(re^{i\theta})|\,dr \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lg I(n), \qquad (4)$$

则有

$$\|p_n(z) - M_n(z,f) - p_n(z_0) + M_n(z_0,f)\|_{C(\overline{D})}$$
$$\leqslant \frac{2H(n)}{\sqrt{\pi}}\lg I(n).$$

因此我们有

定理6. 若区域$D\in S_2(r_0,\theta_0)$的边界Γ为可求长Jordan曲线，$f(z)\in A(D)\cap C(\overline{D})$，$f'(z)\in L^2(D)$，并有$p_n\in(p_n)^A$，使得$\|f-p_n\|_{C(D)}\leqslant \mathrm{E}(n)$，$\mathrm{E}(t)\searrow 0$，$n$满足$U_D\left(\frac{1}{r}\right)\leqslant er_0$，则有

$$\|f(z) - M_n(z,f) - f(z_0) + M_n(z_0,f)\|_{C(\overline{D})}$$
$$\leqslant 2\,\mathrm{E}(n) + \frac{2H(n)}{\sqrt{\pi}}\lg I(n). \quad \square$$

这里$H(n)$，$I(n)$由(2)式和(4)式决定(因而有关的$\lambda(t)$，$c(n)$由(1)式和(3)式决定)，$z_0=\varphi_+(0)$．

设$H_n(z,f)$为$R_n(z)\in(p_n)^A$，$R_n(z_0)=f(z_0)$，$R_n'(z_0)=f'(z_0)$，使得$\|f'(z)-R_n'(z)\|_{L^2(D)}$达到极小，则在上定理的条件下我们有

$$\|f(z)-Q_n(z)\|_{C(\bar{D})}\leqslant\left(\frac{d_1}{d_2}+2\right)\mathrm{E}(n),$$

这里 $Q_n(z)=p_n(z)-p_n(z_0)-p_n'(z_0)(z-z_0)+f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$，$d_1=\max\limits_{z\in D}|z-z_0|$，$d_2=\min\limits_{z\in\Gamma}|z-z_0|$。显然这时 $Q_n(z_0)=f(z_0)$，$Q_n'(z_0)=f'(z_0)$。象上面定理的证法一样，我们有

定理6*. 在定理6的条件下，有

$$\|f(z)-H_n(z,f)\|_{C(\bar{D})}\leqslant 2\left(\frac{d_1}{d_2}+2\right)\left\{\mathrm{E}(n)+\frac{H(n)}{\sqrt{\pi}}\lg I(n)\right\}.\ \square$$

这两个结果也可以由第二转化引理（经过一些处理）推导出来。

3.2. 设 $g(z)$，$g(z_0)=0$，$g'(z_0)=1$ 等角映射至D中成某半径为ρ的圆域，$B_n(z)$为D对于点z_0的Bieberbach n次多项式，即使得积分

$$\iint_D|R_n'(z)|^2dxdy$$

成为极小的$R_n(z)\in(P_n)^A$，$R_n(z_0)=0$，$R_n'(z_0)=1$。

这时有
$$\iint_D|g'(z)-B_n'(z)|^2dxdy=\iint_D|B_n'(z)|^2dxdy-\iint_D|g'(z)|^2\,dxdy+2R_e\iint_D\overline{g'(z)}(g'(z)-B_n'(z))dxdy$$
$$=\iint_D|B_n'(z)|^2dxdy-\iint_D|g'(z)|^2dxdy,$$

因此$B_n(z)=H_n(z,g)$，故由定理6*就可得到关于Beiberbach多项式对映射函数的逼近度的结果：

定理6.** 设D，Γ，$\mathrm{E}(n)$，$H(n)$，$I(n)$，d_1，d_2等符号如

3.1节所述，$g(z)$，$B_n(z)$如上面所述，则有

$$\|g(z)-B_n(z)\|_{C(\overline{D})}\leqslant 2\left(\frac{d_1}{d_2}+2\right)\left\{E(n)+\frac{H(n)}{\sqrt{\pi}}\lg I(n)\right\},$$

只要有$p_n\in(P_n)^A$使得$\|g-p_n\|_{C(\overline{D})}\leqslant E(n)$即可。□

利用第一转化引理和第四章中的不等式就可以得出在各种范数下$g(z)-B_n(z)$的误差估计。例如在$\|\cdot\|_{W_P^{(k)}(D)}$，$\|\cdot\|_{W_P^{(k)}(\Gamma)}$，$\|\cdot\|_{W_P^{(k)}(D_R^+)}$，$\|\cdot\|_{W_P^{(k)}(\Gamma_R)}$等意义下的估计。这些结果一般的叙述形式留给读者，下面我们只讨论定理6**在具体情况下的形式。

3.3. 考虑具体的区域。首先设$\Gamma\in P.S.(\alpha,\beta)$，则不难知道$g(z)$在$\overline{D}$上满足$\frac{1}{2-\beta}-\varepsilon$级的 Höldr-Lipschitz 条件，因而由Мергелян的结果知道，这时上定理中的$E(n)=O(n^{-\frac{\beta}{2-\beta}+\varepsilon})$，$\varepsilon>0$。同时，由于$\varphi_+'(w)\in H_p$，$1<p<\frac{1}{1-\alpha}$，故由 Fejér不等式知

$$\int_0^1\left|\varphi_+'(re^{i\theta})\right|^p dr<\infty,\quad 1<p<\frac{1}{1-\alpha}.$$

且由Hölder不等式亦可知

$$\int_{1-\frac{1}{I(n)}}^1\left|\varphi_+'(re^{i\theta})\right|dr\leqslant\left(\frac{1}{I(n)}\right)^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_0^1|\varphi_+'(re^{i\theta})|^p dr\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

故只需选$I(n)=O(n^b)$，b为某个适当大的正数，就可满足上面定理的要求。还不难看出，当$\alpha>0$时，必存在r_0，$\theta_0>0$使得$D\in S_2(r_0,\theta_0)$，而$U_D\left(\frac{1}{n}\right)\geqslant Cn^{-2+\alpha}$，$C$为与$n$无关的常数。同时可取

$$\lambda(t)=O(t^H),$$

$$H=(2-\alpha)\left(2+\frac{\max(0,1-2\alpha)-1}{2-\beta}+\varepsilon\right).$$

故有 $$H(n)=O(n^{-\eta+\varepsilon}),$$

$$\eta=\frac{H'}{2(2-\beta)},$$

$$H' = (\alpha-2)(3-2\beta-\max(0,1-2\alpha))+2\beta. \tag{5}$$

因此得到

系1. 设 $\Gamma\in$ P.S.(α,β)，$\alpha,\beta>0$ 则有

$$\|g(z)-B_n(z)\|_{C(\overline{D})} = O(n^{-\eta+\varepsilon}),\quad \varepsilon>0.$$

只要$\eta>0$即可，η由(5)式定义.

特别当Γ为光滑时，$\eta=\dfrac{1}{2}$，即得

Мергелян之结果(参看[7]). □

若$\Gamma\in$ P.L.(α,β)，则不难知道$g(z)$在$\overline{D}$上满足$\dfrac{1}{2-\beta}$级的Hölder-Lipschitz条件，故由我们在§1中所得的结果，知这时有

$$\mathrm{E}(n) = O\left\{\left(\frac{\lg n}{n}\right)^{\frac{\beta}{2-\beta}}\right\}.$$

由于这时$T_D(r)=O((1-r)^{-\sigma})$，$\sigma=\max(0,1-2\alpha)$，$U_D(1-r)\geqslant C_1(1-r)^{2-\alpha}$，$U_D^*(1-\rho)\geqslant C_2(1-\rho)^{2-\beta}$，故有

$$\lambda(t) = O\left(t^{-\eta+\frac{\beta}{2-\beta}}\right),$$

经简单计算，有$H(n)=O\left\{\left(\lg n\right)^{\frac{\beta}{2-\delta}}n^{-\eta}\right\}$，

$\mathrm{E}(n)=O(H(n))$，$I(n)=O(n^b)$，b充分大。故得到

系2. 若$\Gamma\in$ P.L.(α,β)，$\alpha,\beta>0$，则有

$$\|g(z)-B_n(z)\|_{C(\overline{D})} = O\left\{n^{-\eta}\left(\lg n\right)^{\frac{\beta}{2-\beta}+1}\right\}$$

只要$\eta>0$即可(η由(5)式定义).

特别当Γ为光滑的(Λ)类曲线时，有

$$\|g(z)-B_n(z)\|_{C(\overline{D})} = O\left\{\frac{(\lg n)^2}{n^{1/2}}\right\}.\ \square$$

3.4. 现在我们来讨论充分光滑的Γ：$z=z(s)$，$z(s+l)=z(t)$，s为弧长参数，l为Γ之全长. 记$\theta(s)=\arg z'(s)$为$z(s)$处的切线与正实轴的交角，我们自然选定它是连续的. 若$\theta^{(r)}(s)\in C(\Gamma)$，记其连续模为$\varepsilon_r(\delta)=\omega(\delta,\theta^{(r)},C(\Gamma))$.

若Γ满足条件：

$$(\Lambda^*)\qquad \int_0^l \frac{\varepsilon_{(0)}(t)}{t}\lg\frac{1}{t}dt<\infty;$$

$$(\Lambda_{(k)})\qquad \int_0^l \frac{\varepsilon_{(k)}(t)}{t}dt<\infty.$$

则由[8]中的结果不难知道，$g^{(k+1)}(z)$在$\overline{D}$上连续，并且

$$\omega(\delta,g^{(k+1)},C(\Gamma))=O\left\{\int_0^\delta\frac{\varepsilon_{(k)}(t)}{t}dt+\delta\int_\delta^l\frac{\varepsilon_{(k)}(t)}{t^2}dt+\delta\lg\frac{1}{\delta}\right\}.$$

（这一结论并不需要条件(Λ^*)）。

因而有$p_n(z)\in(P_n)^A$，使得

$$\|g(z)-p_n(z)\|_{C(\overline{D})}=O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\varepsilon_{(k)}(t)}{t}dt+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^l\frac{\varepsilon_{(k)}(t)}{t^2}dt+\frac{\lg n}{n}\right)\right\}$$

（这一论断需要条件(Λ^*)，参看[9]，但当$k>1$时，条件$(\Lambda_{(k)})$包含(Λ^*)）。

这时仍旧取$\lambda(t)=O(t^{\frac{1}{2}})$，$I(n)=O(n^b)$，$b$为充分大之定数。则有

$$\|g(z)-B_n(z)\|_{C(\overline{D})}=O\{(I_1+I_2+I_3)\lg n\},$$

$$I_1=\int_n^\infty\frac{\lg t}{t^{k+2+1/2}}dt=O\left\{\frac{\lg n}{n^{k+1+1/2}}\right\},$$

$$I_2=\int_n^\infty\frac{dt}{t^{k+2+1/2}}\int_{1/t}^l\frac{\varepsilon_{(k)}(x)}{x^2}dx$$

$$=O\left\{\int_0^{\frac{1}{n}}t^{k-\frac{1}{2}}\varepsilon_{(k)}(t)dt+\left(\frac{1}{n}\right)^{k+1+\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{n}}^l\frac{\varepsilon_{(k)}(t)}{t}dt\right\},$$

$$I_3=\int_n^\infty\frac{dt}{t^{k+1+1/2}}\int_0^{\frac{1}{t}}\frac{\varepsilon_{(k)}(x)}{x}dx=O\left\{\int_0^{\frac{1}{n}}t^{k-\frac{1}{2}}\varepsilon_{(k)}(dt)\right.$$

$$+\left(\frac{1}{n}\right)^{k+\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\varepsilon_{(k)}(t)}{t}dt\Bigg\}.$$

后两积分的计算利用了Dirichlet变换。

再利用第四章的不等式(2.1节之定理)和第一转化引理，就有

系3. 设$\Gamma\in(\Lambda^*)\cap(\Lambda_{(k)})$，$0\leqslant r\leqslant k+1$，则有

$$\|g^{(r)}(z)-B_n^{(r)}(z)\|_{C(\bar{D})}=O\Bigg\{(\lg n)\Bigg(\frac{\lg n}{n^{k-r+3/2}}$$

$$+\left(\frac{1}{n}\right)^{k-r+1/2}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\varepsilon_{(k)}(t)}{t}dt$$

$$+\left(\frac{1}{n}\right)^{k-r+\frac{3}{2}}\int_{\frac{1}{n}}^{l}\frac{\varepsilon_{(k)}(t)}{t^2}dt\Bigg)\Bigg\}.$$

特别当 $\varepsilon_{(k)}(\delta)=O(\delta^\lambda)$，$0<\lambda<1$时，有

$$\|g^{(r)}(z)-B_n^{(r)}(z)\|_{C(\Gamma)}$$

$$=O\left\{(\lg n)\left(\frac{1}{n}\right)^{k-r+\frac{1}{2}-\lambda}\right\}.$$

当$\varepsilon_{(k)}(\delta)=O(\delta)$时，有

$$\|g^{(r)}(z)-B_n^{(r)}(z)\|_{C(\Gamma)}=O\left\{(\lg n)^2\left(\frac{1}{n}\right)^{k-r+\frac{3}{2}}\right\}.\ \square$$

若Γ的曲率为有界，则 $\varepsilon_{(0)}(\delta)=O(\delta)$，因而这时

$$\|g(z)-B_n(z)\|_{C(\Gamma)}=O\left\{\frac{(\lg n)^2}{n^{3/2}}\right\},$$

$$\|g'(z)-B_n'(z)\|_{C(\Gamma)}=O\left\{\frac{(\lg n)^2}{n^{1/2}}\right\}.$$

前一估计式是M.B.Келдыш的结果的推广(参看[7],[10])，他的结论是

$$\|g(z)-B_n(z)\|_{C(\Gamma)}=O\left\{\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right\},\ \varepsilon>0.$$

由第四章的定理2和定理7，我们还可求出$\|g^{(k+l)}-B_n^{(k+l)}\|_{L^p(D)}$之类的估计，$l$可充分大(相应地$p$要充分小)。

考虑当Γ是解析的Jordan曲线的情况．这时$g(z)$在$\overline{D}$上解析，因而我们可选

$$\lambda(t)=O(t^{\frac{1}{2}}),\quad E(n)=O(r_1^n),\quad 0<r_1<1,$$

$$I(n)=O(n^b),\quad b>0,\quad H(n)=O(r_2^n),\quad 0<r_1<r_2<1,$$

故有

系4. 若Γ为解析的Jordan曲线，则必致

$$\|g^{(k)}(z)-B_n^{(k)}(z)\|_{C(\Gamma)}=O(\rho^n),$$

这里　$\rho=\rho(k)<1$．□

最后应当指出，我们这里讨论Bieberbach多项式误差估计的方法和［7]，［10]，［11］中的不尽相同．看来这里的方法要好些。

3.5． 我们来考虑$L^2(\Gamma)$中的极值多项式，对它们也有类似的结果。

在3.2节中，设Γ为可求长Jordan曲线，并且满足Смирнов条件(S)：

$$\lg|\omega'(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lg|\omega'(\rho e^{i\theta})|d\theta,$$

这里$\omega(w)$为$g(z)$的反函数（参看[12]中第十章)。

这时我们知道，$G(z)=\int_{z_0}^{z}g'(t)^{\frac{1}{2}}dt$ 是所有D中的解析函数$f(z)$，$f(z_0)=0$，$f'(z_0)=1$中使得

$$\int_\Gamma|f'(z)|^2|dz|$$

达到极小值$2\pi\rho$的唯一函数。

我们定义$^*B_n(z)$为$R_n(z)\in(P_n)^A$，$R_n(z_0)=0$，$R_n'(z_0)=1$，使得

$$\|R_n'(z)\|_{L^2(\Gamma)}$$

达到极小．

我们来讨论$^*B_n(z)$对$G(z)$的误差．

因为

$$\int_{\Gamma}|G'(z)-R_n'(z)|^2|dz|$$

$$=\int_0^{2\pi}|G'(\omega(\rho e^{i\theta}))-R_n'(\omega(\rho e^{i\theta}))|^2\omega'(\rho e^{i\theta})|\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}|1-R_n'(\omega(\rho e^{i\theta}))\sqrt{\omega'(\rho e^{i\theta})}|^2\rho d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}|R_n'(\omega(\rho e^{i\theta}))|^2|\omega'(\rho e^{i\theta})|\rho d\theta-2\pi\rho$$

$$-2R_e\Big(\int_0^{2\pi}R_n'(\omega(\rho e^{i\theta}))\sqrt{\omega'(\rho e^{i\theta})}\rho d\theta\Big)$$

$$=\int_{\Gamma}|R_n'(z)|^2|dz|-\int_{\Gamma}|G'(z)|^2|dz|.$$

因此$^*B_n(z)$也是n次多项式$R_n(z)$，$R_n(z_0)=0$，$R_n'(z_0)=1$中实现$\|G'(z)-R_n'(z)\|_{L^2(\Gamma)}$的极小的多项式。

采用3.4节的记号，并利用[11]中的方法可证

引理1. 设$\theta^{(k-1)}(S)$绝对连续，$\theta^{(k)}(S)\in L^p(\Gamma)$，$1<p<\infty$，并且

$$(\overset{(p)}{\Lambda}_{(k)}): \qquad \int_0^l \frac{\overset{(p)}{I}_k(t)}{t}dt<\infty,$$

$$\overset{(p)}{I}_{(k)}(\delta)=\omega(\delta,\theta^{(k)},L^p(\Gamma)),$$

则必$G^{(k)}(\varphi_-(e^{i\theta}))$绝对连续，$G^{(k+1)}(\varphi_-(e^{i\theta}))\in L^p(0,2\pi)$，

$$\omega(\delta,\ G^{(k+1)}(\varphi_-(e^{i\theta}),\ L^p(0,\ 2\pi))$$

$$=O\left\{\int_0^{\delta}\frac{\overset{(p)}{I}_{(k)}(t)}{t}dt+\delta\int_{\delta}^{l}\frac{\overset{(p)}{I}_{(k)}(t)}{t^2}dt+\delta^{1-\frac{1}{p}}\right\},$$

这里$\varphi_-(w)$等角映射$|w|>1$于$\overline{D}$的补区域，$\varphi_-(\infty)=\infty$，$\varphi_-'(\infty)>0$。□

因此有

引理2. 设 $\Gamma\in(\overset{(p)}{\Lambda}_{(k)})$，$1<p<\infty$，$k=1,2,\cdots$，则有$R_n(z)\in(P_n)^A$使得

$$\|G(z)-R_n(z)\|_{L^p(\Gamma)}=O\Big\{\frac{1}{n^{k+1}}\Big(\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\overset{(p)}{I}_{(k)}(t)}{t}dt$$

$$+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{l}\frac{\overset{(p)}{I}_{(k)}(t)}{t}dt+\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\Big)\Big\}. \square$$

证明可参看第六章（定理8*系2）。

我们还不难要求引理2 中的 $R_n(z)$ 满足条件 $R_n(z_0)=0$，$R_n'(z_0)=1$. 因此由第一（或第二）转化引理可得

定理7. 设 $\Gamma\in(\overset{(2)}{\Lambda}_{(k)})$，$k\geqslant 1$，则对 $2\leqslant q\leqslant\infty$，$1\leqslant r\leqslant k+1$ 有

$$\|G^{(r)}(z)-{}^*B_n^{(r)}(z)\|_{\Gamma^{q}(\Gamma)}=O\Big\{\left(\frac{1}{n}\right)^{k+\frac{1}{2}+\frac{1}{q}-r}$$

$$\times\left[\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\overset{(2)}{I}_{(k)}(t)}{t}dt+\left(\frac{1}{n}\right)\int_{\frac{1}{n}}^{l}\frac{\overset{(2)}{I}_{(k)}(t)}{t}dt+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\Big\}. \square$$

由第四章的定理2和定理7可求

$$\|G^{(k+1+l)}-{}^*B_n^{(k+1+l)}\|_{\Gamma^{p}(D)}$$

的估计。

§4. 第一转化引理的应用

4.1. 在复变函数构造理论中，由第四章得到的不等式通过第一转化引理可得到许许多多的转化定理和反定理。在处理极限过程（即研究f^+和f^-之间的关系）方面往往要比实函数构造理论相应的问题容易些，这是因为解析函数序列的(面性或线性)中值收敛往往就包括了域内的广义一致收敛性。另外一方面，解析函数族有很便于应用的致密性和唯一性定理。所以对解析函数的构造理论，许多转化定理及相应在一定条件下的反定理则是不证自明的。几乎对应于第四章中的每一个不等式(§2—§4) 都有相应的结果，我们不必一一列出来。

实际上，在前面讨论Fekete多项式，Bieberbach多项式时，我们已经用了转化引理3．现在我们将再举一些例子。

关于连续模$\omega_h(\delta,f,W_p^{(l)}(D))$和"可积度" $\Omega(\delta,f,W_p^{(l)}(D))$

我们仍引用第二章3.1节的定义和有关的不等式。这时利用第四章的结果就可得到一系列的反定理。

若L: $z=z(s)$, $0\leqslant s\leqslant l$, 为一可求长曲线, s为弧长参数.设$g(z)\in L^p(L)$, 则同样定义

$$\omega_k(\delta,g,L^p(L))=\sup_{\substack{L'\subset L\\ z(s+jh)\in L}}\ \sup_{|h|<\delta}\left\|\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\right.$$

$$\left.\times\binom{k}{j}g(z(s+jh))\right\|_{L^p(L')},$$

这里h为实数, L'为L之子弧, 但要求$z(s)\in L'$导致$z(s+jh)\in L$。同样定义$\omega_k(\delta,\ g,\ C(L))$, $\omega_k(\delta,\ g,\ W_p^{(l)}(L))$。对于这类连续模也有类似的不等式, 例如对$1\leqslant p\leqslant\infty$,

$$\omega k(\delta,\ g,\ L^p(L))\leqslant \text{const.}\ \|g\|_{L^p(L)},\quad (\triangle)$$

$$\omega k(\delta,g,L^p(L))\leqslant \text{const},\delta^k\left\|\frac{d^k}{ds^k}g(z(s))\right\|_{L^p(L)}.\quad (\triangle\triangle)$$

对后一不等式自然要求$\frac{d^k}{ds^k}g(z(s))\in L^p(L)$.

对C空间, $W_p^{(l)}$空间也有类似的不等式。上面这些不等式中的const。和g, δ都可是无关的。

4.2. 除在前几节有第一转化引理应用的例子外, 第二,三、六章也有这类应用的例子, 现在我们再补充一些, 其余类似的结果读者可自行列出。

为了叙述方便, 估计式的系数我们大都采用简略的$O\{\cdots\}$的形式。有些例我们还不是以最大的概括性来叙述的。

由第四章2.1节的不等式就可以得

例1. 设D为有界单连通区域, $f\in A(D)\cap C(\bar{D})$, 并有$p_n\in(P_n)^A$使得$\|f-p_n\|_{C(\bar{D})}\leqslant\varepsilon(n)$, $\varepsilon(t)\searrow 0$

$$\int^{\infty}\frac{\varepsilon(\frac{t}{u})}{U_D(\frac{1}{t})^k}\frac{dt}{t}<\infty\quad,$$

则必 $f^{(k)}(z)\in C(\overline{D})$，并且

$$\|f^{(k)}-p_n^{(k)}\|_{C(\overline{D})}\leqslant\frac{4ek!}{\lg u}\int_n^{\infty}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^k}\frac{dt}{t},$$

$$\omega_{m_0}(\delta,\ f^{(k)},\ C(\overline{D}))=O\left\{\delta^{m_0}\int_{n_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{k+m_0}}\frac{dt}{t}\right.$$

$$\left.+\int_{\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}^{\infty}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^k}\frac{dt}{t}\right\}.$$

这里$\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)$是$\frac{1}{\delta}$的任给定的函数，$n_0$为某一整数，以后我们将沿用这两符号。

根据转化原则，这两结论的论证是很简单的。首先，$\{p_n\}$对$\|\cdot\|_{C(\overline{D})}^{(k)}$为一Cauchy序列，也就是说$\{p_n^{(k)}\}$对$\|\cdot\|_{C(\overline{D})}$为一Cauchy序列。由$C(\overline{D})$的完全性，必有$-g(z)\in A(D)\cap C(\overline{D})$存在，且$\|g-p_n^{(k)}\|_{C(\overline{D})}$收敛于零.从而显然$g\equiv f^{(k)}$（例如根据第二章1.2节的引理和解析函数的唯一性定理)。至于估计式的形式则是第一转化引理已经给好了的. 关于连续模的结论直接由第一章的引理和第二章3.1节有关的不等式导出。

若$k=0$，还可导出

$$\omega_{m_0}(\delta,f,C(\overline{D}))=O\left\{\delta^{m_0}\int_{n_0}^{u\lambda(\delta^{-1})}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{m_0}}\frac{dt}{t}\right.$$

$$\left.+\varepsilon\left(\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)\right\}.$$

对多连通区域也有类似的结果。

例2. 设单连通区域 $D\in S_2(r_0,\ \theta_0)$，$f\in A(D)\cap L^p(D)$，$0<p\leqslant q\leqslant\infty$，$q\geqslant 1$，并有$p_n\in(P_n)^A$，$U_D\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant er_0$， 使得 $\|f-p_n\|_{L^p(D)}\leqslant\varepsilon(n)$，$\varepsilon(t)\searrow 0$，

$$\int^{\infty}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{\theta}}\ \frac{dt}{t}<\infty,\theta=2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right),$$

则必$f\in L^q(D)$，并且

$$\|f-p_n\|_{L^q(D)}\leqslant A\int_n^{\infty}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{\theta}}\frac{dt}{t},$$

$$A=\frac{4(e^2(p+1)(p+2))^{\frac{1}{p}}}{1gu\theta_0^{1/p}}$$

$$\omega_{m_0}(\delta,f,L^q_{(D)})=O\left\{\delta^{m_0}\int_{n_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{\theta_1}}\frac{dt}{t}\right.$$

$$\left.+\int_{\lambda(\delta^{-1})}^{\infty}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{\theta}}\quad\frac{dt}{t}\right\},\quad \theta_1=\frac{2}{p}+m_0$$

这些结论的根据主要是第四章的定理4.这时由第一转化引理知p_n对$\|\cdot\|_{L^p(D)}$是收敛的。因而在D中广义收敛于某一解析函数$g(z)$，而这函数显然和$f(z)$是几乎处处相等的.故由唯一性定理，它们应为恒等.估计式由第一转化引理（的极限形式）直接给出.

对第二个结论，只要注意不等式

$$\begin{aligned}\omega_{m_0}(\delta,\ Q,\ L^q(D))&\leqslant\text{const}\cdot\delta^{m_0}\|Q^{(m_0)}\|_{L^p(D)}\\&\leqslant\text{const}.\ \delta^{m_0}\|Q^{(m_0)}\|_{C(\bar{D})}\\&\leqslant\text{const}\cdot\ \left(\frac{\delta}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^{m_0}\ \|Q\|_{C(D)}\end{aligned}$$

$$\leqslant \text{const}\cdot\frac{\delta^{m_0}}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)^{\theta_1}}\|Q\|_{L^p(D)},$$

$Q\in(p_n)^A$，并应用第一章之转化引理即可．若$p=q\geqslant 1$，则显然还可改为

$$\omega_{m_0}(\delta,\ f,\ L^q(D))=O\left\{\int_{n_0}^{u\lambda(\delta^{-1})}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{\theta_1}}\frac{dt}{t}\right.$$

$$\left.+\varepsilon(\lambda(\delta^{-1}))\right\}.$$

同样地，对于“可积度”$\Omega(\delta,f,L^q(D))$有$\Omega(\delta,f,L^q(D))=$

$$0\left\{\delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}}\int_{n_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{\theta_2}}\frac{dt}{t}+\int_{\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}^{\infty}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{\varrho}}\frac{dt}{t}\right\},$$

这里$q'\geqslant q$是任给的（可为$+\infty$），$\theta_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q'}\right)$．而当$p=q\geqslant$ 1时，则可改为

$$\Omega(\delta,f,L^q(D))$$

$$=0\left\{\delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}}\int_{n_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}\frac{\varepsilon\left(\frac{1}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{\theta_2}}\frac{dt}{t}+\varepsilon\left(\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)\right\}.$$

对多连通区域上的有理多项式逼近也有类似的结果．

而若$D\in(\Lambda)$，则由1.5节的引理3，

$$C_q(\delta,Q,D)\leqslant\text{const}.\ \delta^{\frac{1}{q}}\|Q'\|_{L^q(D)}$$

$$\leqslant\text{const}.\ \delta^{\frac{1}{q}}\|Q'\|_{C(\overline{D})}\leqslant\text{const}.\ \delta^{\frac{1}{q}}U_D\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}\|Q\|_{C(\overline{D})}$$

$$\leqslant\text{const}.\ \delta^{\frac{1}{q}}U_D\left(\frac{1}{n}\right)^{-\left(1+\frac{2}{p}\right)}\|Q\|_{L^p(D)},\quad Q\in(P_n)^A,$$

及一般地有

$$C_q(\delta,g,D)\leqslant \text{const.}\ \|g\|_{L^q(D)},$$

故在本例题的条件下，$D\in(\Lambda)$，$1\leqslant q<\infty$，则还有

$$C_q(\delta,f,D)=0\left\{\delta^{\frac{1}{q}}\int_{n_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{1+\frac{2}{p}}}\frac{dt}{t}\right.$$

$$\left.+\int_{\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}^{\infty}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{\theta}}\frac{dt}{t}\right\}.$$

而对$p=q$，则有

$$C_q(\delta,f,D)=0\left\{\delta^{\frac{1}{q}}\int_{n_0}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{1+2/p}}\frac{dt}{t}+\varepsilon\left(\lambda\left(\frac{1}{8}\right)\right)\right\}.$$

例3. 设单连通区域$D\in S_2$为有界，$R>1,p>0$，$q\geqslant1$，$f\in A(D)\cap L^p(D)$，并有 $p_n\in(P_n)^A$ 使得$\|f-p_n\|_{L^p(D)}\leqslant\varepsilon(n)$，$\varepsilon(t)\searrow0$，

$$\int^{\infty}R^tU_D\left(\frac{1}{t}\right)^{-\left(\frac{2}{p}+K\right)}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}<\infty,$$

则f必可解析开拓于D_R^+，并且$f^{(k)}\in A(D_R^+)\cap L^q(D_k^+)$，

$$\|f^{(k)}-p_n^{(k)}\|_{L^q(D_R^+)}$$

$$=0\left\{\int_n^{\infty}R^tU_D\left(\frac{1}{t}\right)^{-\left(\frac{2}{p}+k\right)}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}\right\},$$

$$\omega_{m_0}(\delta,f^{(k)},\ L^q(D_R^+))$$

$$=0\left\{\delta_{m_0}\int_{n_0}^{\nu\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}R^tU_D\left(\frac{1}{t}\right)^{\theta}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}\right.$$

$$\left.+\int_{\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}^{\infty}k^tU_D\left(\frac{1}{t}\right)^{-\left(\frac{2}{p}+k\right)}\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}\right\},$$

$$\theta=-\left(\frac{2}{p}+k+m_0\right),$$

$$C_q(\delta, f^{(h)}, D_R^+)$$

$$= 0\left\{\delta^{\frac{1}{q}} \int_{n_0}^{u\lambda(\frac{1}{\delta})} \mathrm{R}^t U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{-(\frac{2}{p}+h+1)} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}\right.$$

$$\left.+\int_{\lambda(\frac{1}{\delta})}^{\infty} \mathrm{R}^t U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{-(\frac{2}{p}+h)} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}\right\},$$

$$\Omega(\delta, f^{(h)}, L^q(D_R^+)) = 0(\delta^{\frac{1}{q}})。$$

前两个估计式对 $q=\infty$ 时也成立，而且可把 $L^q(D_R^+)$ 改为 $C(\bar{D}_R^+)$。

这里根据的不等式是

$$\|p_n\|_{L^q(D_R^+)}^{(h)} \leqslant const. \ \mathrm{R}^n U_D\left(\frac{1}{n}\right)^{-(\frac{2}{p}+h)} \|p_n\|_{L^p(D)}$$

(参看第四章§4之9°)。由第一转化引理可知$p_n^{(h)}$在D_R^+中是广义一致收敛的。其余的论证和上例相似。

例4. 设有界单连通区域D之边界Γ为可求长Jordan曲线，$q \geqslant p$，$q \geqslant 1$，$0<p<\infty$，$\mathrm{R}>1$，$f(z) \in E_p(D)$，并有$p_n \in (P_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{\mathrm{L}^p(\Gamma)} \leqslant \varepsilon(n), \ \varepsilon(t)\searrow 0,$$

$$\int^{\infty} \mathrm{R}^t t^{\theta} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt < \infty, \ \theta = k+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1,$$

则f可解析开拓于D_R^+，$f^{(h)} \in E_q(D_R^+)$，并且

$$\|f^{(h)}-p_n^{(h)}\|_{\mathrm{L}^q(\Gamma_R)} = 0\left\{\int_n^{\infty} \mathrm{R}^t t^{\theta} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt\right\},$$

$$\omega_{m_0}(\delta, f^{(h)}, \mathrm{L}^q(\Gamma_R)) = 0\left\{\delta^{m_0} \int_{n_0}^{u\lambda(\frac{1}{\delta})} \mathrm{R}^t t^{\theta+m_0} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt\right.$$

$$\left.+\int_{\lambda(\frac{1}{\delta})}^{\infty} \mathrm{R}^t t^{\theta} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt\right\},$$

$$\Omega(\delta, f^{(h)}, \mathrm{L}^q(\Gamma_R))$$

$$= 0\left\{\delta^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q'}} \int_{n_0}^{u\lambda(\frac{1}{\delta})} \mathrm{R}^t t^{\theta_1} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)dt\right.$$

$$+\int_{\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}^{\infty} \mathrm{R}^{t} t^{\theta} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right) dt\Big\},$$

这里$q' \geqslant q$是任意给定的（可为$+\infty$），$\theta_1 = k + \frac{1}{p} - \frac{1}{q'} - 1$。

这些结论根据的不等式是

$$\|p_n\|_{L^q(\Gamma_R)}^{(h)} \leqslant C\mathrm{R}^n t^{\theta+1} \|p_n\|_{L^p(\Gamma)}.$$

对于$\mathrm{R}' < \mathrm{R}$，由第一转化引理很容易知道$p_n^{(h)}$在$\Gamma_{R'}$上是一致收敛的，因而$p_n^{(h)}$在D_R^+中广义一致收敛于某一解析函数$g(z) \in A(D_R^+)$。不难看出，在D中$g(z)$和$f^{(h)}(z)$相等，因而$g(z)$实际上是$f^{(h)}(z)$的解析开拓。另一方面，由第一转化引理可证

$$\|f^{(h)} - p_n^{(h)}\|_{L^q(\Gamma_{R'})} \leqslant c\int_n^{\infty} \mathrm{R}^t t^{\theta} \varepsilon\left(\frac{t}{u}\right) dt,$$

c和n，$\mathrm{R}' < \mathrm{R}$无关，故可知$f^{(h)} \in E_q(D_R^+)$。利用$E_q(D_R^+)$之性质，令$\mathrm{R}' \to \mathrm{R}$，即得所求的估计式。

关于连续模和"可积度"的估计式可由第一章的一般反定理直接导出。

这些结果显然可推广到多连通区域上用有理多项式来逼近的情况。

4.3. 第四章§3中得到的嵌入不等式应用于逼近度的转化是很有趣的，而推导却十分容易。因为对$e \in E$，都有$\|e\|^+ \leqslant \varphi(\|e\|^-)$，则对$f, f_n \in E$，就有$\|f - f_n\|^+ \leqslant \varphi(\|f - f_n\|^-)$。即由$\|\cdot\|^-$中$f - f_n$的误差过渡到$\|\cdot\|^+$中相应的误差估计，实质上是一种微不足道的转化。下面只举一个例子，读者还可找到更多的例子。

例5. 设D之边界为Jordan曲线Γ，$\lambda_{k;p}(D) < \infty$（参看第四章§3中定理7），$F(z) \in A(D)$在$D$中有界，则有$P_n \in (P_n)^A$使得

$$\|F - p_n\|_{L^p(D)} = 0\left\{\left[J_D\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right]^k\right\}.$$

这里$J_D(\delta)$是$\varphi_-(w)$在$|w| \geqslant 1$上的连续模（参看第四章§1和本章§1）。

实际上，我们知道$F(z)$的k次原函数$F_{(k)}(z)$的$(k-1)$次导数，$F_{(1)}(z)$是满足一级 Lipschitz 条件的。根据§1的结论可知，有$Q_n\in(P_n)^A$使得

$$\|F_{(k)}-Q_n\|_{C(\bar{D})}=0\left\{J_D^k\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right\}.$$

令$p_n=Q_{n+k}^{(k)}$，则有

$$\|F-p_n\|_{L^p(D)}=0\left\{J_D^k\left(\frac{\lg(n+k)}{n+k}\right)\right\}$$

$$=0\left\{J_D^k\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right\}$$

（参看第四章定理7）。

从这个例子我们可以看到，取k相当大时，$\|F-p_n\|_{L^p(D)}$将会有很好收敛于零的级。但这时p必然要因k之增大而减小。实际上，在我们的例中p总是小于1的，这一点就使得命题的意义变小了。

一般说，当Γ为可求长时，$p<\frac{1}{2k}$，当Γ为凸曲线或为光滑时，只要$p<\frac{1}{k}$即可。

当Γ为光滑时，对给定有界的$F(z)\in A(D)$和正整数k，则有$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|F-p_n\|_{L^p(D)}=0\left\{\frac{1}{n^{k-\varepsilon}}\right\},\ \varepsilon>0,\ p<\frac{1}{k}.$$

4.4. 补充一个由 Faber 级数理论得出的有趣的嵌入定理，有关的符号和性质参看第六章§4。

例6. 设单连通区域D之边界$\Gamma\in(\Lambda)$，$f^{(h)}(z)\in E_p(D)$，$f^{(h)}(\varphi_-)\in e_p^{(l)}$，$1<p<\infty$，并且对$q\geqslant p$，

$$\int^{\infty}t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1}e_p^{(l)}\left(\frac{1}{t},\ f^{(h)}(\varphi_-)\right)dt<\infty,$$

则$f^{(h+l)}(z)\in E_q(D)$，并且

$$
\begin{aligned}
&\omega_{m_1}(\delta, f^{(k+l)}, L^q(\Gamma)) \\
&= 0\left\{\delta^{m'} \int_{a_1}^{u\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)} t^{\theta_1} e_p^{(l)}(t, f^{(k)}(\varphi_-))\, dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{\lambda\left(\frac{1}{\delta}\right)}^{\infty} t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} e_p^{(l)}\left(\frac{1}{t}, f^{(k)}(\varphi_-)\right) dt \right\}, \\
&\theta_1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - 1 + m.
\end{aligned}
$$

实际上，由第六章4.4节定理8'的系2可知，存在 $p_n \in (P_n)^A$，使得

$$\|f - p_n\|_{L^p(\Gamma)} = 0\left\{\frac{1}{n^{k+l}} e_p^{(l)}\left(\frac{1}{n}, f^{(k)}(\varphi_-)\right)\right\},$$

利用第一转化引理即得所求的结论。

对多连通区域也有类似的结果。利用第六章的结果还可考虑对 $\Gamma \in L(r,s)$（参看第六章§4)相应的嵌入定理。

参 考 文 献

[1] J.L. Walsh, Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, 1935.

[2] 申又枨, On Interpolation and Approximation by Rational Functions with Preassigned Poles, Journal of the Chinese Mathematical Society. Vol. 1(1936), 154—173

[3] 吴学谋，复函数逼近的一些研究(I)(II)，武汉建材学院学报，3,4 (1980)

[4] С.Н. Мергелмн, О Скорости Приближения функции многчпенами На проuzВолbнblх контиуумах, ДАН. 91(1953), 1271—1274.

[5] С.Н.Мергелян, РаВНомерное лрибличжение функций kомплексного леременного, УМН, 7:2.(48)(1952), 31—122.

[6] С.Н.Мергелян, О Некоторblх основнblх Волросах теории Наилуших лрибличжений функций kомплексного лере-Меного, ДАН, 79(1951), 731—734.

[7] C.H.Мергелян, Hekoтopble Bолpocbl kонструктивной теории функциu, ТруДbl Матем. ин-та. uм. B.A. Стеклова. xxxvll(1951).

[8] 吴学谋，关于等角写像的边界性质，数学学报，7: 2(1957), 271—276.

[9] C. Я. Алbпер, O равномернblx приближениях Функций комлексного переменного B Замкнутой областu, Цзв. AHCCCP. Серия Матем. 19(1955), 423—444.

[10] M.B. Келдыш, Sur l'approximation en moyenne quadratique des fonctions analytiques, Матем. сб. 5(47), 2, (1939), 391—402.

[11] 吴学谋，关于Bieberbach 多项式，数学学报，13: 2(1963), 145—151.

[12] Г.M. 戈鲁辛，复变函数的几何理论，陈建功译，科学出版社，(1956).

[13] J.L.Walsh, Note on Approximation by Bounded Analytic Function, Proc. Nat. Acad. Soc. U.S.A., 37(1951), 821—826.

[14] 吴学谋，解析函数的一些边界性质与嵌入不等式(I)(II)，华中工学院学报，3,4(1980)

[15] 吴学谋，Faber级数的误差转化分析，科学通报，9(1981).

[16] 吴学谋，光滑区域中解析函数用多项式来逼近的线性中值误差，函数论研究报告，1(1957).

第 六 章

Faber 级 数

§1. 基本引理

1.1. 设区域 D 之边界 Γ 为可求长 Jordan 曲线：$z=z(s)$，$0\leqslant s\leqslant l$，s 为 Γ 的弧长参数。函数 $\varphi_-(W)$ 等角映射 $|w|>1$ 为 $\bar{D}$ 的补集 D_∞^*，并且

$$\lim_{W\to\infty}\frac{\varphi_-(W)}{W}=a>0.$$

这时在 $|W|>1$ 中有展开式

$$\frac{\varphi_-'(W)}{\varphi_-(W)-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F_n(z)}{W^{n+1}},\qquad z\in D,$$

这里 $F_n(z)\in(p_n)^A$ 叫做(对于 D 的)n 次Faber多项式(参看[2])，并且有

$$F_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|W|=R}\frac{\varphi_-'(W)W^n}{\varphi_-(W)-z}dW,\ R>1,\ z\in D.$$

所以立刻可得

$$F_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\psi_-(\xi)]^n}{\xi-z}d\xi,\ z\in D,\ n=0,1,\cdots,$$

$\psi_-(z)$为 $\varphi_-(W)$的反函数。

利用广义 Cauchy 定理(参看[3])容易推得

$$\int_{\Gamma_R}\frac{[\psi_-(\xi)]^n}{\xi-z}d\xi=\int_{\Gamma}\frac{[\psi_-(\xi)]^n}{\xi-z}d\xi.$$

因此得到

引理. 设 Γ 为可求长 Jordan 曲线，则对 n 次 Faber 多项式有

$$F_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\psi_-(\xi)]^n}{\xi-z}d\xi,\quad z\in D,\quad n=0,1,$$

$\cdots$. □

1.2. 由于 Γ 是可求长的 Jordan 曲线，故不难知道 $\psi_-'(\xi)$ 在 Γ 上几乎处处存在，并且可使存在的点上 $\psi_-(\xi)$ 的线性导数和 $\psi_-'(\xi)$ 的角极值相等(参看[3])，因此不难看到积分

$$\int_{\Gamma}\frac{[\psi_-(\xi)]^k-[\psi_-(z)]^k}{\xi-z}d\xi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

对几乎处处的 $z\in\Gamma$ 存在.

利用上节的引理和 Привалов 关于 Cauchy型积分的理论(参看[4]或[3])，根据多项式 $F_n(z)$ 的连续性知道，对几乎处处的 $z\in\Gamma$ 有

$$F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\psi_-(\xi)]^k-[\psi_-(z)]^k}{\xi-z}d\xi+[\psi_-(z)]^k,\quad (1)$$

$$k=0,1,2,\cdots.$$

另一方面 $\lim\limits_{W\to\infty}\varphi_-(w)/w=a>0$，故有

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{[\psi_-(\xi)]^{-k}}{\xi-z}d\xi=0,\quad k=1,2,\cdots;z\in D_\infty^*.$$

因此，这时对于区域 D_∞^* 有下面的 Cauchy 公式

$$[\psi_-(z)]^{-k}=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\psi_-(\xi)]^{-k}}{\xi-z}d\xi,\quad k=1,2,\cdots;\ z\in D_\infty^*.$$

同样利用 Привалов 的理论可得到，对几乎处处的 $z\in\Gamma$ 有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\psi_-(\xi)]^{-k}-[\psi_-(z)]^{-k}}{\xi-z}d\xi+[\psi_-(z)]^{-k}=0,\quad (2)$$

$$k=1,2,\cdots.$$

设解析函数 $f(z)\in E_1(D)$，故在 Γ 上几乎处处存在角极值 $f(z)$，$\xi\in\Gamma$，并且 $f(z)$ 在 Γ 上可积和 Cauchy 公式成立：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi,\quad z\in D.$$

根据 Прлвалов 的结论知，对 $z\in\Gamma$，奇异积分

$$V.P.\ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

几乎处处存在，因而根据他的理论，积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}d\xi$$

对几乎处处的 $z\in\Gamma$ 存在并且等于零．因此

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}d\xi+f(z)\tag{3}$$

对几乎处处的 $z\in\Gamma$ 成立。

设 $\{\lambda_k^{(n)}\}$，$n=0,1,2,\cdots$；$k=0,\pm1,\cdots,\pm n$，为任意给定的（相互可无关的）数序列。

以 $\lambda_k^{(n)}$，$k=0,1,\cdots,n$，乘(1)式，$\lambda_{-k}^{(n)}$乘(2)式，而后对 k 由0加到 n，并用(3)式减去所得的和式，我们就得到

定理1． 设 Γ 为 Jordan 可求长曲线，$\{\lambda_k^{(n)}\}$，$n=0,1,\cdots$；$k=0,\pm1,\cdots,\pm n$ 为任何给定的数序列．设 $f(z)\in E_1(D)$，则对几乎处处的 $z\in\Gamma$，积分

$$\int_\Gamma\frac{R_n(\xi)-R_n(z)}{\xi-z}d\xi,\quad V.P.\int_\Gamma\frac{R_n(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

存在，并且

$$\begin{aligned}f(z)-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}F_k(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{R_n(\xi)-R_n(z)}{\xi-z}d\xi\\&\quad+R_n(z)\\&=\frac{V.P.}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{R_n(\xi)}{\xi-z}d\xi+\frac{1}{2}R_n(z),\end{aligned}$$

这里 $R_n(z)=f(z)-\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k^{(n)}[\psi_-(z)]^k$．□

定理1*. 设Γ和$\{\lambda_k^{(n)}\}$如上定理所述，则对几乎处处的$z\in\Gamma$有

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}F_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{Q_n(\xi)-Q_n(z)}{\xi-z}d\xi+Q_n(z)$$

$$=\frac{V.P.}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{Q_n(\xi)}{\xi-z}d\xi+\frac{1}{2}Q_n(z),$$

这里 $Q_n(z)=\sum_{k=-n}^{n}\lambda_k^{(n)}[\psi_-(z)]^k$. □

§2. 一般情况下的结果

2.1. 我们现在来讨论 Faber 级数在很一般的范数的意义下收敛性的问题.

设在Γ上几乎处处确定的可测函数以范数$\|\cdot\|_F$建立一种空间F：对于任何Γ上可测的函数$g(z)$，有一数$\|g(z)\|_F=\||g(z)|\|_F\geq 0$与之对应(这数在必要时我们容许取无穷大值).

若下面的 Minkowski 型不等式成立：

$(M)^*$： $$\left\|\int_L h(t)G(z,t)dt\right\|_F\leq\eta(F)\int_L|h(t)|\,\|G(z,t)\|_F|dt|,$$

这里$h(t)$为$t\in L$的可测函数，L为任何区间(a,b)，$G(z,t)$对$z\in\Gamma$可测，$\eta(F)$为空间常数，则这时称$F\in(M)^*$，或者$\|\cdot\|_F\in(M)^*$.

例如范数 $\|g(z)\|_F$ 取

$$\operatorname*{ess.u.b}_{z\in\Gamma}|g(z)|=\lim_{p\to\infty}\|g(z)\|_{L^p(\Gamma)},$$

或者取 $\left\{\int_\Gamma h(z)|g(z)|^p|dz|\right\}^{\frac{1}{p}}$，$p\geq 1$，$h(z)\geq 0$可积，

并定义都满足不等式$(M)^*$.

陈建功教授在[5]中指出，取

$\|g(z)\|=\Phi^{-1}\left\{\int_\Gamma h(z)\Phi(|g(z)|)|dz|\right\}$，$h\geq 0$可积，只要下面条件成立，则$\|\cdot\|\in(M)^*$.

$\Phi(t)$在$t>0$是凸的函数，$\Phi(+0)=0$，并且$\Phi'(t)>0$，$\Phi''(t)>0$，$\left(\frac{\Phi'(t)}{\Phi''(t)}\right)'\geqslant 0$，$\left(\frac{\Phi'(t)}{\Phi''(t)}\right)''\leqslant 0$，$\left(\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\right)'\leqslant 0$.

对于这些范数，$\eta(F)=1$。为了讨论方便，我们以后只讨论这种情况下的范数。

不等式$(M)^*$中实际上包括了

$$\|\sum c_i g_i(z)\|_F\leqslant\sum|c_i|\,\|g_i(z)\|_F.$$

若$\|\cdot\|\in(M)^*$，则在定理1的条件下，显然有

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}F_k\right\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left\|\frac{R_n(\xi)-R_n(z)}{\xi-z}\right\||d\xi|$$
$$+\|R_n(z)\|;$$

同样，在定理1*的条件下有

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}F_k(z)\right\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left\|\frac{Q_n(\xi)-Q_n(z)}{\xi-z}\right\||d\xi|$$
$$+\|Q_n(z)\|.$$

为了得到更明确的估计，我们需要对函数$f(z)$和曲线Γ作一些规定。

定义. $\omega(\delta,g,F)=\sup\limits_{|h|<\delta}\|g(z(s+h))-g(z(s))\|_F$,

对于这样一般的连续模我们不能保证它们是连续的，至于它是非降的则很显然。

设对Γ存在着这样的函数$d_\Gamma(x)$：它在$\left[0,\frac{l}{2}\right]$上为非降，对$\frac{l}{2}$为对称，以$l$为周期，$d_\Gamma(0)=0$，$d_\Gamma(x)\neq 0$，$0<x\leqslant\frac{l}{2}$，并且

$$|z(s)-z(t)|\geqslant d_\Gamma(|s-t|),\ |s-t|\leqslant\frac{l}{2}.$$

这时若$\|\cdot\|=\|\cdot\|_F\in(M)^*$，则

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{R_n(\xi)-R_n(z)}{\xi-z}d\xi\right\|\leqslant\left\|\frac{1}{2\pi}\left(\int_{|t|<\epsilon}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_{|t|>\epsilon}\frac{|R_n(z(s+t))-R_n(z(s))|}{d_\Gamma(|t|)}|dt|\right)\right\|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq \varepsilon} \frac{\|R_n(z(s+t))-R_n(z(s))\|}{d_\Gamma(|t|)}dt$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\varepsilon} \frac{2E(n)}{d_\Gamma(|t|)}dt$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon \frac{\omega(t)}{d_\Gamma(t)}dt+\frac{2E(n)}{\pi}\int_\varepsilon^{\frac{l}{2}}\frac{dt}{d_\Gamma(t)},$$

这里 $\omega(t)=\omega(t,R_n,F)$，$\varepsilon>0$ 为给定的充分小的数，$E(n)=\sup\limits_{0<t<l}\|R_n(z(s+t))\|$。

因此由定理 1 可得

定理2. 在定理 1 的条件下，设 $\|\cdot\|=\|\cdot\|_F\in(M)^*$，则有

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}F_k\right\|\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon \frac{\omega(t,R_n,F)}{d_\Gamma(t)}dt$$

$$+\left(1+\frac{2}{\pi}\int_\varepsilon^{\frac{l}{2}}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\right)E(n),$$

$$E(n)=\sup_{0<t<l}\|R_n(z(s+t))\|,\ \varepsilon>0。\ \square$$

同样由定理1*可得

定理2*. 在定理1*的条件下，若 $\|\cdot\|=\|\cdot\|_F\in(M)^*$，则有

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}F_k\right\|\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon \frac{\omega(t,Q_n,F)}{d_\Gamma(t)}dt+$$

$$+\left(1+\frac{2}{\pi}\int_\varepsilon^{\frac{l}{2}}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\right)E^*(n),$$

$$E^*(n)=\sup_{0<t<l}\|Q_n(z(s+t))\|。\ \square$$

由于 $|\Psi_-(z)|=1$，$z\in\Gamma$，所以可证

$$\omega(\delta,\ \Psi_-^k,\ F)\leqslant |k|\omega(\delta,\ \Psi_-,\ F)。$$

因此有

$$\omega(\delta,\ R_n,\ F)\leqslant \omega(\delta,\ f,\ F)+\omega(\delta,\ \Psi_-,\ F)$$

$$\sum_{k=-n}^{n}|k\lambda_k^{(n)}|,$$

$$\omega(\delta, Q_n, F) \leqslant \omega(\delta, \Psi_-, F) \sum_{k=-n}^{n} |k\lambda_k^{(n)}|.$$

由此可得

定理3. 在定理2的条件下，

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} F_k \right\| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(t, f, F)}{d_r(t)} dt + \frac{1}{\pi} \Big(\sum_{k=-n}^{n} |k\lambda_k^{(n)}| \Big)$$

$$\times \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(t, \Psi_-, F)}{d_\Gamma(t)} dt + \Big(1 + \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{l}{2}} \frac{dt}{d_\Gamma(t)}\Big) E(n). \quad \square$$

定理3*. 在定理2*的条件下，

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} F_k \right\| \leqslant \frac{1}{\pi} \Big(\sum_{k=-n}^{n} |k\lambda_k^{(n)}| \Big) \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(t, \psi_-, F)}{d_\Gamma(t)} dt$$

$$+ \Big(1 + \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon}^{\frac{l}{2}} \frac{dt}{d_\Gamma(t)}\Big) E^*(n) \quad \square$$

特别当$\lambda_k^{(n)}$有界，$\dfrac{t}{d_\Gamma(t)} = 0(1)$时，在定理2的条件下，

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} F_k \right\| = 0\Big\{ \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(t, f, F)}{t} dt +$$

$$+ n^2 \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(t, \Psi_-, F)}{t} dt + E(n) \lg \frac{1}{\varepsilon} \Big\};$$

在定理2*的条件下，

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} F_k \right\| = 0\Big\{ n^2 \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega(t, \Psi_-, F)}{t} dt + E^*(n) \lg \frac{1}{\varepsilon} \Big\}.$$

2.2. 假若奇异积分

$$F(z) = \frac{V.P.}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(t)}{t - z} dt$$

确定一在Γ上可测的函数，并且对范数$\|\cdot\|_{F_\pm}$有

$$\|F(z)\|_{F_+} \leqslant C \|g(z)\|_{F_-}, \quad C = C(F_+, F_-),$$

C和$g(z)$无关，则称$\Gamma \in M(F_+, F_-)$。这是M.Riesz不等式的形式。当 Γ 为充分光滑时，例如满足 ЛяпуHов 条件（Λ）时，$\Gamma \in M(L^p(\Gamma), L^p(\Gamma))$，$1<p<\infty$(参看[6])。

因此，若$F_+ \in (M)^*$，$\Gamma \in M(F_+, F_-)$，在定理1的条件下，

$$\left\| f-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}F_k \right\|_{F+} \leqslant C(F_+, F_-)\|R_n\|_{F-}+\frac{1}{2}\|R_n\|_{F+};$$

在定理1*的条件下，

$$\left\| \sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}F_k \right\|_{F+} \leqslant C(F_+, F_-)\|Q_n\|_{F-}+\frac{1}{2}\|Q_n\|_{F+}.$$

§3. 一致逼近

3.1. 设$f(z)\in E_1(D)$，令

$$a_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\frac{f[\varphi_-(w)]}{w^{k+1}}dw,$$

$$k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots.$$

则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(f)F_k(z)$称为$f(z)$在$D$上之Faber（级数）展式。这时 $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}a_k(f)e^{ik\theta}$恰恰是$f[\varphi_-(e^{i\theta})]$的Fourier展式。

记 $$\sigma_n(f)=\sigma_n(z,f)=\sum_{k=0}^{n}a_k(f)F_n(z).$$

设$\{C_k^{(n)}\}$，$n=0, 1, \cdots$；$k=0, \pm 1, \cdots, \pm n$，为给定的求和系数，令$\lambda_k^{(n)}=C_k^{(n)}a_k(f)$，则由定理3可得

定理4. 设$f(z)\in A(D)\cap C(\bar{D})$，则

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}a_k(f)F_k\right\|_{C(\bar{D})} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda(n)}\frac{\omega(t,f,C(\bar{D}))}{d_\Gamma(t)}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\Big(\sum_{k=-n}^{n}|kC_k^{(n)}a_k(f)|\Big)\int_0^{\lambda(n)}\frac{I_D(t)}{d_\Gamma(t)}dt+$$

$$+\left(1+\frac{2}{\pi}\int_{\lambda(n)}^{l/2}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\right)\Big\| f[\varphi_-(e^{it})]$$

$$-\sum_{k=-n}^{n} C_k^{(n)} a_k(f) e^{ikt}\Big\|_{C(0,2\pi)};$$

这里$I_D(\delta)=\omega(\delta,\ \Psi_-,\ C(\bar{D}_\infty^*))$，是$\Psi_-$在$\bar{D}_\infty^*$上的（一级）连续模，$\lambda(n)$，$0<\lambda(n)\leqslant\frac{l}{2}$，是任给的$n$的函数（在本章中我们将沿用这一符号的意义）。□

由定理4，圆周上Fourier 级数的结果大都可化成一般区域上的形式。对$\Gamma\in$P.S.(α,β)，$\Gamma\in$P.L(α,β)，$I_D(t)$的估计是已知的（参看第四章），$\frac{t}{d_\Gamma(t)}=0(1)$，所以读者可列出定理 4 一系列具体的形式。

3.2. 利用定理3*可以得到

引理. 在定理4的条件下，

$$\|\sigma_n(z,f)\|_{C(\bar{D})}\leqslant C(n)\|f(z)\|_{C(\bar{D})},$$

$$C(n)\leqslant\frac{n}{\pi}(n+1)\int_0^{\lambda(n)}\frac{I_D(t)}{d_\Gamma(t)}dt+$$

$$+\left(1+\frac{2}{\pi}\int_{\lambda(n)}^{l/2}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\right)(2+\lg n).\ \square$$

由三角级数Lebesque函数的估计知道：

$$E^*(n)\leqslant(2+\lg n)\|f[\varphi_-(e_i^\theta)]\|_{C(0,2\pi)}.$$

由这一引理和第三转化引理立刻可得到

定理5. 在定理 4 的条件下，若存在 $p_n\in(P_n)_A$ 使得 $\|f-p_n\|_{C(\bar{D})}\leqslant\varepsilon(n)$，则

$$\|f(z)-\sigma_n(z,f)\|_{C(\bar{D})}\leqslant(C(n)+1)\varepsilon(n).\ \square$$

这里在应用第三转化引理时，注意$\sigma_n(z,p_n)=p_n$。

因此由一致逼近之结果（参看第五章），有

定理6. 设$f(z)\in A(D)$，$f^{(k)}(z)\in C(\bar{D})$，$f^{(k)}(z)$在 $\bar{D}$上之连续模为$\omega_{(k)}(\delta)$，则有

$$\|f-\sigma_n(z)\|_{C(\overline{D})}=0\left\{\left[J_D\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right]^k\omega_{(k)}\left(J_D\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[n^2\int_0^{\lambda(n)}\frac{I_D(t)}{d_\Gamma(t)}dt+(\lg n)\int_{\lambda(n)}^{1/2}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\right]\right\},$$

这里$J_D(\delta)=\omega(\delta,\ \varphi_-,\ C(|w|\geqslant 1))$是$\varphi_-$在$|w|\geqslant 1$上的连续模。

□

系1.在上定理的条件下，若$\Gamma\in$ P.L.(α,β)，α，$\beta>0$，则

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{C(\overline{D})}=0\left\{(\lg n)^2\left(\frac{\lg n}{n}\right)^{k\beta}\omega_{(k)}\left(\left(\frac{\lg n}{n}\right)^{\beta}\right)\right\};$$

若 $\Gamma\in$ P.S.(α,β)，α，$\beta>0$，则

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{C(\overline{D})}=0\left\{\frac{1}{n^{k\beta-\varepsilon}}\omega_{(k)}\left(\frac{1}{n^{\beta-\varepsilon}}\right)\right\},\ \varepsilon>0.$$ □

后一结论是属于Апълер和Цванов的(参见[7])。

系2. 在定理6的条件下，若$k=0$，$\Gamma\in$ P.S. $(\alpha,\ \beta)$，α，$\beta>0$,则

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{C(\overline{D})}=0\left\{\omega_{(0)}\left(\frac{1}{n^{\beta-\varepsilon}}\right)(\lg n)^2\right\}.$$

因而若 $\lim\limits_{t\to 0}\omega_{(0)}(t)(\lg t)^2=0$,则$\sigma_n(f)$在$\overline{D}$上一致收敛于$f(z)$。

□

利用第四章2.1节的不等式和第一转化引理可得

系3. 在定理5的条件下，若

$[C(n)+1]\varepsilon(n)\leqslant A(n)$，$A(t)\searrow 0$,

$\int^{\infty}U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{-r}A\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}<\infty$,

则 $f^{(r)}(z)\in C(\overline{D})$，并且

$$\|f^{(r)}-\sigma_n^{(r)}(f)\|_{C(\overline{D})}\leqslant\frac{4er!}{\lg u}\int_n^{\infty}U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{-r}A\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}.$$

□

这定理的一个特例是

系4. 在定理6的条件下，若

$$\int^{\infty} U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{-r} B\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}<\infty,$$

$$B(t)=\left[t^2\int_0^{\lambda(t)}\frac{I_D(x)}{d_\Gamma(x)}dx+(\lg t)\int_{\lambda(t)}^{\frac{t}{2}}\frac{dx}{d_\Gamma(x)}\right]$$

$$\times\left[J_D\left(\frac{\lg t}{t}\right)\right]^k\times\omega_{(k)}\left(J_D\left(\frac{\log t}{t}\right)\right),$$

则 $f^{(r)}(z)\in C(\bar{D})$，并且

$$\|f^{(r)}(z)-\sigma_n^{(r)}(f)\|_{C(\bar{D})}=0\left\{\int_n^{\infty}U_D\left(\frac{1}{t}\right)^{-r}B\left(\frac{t}{u}\right)\frac{dt}{t}\right\}.$$

特别当$\Gamma\in$ P.S.(α,β)，$\alpha,\beta>0$时，则有

$$\sup_{z\in D}|f^{(r)}(z)-\sigma_n^{(r)}(z,f)|=0\left\{\int_n^{\infty}t^{q+\varepsilon}\omega_{(k)}(t^{-\beta+\varepsilon})dt\right\},$$

$$q=(2-\alpha)r-k\beta-1,\ \beta>0。\ \square$$

例如当 $f^{(k)}\in \mathrm{Lip}(\eta)$，$(2-\alpha)r-(k+\eta-1)\beta-1<0$时$\sigma_n^{(r)}(f)$在$\bar{D}$上一致收敛于$f^{(r)}(z)$。

而当$\Gamma\in$ P.L.(α,β)，α，$\beta>0$时，

$$\sup_{z\in D}|f^{(r)}(z)-\sigma_n^{(r)}(z,f)|$$

$$=0\left\{\int_n^{\infty}\frac{(\lg t)^{2+k\beta}}{t^{k\beta-(2-\alpha)r+1}}\omega_{(k)}\left(\left(\frac{\lg t}{t}\right)^{\beta}\right)dt\right\}.$$

利用第四章结果导出的其他不等式和第一转化引理，则还可得一系列在各种范数意义下的误差估计，这里从略。

§4. 中 值 逼 近

4.1. 定理3在中值的情况下的形式是

定理7. 设$f(z)\in E_p(D)$，$p\geqslant1$，则

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}a_k(f)F_k\right\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda(n)}\frac{\omega(t,f,L^p(\Gamma))}{d_\Gamma(t)}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n}|kC_k^{(n)}a_k(f)|\right)\int_0^{\lambda(n)}\frac{\omega(t,\Psi_-,L^p(\Gamma))}{d_\Gamma(t)}dt+$$

$$+\left\|\left(f[\varphi_-(e^{i\theta})]-\sum_{k=-n}^{n}C_k^{(n)}a_k(f)e^{ik\theta}\right)\varphi_-'(e^{i\theta})^{\frac{1}{p}}\right\|_{L^p(0,2\pi)}$$

$$\times\left(1+\frac{2}{\pi}\int_{\lambda(n)}^{\frac{l}{2}}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\right).\ \square$$

因为 $\int_\Gamma|\Psi_-'(z)||dz|=2\pi$，故$\omega(\delta,\ \Psi_-,\ L(\Gamma))\leqslant 2\pi\delta$，因而

$$\omega(\delta,\ \Psi_-,\ L^p(\Gamma))\leqslant H_p\delta^{\frac{1}{p}},\ p\geqslant 1.$$

当$p>1$时 $H_p\leqslant(2\pi l)^{\frac{1}{p}+1}l^{-2}(2p+1)$，(参看[8])。

所以有下面的推论：

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k^{(n)}a_k(f)F_k\right\|_{L^p(\Gamma)}$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda(n)}\frac{\omega(t,\ f,\ L^p(\Gamma))}{d_\Gamma(t)}dt$$

$$+\frac{H_p}{\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n}|kc_k^{(n)}a_k(f)|\right)\int_0^{\lambda(n)}\frac{t^{1/p}}{d_\Gamma(t)}dt$$

$$+\|(f[\varphi_-(e^{i\theta})]-$$

$$\sum_{k=-n}^{n}c_k^n a_k(f)e^{ik\theta})\ \varphi_-'(e^{i\theta})^{\frac{1}{p}}\|_{L^p(0,\ 2\pi)}$$

$$\times\left(1+\frac{2}{\pi}\int_{\lambda(n)}^{l/2}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\right).$$

定义． 若$\varphi_-'\in L^r(0,\ 2\pi)$，$\psi_-'\in L^s(\Gamma)$，$r,\ s\geqslant 1$，则称$\Gamma\in L(r,\ s)$。$\square$

若$\Gamma\in L(r,\ s)$，则有

$$\omega(\delta,\ \psi_-,\ L^p(\Gamma))=O(\delta^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{p_0}}),\ p_0=\max(s,\ p).$$

容易看到：$\mathrm{P.L.}(\alpha,\ \beta)\subset L\left(\frac{1}{1-\beta},\ \frac{2-\alpha}{1-\alpha}\right)$；　$\mathrm{P.S.}(\alpha,\ \beta)\subset L(r,\ s)$，$1<r<\frac{1}{1-\beta}$，$1<s<\frac{2-\alpha}{1-\alpha}$.

定理7的推论考虑的情况是 $\Gamma\in L(1,\ 1)$。

容易证明不等式

$$\|(\sum_{k=-n}^{n} a_k(f)e^{ik\theta})\varphi'_-(e^{i\theta})^{\frac{1}{p}}\|_{L^p(0,2\pi)}$$

$$\leqslant(2+\lg n)\|f[\varphi_-(e^{i\theta})]\varphi'_-(e^{i\theta})^{\frac{1}{p}}\|_{L^p(0,2\pi)} .$$

所以由第三转化引理有

系1. 设$\Gamma\in L(1,1)$，并有$T_n(e^{i\theta})\in(T_n)$使得

$$\|(f[\varphi_-(e^{i\theta})]-T_n(e^{i\theta}))\varphi'_-(e^{i\theta})^{\frac{1}{p}}\|_{L^p(0,2\pi)}\leqslant\varepsilon(n).$$

则有
$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda(n)}\frac{\omega(t,f,L^p(\Gamma))}{d_\Gamma(t)}dt$$

$$+\frac{H_p}{\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n}|ka_k(f)|\right)\int_0^{\lambda(n)}\frac{t^{1/p}}{d_\Gamma(t)}dt$$

$$+\left(1+\frac{2}{\pi}\int_{\lambda(n)}^{1/2}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\right)(3+\log n)\varepsilon(n)$$

$$=O\left\{\int_0^{\lambda(n)}\frac{\omega(t,f,L^p(\Gamma))+n^2t^{\frac{1}{p}}}{d_\Gamma(t)}dt+\left[(\lg n)\int_{\lambda(n)}^{1/2}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\right]\varepsilon(n)\right\}.$$

特别当 $\omega(t,f,L^p(\Gamma))=0(t^\eta)$，$0<\eta\leqslant1,\frac{t}{d_\Gamma(t)}=O(1)$ 时，

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\{\varepsilon(n)(\lg n)^2\}. \square$$

利用Hölder不等式和第三转化引理可以得到

系2. 设$\Gamma\in L(r,s)$，$r,s\geqslant1$，$f\in E_p(D)$，$f[\varphi_-(e^{i\theta})]\in L^{ph}(0,2\pi)$，$\frac{1}{r}+\frac{1}{h}=1$，并有 $T_n(e^{i\theta})\in(T_n)$ 使得

$$\|f[\varphi_-(e^{i\theta})]-T_n(e^{i\theta})\|_{L^{ph}(0,2\pi)}\leqslant\varepsilon(n),$$

则有
$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\int_0^{\lambda(n)}[\omega(t,f,L^p(\Gamma))+n^2t^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{p_1}}]\frac{dt}{d_\Gamma(t)}+\left(\int_{\lambda(n)}^{1/2}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\right)\varepsilon(n)\right\},$$

这里 $p_0=\max\{s,\ p\}$. □

定义. 设$g(\theta)$在$[0,2\pi]$有上定义，并且$\frac{d^h}{d\theta^h}g\in L^p(0,2\pi)$，

则记$g\in e_p^{(h)}$，并定义

$$e_p^{(h)}(\delta,\ g)=\omega\left(\delta,\ \frac{d^h g}{d\theta^h},\ L^p(0,\ 2\pi)\right).\ \square$$

若$f\in e_{ph}^{(h)}$，即$f[\varphi_-(e^{i\theta})]\in e_{ph}^{(h)}$，这时上面的

$$\varepsilon(n)=O\left\{\frac{1}{n^h}e_{ph}^{(h)}\left(\frac{1}{n},\ f[\varphi_-]\right)\right\}.$$

因此有

系3. 在系2的条件下，若$f\in e_{ph}^{(h)}\cap E_p(D)$，则有

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\int_0^{\lambda(n)}\frac{\omega(t,\ f,\ L^p(\Gamma))}{d_\Gamma(t)}dt\right.$$

$$+n^2\int_0^{\lambda(n)}\frac{t^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{p_0}}}{d_\Gamma(t)}dt$$

$$\left.+\frac{1}{n^h}\left(\int_{\lambda(n)}^{1/2}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\right)e_{ph}^{(h)}\left(\frac{1}{n},\ f[\varphi_-]\right)\right\}.$$

特别当$\omega(\delta,\ f,\ L^p(\Gamma))=O(\delta^\eta)$，$0<\eta\leqslant1$，$\frac{t}{d_\Gamma(t)}=O(1)$时，则有直接定理：

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{\lg n}{n^h}e_{ph}^{(h)}\left(\frac{1}{n},\ f[\varphi_-]\right)\right\}.\ \square$$

4.2. 我们现在利用上节的结果来求中值逼近的另外一些直接定理.

引理1. 设$\Gamma\in L(r,\ 1)$，$1\leqslant r\leqslant\infty$，$f^{(h)}\in L^p(\Gamma)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则

$$\omega(\delta,\ f^{(h-1)}(\varphi_-),\ L^p(0,\ 2\pi))\leqslant C\delta^\eta\|f^{(h)}\|_{L^p(\Gamma)},$$

$$C\leqslant\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi_-'(e^{i\theta})|^r d\theta\right\}^{\frac{p-1}{rp}},\ \eta=1-\frac{1}{r}+\frac{1}{rp}.\ \square$$

证明. 因为对$|h|\leqslant\delta$有

$$I_1=|f^{(k-1)}[\varphi_-(e^{i(\theta+h)})]-f^{(k-1)}[\varphi_-(e^{i\theta})]|$$

$$\leqslant\int_0^h|f^{(k)}[\varphi_-(e^{i(t+\theta)})]||\varphi_-'(e^{i(t+\theta)})|dt$$

$$\leqslant\left\{\int_0^h|f^{(k)}[\varphi_-(e^{i(t+\theta)})]|^{\frac{1}{\eta}}|\varphi_-'(e^{i(t+\theta)})|^{\frac{1}{\eta p}}dt\right\}^\eta$$

$$\times\left\{\int_0^h|\varphi_-'(e^{i(\theta+t)})|^r dt\right\}^{\frac{p-1}{rp}}.$$

令 $$C_1=\left\{\int_0^{2\pi}|\varphi_-'|^r d\theta\right\}^{\frac{p-1}{rp-p+1}},$$

则 $$\|(I_1)^{\frac{1}{\eta}}\|_{L^{\eta p}(0,2\pi)}\leqslant C_1\int_0^h\left\||f^{(k)}[\varphi_-(e^{i(\theta+t)})]|^{\frac{1}{\eta}}\right.$$

$$\left.\times|\varphi_-'(e^{i(\theta+t)})|^{\frac{1}{\eta p}}\right\|_{L^{\eta p}(0,2\pi)}dt\leqslant C_1h\|f^{(k)}\|^\eta_{L^p(0,2\pi)}.$$

由此引理得证.

由 Hardy–Littlewood 的一个定理（参看[8]）可得

引理2. 设$\Gamma\in L(r,1)$，$1\leqslant r\leqslant\infty$，$f^{(k)}\in L^p(\Gamma)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则

$$\omega(\delta,\ f^{(k-1)}(\varphi_-),\ L^q(0,2\pi))\leqslant C\|f^{(k)}\|_{L^q(\Gamma)}\delta^\eta,$$

这里 $\eta=1-\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{pr}-\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q_0}$，$q_0=\max(p,\ q)$，$C$和$\delta$，$\|f^{(k)}\|_{L^p(\Gamma)}$ 无关. □

定理8. 设$\Gamma\in L(r,\ s)$，r，$s\geqslant1$，$f^{(k)}\in L^p(\Gamma)$，$p\geqslant1$，$k>0$，并有$Q_n(z)\in(P_n)^A$使得

$$\|f^{(k)}-Q_n\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant\varepsilon(n),$$

则有 $p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{L^q(\Gamma)}=O\left\{H_1(n)[H_2(n)]^{k-1}\varepsilon(n)\right\},$$

这里 $$H_1(n)=\int_0^{\lambda(n)}\frac{t^a}{d_\Gamma(t)}dt+n^2\int_0^{\lambda(n)}\frac{t^b}{d_\Gamma(t)}dt$$

$$+\frac{1}{n^{\theta}}\left(\int_{\lambda(n)}^{1/2}\frac{dt}{d_{\Gamma}(t)}\right).$$

$$H_2(n)=n^2\int_0^{\lambda(n)}\frac{t^c}{d_{\Gamma}(t)}dt+\frac{1}{n^{\theta'}}\left(\int_{\lambda(n)}^{1/2}\frac{dt}{d_{\Gamma}(t)}\right),$$

$$a=1-\frac{1}{p}+\frac{1}{\max(p,q)},\quad b=1-\frac{1}{s}+\frac{1}{\max(s,p)},$$

$$\theta'=\frac{1}{h}=1-\frac{1}{r},\quad c=1-\frac{1}{s}+\frac{1}{\max(s,p)},$$

$$\theta=\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{\max(p,qh)}.\ \square$$

证明． 不失一般性，设$k=2$。

令 $F=\int_{z_1}^{z}(f''(t)-Q_n(t))dt$，则由引理2知

$$e_{qh}^{(0)}(\delta,\ F(\varphi_-))\leqslant c\varepsilon(n)\delta^{\theta}.$$

由上节的系3得知有$Q_n^*(z)\in(P_n)^A$，使得

$$\|F-Q_n^*\|_{L^q(\Gamma)}=O\{H_1(H)\varepsilon(n)\}.$$

令 $G=\int_{z_1}^{z}(F(t)-Q_n^*(t))dt$，则这时由引理2

$$e_{qh}^{(0)}(\delta,\ G(\varphi_-))\leqslant C_1\varepsilon(n)H_1(n)\delta^{\theta'}.$$

再用一次上节系3则得

$$\|G-\sigma_n(G)\|_{L^q(\Gamma)}=O\{H_1(n)H_2(n)\varepsilon(n)\},$$

而G和f只差-属于$(P_{n+2})^A$之多项式，调整估计式的系数就得所求定理。

系1． 在定理8的条件下，若$\frac{t}{d_{\Gamma}(t)}=O(1)$，则有

$$\|f-p_n\|_{L^q(\Gamma)}=O\left\{\frac{(\log n)^k}{n^{\theta+(k-1)\theta'}}\varepsilon(n)\right\}.\ \square$$

因而应用上节的系3可得

系2(直接定理)． 设$\Gamma\in L(r,\ 1)$，$r\geqslant1$，$\frac{t}{d_{\Gamma}(t)}=O(1)$，$f^{(k)}\in E_p(D)$，$f^{(k)}(\varphi_-)\in e_{ph}^{(0)}$，则有$p_n\in(P_n)^A$，使得

$$\|f-p_n\|_{L^q(\Gamma)}=O\left\{\int_0^{n^{-\lambda}}\frac{\omega(t,f^{(h)},L^p(\Gamma))}{t}dt\right.$$

$$\left.+\frac{(\lg n)^{h+1}}{n^{\theta+(h-1)\theta'}}e_{ph}^{(0)}\left(\frac{1}{n},\ f^{(h)}(\varphi_-)\right)\right\},$$

这里$\lambda>0$为任给定的常数。□

这里值得注意的是，这一定理和定理7直接导出的直接定理（上节系3）有很大差别，在那里由$f(z)$在Γ上的性质推导到$f\in e_{ph}^{(h)}$往往要对Γ加很苛刻的限制，有时当Γ为光滑时还是不行的。但是定理7的系3有一优点：p_n恰恰是$\sigma_n(f)$。下一节在不需要对Γ加很强的条件的情况下，我们将求出$f-\sigma_n(f)$的中值估计。

4.3. 我们仍回到Faber级数对函数的中值误差估计的讨论上来。

由定理3*可以得到

引理1. 设$f\in E_1(D)$，$f\psi'_-\in L(\Gamma)$，则$\|\sigma_n(f)\|_{L(\Gamma)}$

$$\leqslant C\left\{\left[n^2\int_0^{\lambda(n)}\frac{t\,dt}{d_\Gamma(t)}dt\right]\|f\psi'_-\|_{L(\Gamma)}\right.$$

$$\left.+\left[(\lg n)\int_{\lambda(n)}^{\frac{l}{2}}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\right]\|f\|_{L(\Gamma)}\right\},$$

C和f，n无关。□

这主要是因为：

$$|a_k(f)|\leqslant\|f\psi'_-\|_{L(\Gamma)};$$

$$E^*(n)\leqslant\text{const.}(\lg n)\|f\|_{L(\Gamma)}.$$

引理2. 设$\Gamma\in L(r,\ s)$，$r,\ s>0$，$h=\frac{r}{r-1}$，$\rho=\frac{s}{s-1}$，

$f\in E_{ph\rho}(D)$，$ph>1$，则

$$\|\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant C\left\{n^2\int_0^{\lambda(n)}\frac{t^\alpha}{d_\Gamma(t)}dt\right.$$

$$+\int_{\lambda(n)}^{1/2}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\Big\}\|f\|_{L^{php}(\Gamma)},$$

这里$a=1-\frac{1}{s}+\frac{1}{\max(p,s)}$，$C$和$f$，$n$无关。□

这主要是因为：

$$|a_k(f)|\leqslant\text{const.}\|f\|_{L^p(L)}\leqslant\text{const.}\|f\|_{L^{php}(\Gamma)};$$

$$E^*(n)\leqslant\left\|\Big(\sum_{-n}^{n}a_k(f)e^{ik\theta}\Big)\varphi'_-(e^{i\theta})^{\frac{1}{p}}\right\|_{L^p(0,2\pi)}$$

$$\leqslant\text{const.}\left\|\sum_{-n}^{n}a_k(f)e^{ik\theta}\right\|_{L^{ph}(0,2\pi)}$$

$$\leqslant\text{const.}\|f\|_{L^{ph}(0,2\pi)}\leqslant\text{ocnst.}\|f\psi_-'^{\frac{1}{ph}}\|_{L^{ph}(\Gamma)}$$

$$\leqslant\text{const.}\|f\|_{L^{php}(\Gamma)}.$$

由引理1和第三转化引理有

定理9. 设$f\in E_1(D)$，$f\psi'_-\in L(\Gamma)$，并有$p_n(z)\in(P_n)^A$，使得

$$\|f-p_n\|_{L(\Gamma)}\leqslant\varepsilon(n),\quad \|(f-p_n)\psi'_-\|_{L(\Gamma)}\leqslant\varepsilon(n),$$

则必

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L(\Gamma)}=0\Big\{\Big[n^2\int_0^{\lambda(n)}\frac{tdt}{d_\Gamma(t)}$$

$$+(\lg n)\int_{\lambda(n)}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\Big]\varepsilon(n)\Big\}.\ □$$

由引理2和第三转化引理可得

定理9*. 设$\Gamma\in L(r,s)$，r，$s>1$，$h=\frac{r}{r-1}$，$\rho=\frac{s}{s-1}$，$f\in E_{p h\rho}(D)$，$ph>1$，并有$p_n\in(P_n)^A$，使得

$$\|f-p_n\|_{L^{ph\rho}(\Gamma)}\leqslant\varepsilon(n),$$

则必

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\Big\{\Big[n^2\int_0^{\lambda(n)}\frac{t^a}{d_\Gamma(t)}dt$$

$$+\int_{\lambda(n)}^{1/2}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\Big]\varepsilon(n)\Big\},$$

这里　$a=1-\frac{1}{s}+\frac{1}{\max(p,s)}$. □

因而由定理8就可得到

定理9.** 设 $\Gamma\in L(r, s)$, $r, s>1$, $h=\frac{r}{r-1}$, $\rho=\frac{s}{s-1}$, $f^{(k)}\in E_q(D)$, $q\geqslant 1$, $k>0$, 并有$p_n\in(P_n)^A$, 使得

$$\|f^{(k)}-p_n\|_{L^q(\Gamma)}\leqslant\varepsilon(n),$$

则必　$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=0\{\varepsilon_1(n)\varepsilon_2(n)^{k-1}\varepsilon_3(n)\varepsilon(n)\}$.

这里　$\varepsilon_1(n)=\int_0^{\lambda(n)}\frac{t^a}{d_\Gamma(t)}dt+n^2\int_0^{\lambda(n)}\frac{t^b}{d_\Gamma(t)}dt$

$$+\frac{1}{n^\theta}\int_{\lambda(n)}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{d_\Gamma(t)},$$

$$\varepsilon_2(n)=n^2\int_0^{\lambda(n)}\frac{t^c}{d_\Gamma(t)}dt+\frac{1}{n^{1/h}}\int_{\lambda(n)}^{1/2}\frac{dt}{d_\Gamma(t)},$$

$$\varepsilon_3(n)=n^2\int_0^{\lambda(n)}\frac{t^d}{d_\Gamma(t)}dt+\int_{\lambda(n)}^{1/2}\frac{dt}{d_\Gamma(t)},$$

$$a=1-\frac{1}{q}+\frac{1}{\max(q,ph\rho)},\quad b=1-\frac{1}{s}+\frac{1}{\max(s,\ q)},$$

$$c=1-\frac{1}{s}+\frac{1}{\max(s,ph\rho)},\quad d=1-\frac{1}{s}+\frac{1}{\max(p,s)},$$

$$\theta=\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{\max(q,ph^2\rho)},\quad ph>1.\ \square$$

由定理8的系2即得

系. 设 $\Gamma\in L(r, s)$, $r, s>1$, $h=\frac{r}{r-1}$, $f\in E_1(D)$, $f^{(k)}(\varphi_-)\in e_{qh}^{(0)}$, $k>0$, $\frac{t}{d_\Gamma(t)}=0(1)$, 则

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\Big\{\frac{(\lg n)^{k+1}}{n^{\theta+(k-1)/h}}\Big[(\lg n)e_{qh}^{(0)}\Big(\frac{1}{n},$$

$$f^{(k)}(\varphi_-)\Big)+\int_0^{n^{-\lambda}}\frac{\omega(t,\ f^{(k)},\ L^q(\Gamma))}{t}dt\Big]\Big\},$$

这里$\lambda>0$为任给的充分大的数，$q\geqslant 1$，θ和定理9**的相同，$ph>1$。

因而只要对某 $q_1\geqslant 1$，$\omega(\delta, f^{(h)}, L^{q_1}(\Gamma))=O(\delta\eta)$，$0<\eta\leqslant 1$，则有

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{(\lg n)^{h+2}}{n^{\theta+(h-1)/h}}e^{(0)}_{qh}\left(\frac{1}{n}, f^{(h)}(\varphi_-)\right)\right\}.$$

□

应用第一转化引理，就可求$\|f^{(l)}-\sigma_n^{(l)}(f)\|_{L^{p_1}(\Gamma)}$，$p_1\geqslant p$，等类型的误差估计，这里从略。

4.4. 由2.2节的结论可得：若 $\Gamma\in M(L^p(\Gamma), L^q(\Gamma))$，$q\geqslant p\geqslant 1$，$f\in E_1(D)$，则有

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k^{(n)}a_k(f)F_k\right\|_{L^p(\Gamma)}$$

$$\leqslant c_1\left\|f-\sum_{-n}^{n}c_k^{(n)}a_k(f)\Psi_-^k\right\|_{L^q(\Gamma)}$$

$$\leqslant c_1\left\|(f[\varphi_-(e^{i\theta})]-\sum_{-n}^{n}c_k^{(n)}a_k(f)e^{ik\theta})\varphi_-'(e^{i\theta})^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^q(0;2\pi)},$$

因而这时在圆 $|W|=1$上，

$$\left\|\left(f[\varphi_-(e^{i\theta})]-\sum_{-n}^{n}c_k^{(n)}a_k(f)e^{ik\theta}\right)\varphi_-'(e^{i\theta})^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^q(0,2\pi)}$$

有估计，则

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k^{(n)}a_k(f)F_k\right\|_{L^p(\Gamma)}$$

也有同级的估计。

假若$\Gamma\in L(r, s)$，$h=\frac{r}{r-1}$，$\rho=\frac{s}{s-1}$，r，$s\geqslant 1$，则这时有

$$\left\|f-\sum_{k=0}^{n}c_k^{(n)}a_k(f)F_k\right\|_{L^p(\Gamma)}$$

$$\leqslant c_2\left\| f[\varphi_-]-\sum_{-n}^{n} c_k^{(n)}a_k(f)e^{ik\theta}\right\|_{L^{qh}(0;2\pi)}.$$

因而只要在圆上

$$\left\| f[\varphi_-(e^{i\theta})]-\sum_{-n}^{n} c_k^{(n)}a_k(f)e^{ik\theta}\right\|_{L^{qh}(0;2\pi)}$$

有一估计，则

$$\left\| f-\sum_{k=0}^{n} c_k^{(n)}a_k(f)F_k\right\|_{L^p(\Gamma)}$$

将有同级的估计.

因此读者可根据圆域的结果导出一系列的结论. 下面我们举一些例子.

一个特例是

定理10. 设 $\Gamma\in M(L^p(\Gamma),\ L^q(\Gamma))\cap L(r,\ 1)$，$q\geqslant p\geqslant 1$，$h=\frac{r}{r-1}$，$qh>1$，$f\in E_p(D)$，$f(\varphi_-)\in e_{qh}^{(l)}$. 则

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{1}{n^l}e_{qh}^{(l)}\left(\frac{1}{n},\ f(\varphi_-)\right)\right\}.$$

因而用第一转化引理可以得到在其他范数意义下的误差估计. □

这主要是因为这时

$$\left\| f[\varphi_-(e^{i\theta})]-\sum_{-n}^{n} a_k(f)e^{ik\theta}\right\|_{L^{qh}(0,2\pi)}$$

$$=O\left\{\frac{1}{n^l}e_{qh}^{(l)}\left(\frac{1}{n},\ f\ (\varphi_-)\right)\right\}.$$

对 $\Gamma\in L(r,\ 1)$，$h=\frac{r}{r-1}$，有

$$\omega(\delta,\ f^{(k-1)}(\varphi_-),\ L^{q_1}(0,\ 2\pi))\leqslant c\|f^{(k)}\|_{L^{p_1}(\Gamma)}\delta^{\eta},$$

这里$\eta=\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)+\frac{1}{q_0}$，$q_0=\max(q_1,p_1)$. (参看4.2节引理2)，依定理8的证法可得

定理8*. 若$\Gamma\in M(L^p(\Gamma),\ L^q(\Gamma))\cap L(r,\ 1)$，$q\geqslant p\geqslant 1$，$r\geqslant 1$，$f^{(h)}(z)\in E_\lambda(D)$，$\lambda\geqslant 1$，并有$Q_n\in(P_n)^A$，使得

$$\|f^{(h)}-Q_n\|_{L^\lambda(\Gamma)}=O\{\varepsilon(n)\},$$

则必有$p_n\in(P_n)^A$，使得

$$\|f-p_n\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{\varepsilon(n)}{n^{\theta+(h-1)\theta'}}\right\}.$$

这里 $\theta=\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{\max(qh,\lambda)}$，$h=\frac{r}{r-1}$.

$$\theta'=\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{qh}.\ \square$$

下面是定理8*的几个例子。

系1. 设$\Gamma\in M(L^p(\Gamma),\ L^q(\Gamma))\cap L(r,\ 1)$，$qh>1$，$q\geqslant p\geqslant 1$，$r\geqslant 1$，$h=\frac{r}{r-1}$，$f^{(h)}\in E_p(D)$，$f^{(h)}(\varphi_-)\in e_{qh}^{(l)}$，则有$p_n\in(P_n)^A$，使得

$$\|f-p_n\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{1}{n^{l+h\theta'}}e_{qh}^{(l)}\left(\frac{1}{n},\ f^{(h)}(\varphi_-)\right)\right\}.\ \square$$

证明. 因为由定理10知道

$$\|f^{(h)}-\sigma_n(f^{(h)})\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{1}{n^l}e_{qh}^{(l)}\left(\frac{1}{n},\ f^{(h)}(\varphi_-)\right)\right\}$$

再由定理8*即得系1的证明。

一个特例是

系2. 设$\Gamma\in(\Lambda)$，$f^{(h)}\in E_p(D)$，$1<p<\infty$，$f^{(h)}(\varphi_-)\in e_p^{(l)}$，则有$p_n\in(P_n)^A$，使得

$$\|f-p_n\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{1}{n^{h+l}}e_p^{(l)}\left(\frac{1}{n},\ f^{(h)}(\varphi_-)\right)\right\}.\ \square$$

因为$f^{(h)}\in E_p(D)$包括$f^{(h)}(\varphi_-)\in e_p^{(0)}$，故对$\Gamma\in(\Lambda)$，$f^{(h)}\in E_p(D)$，$1<p<\infty$，就直接导致存在$p_n\in(P_n)^A$，使得

$$\|f-p_n\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{1}{n^h}e_p^{(0)}\left(\frac{1}{n},\ f^{(h)}(\varphi_-)\right)\right\}.$$

我们将进一步指出，这里的$p_n(z)$可以取为$\sigma_n(f)$。

对前面的结果用上第一转化引理，读者可导出一系列的结论．例如在系2的条件下

$$\|f-p_n\|_{L^q(\Gamma)}=O\left\{\frac{1}{n^\theta}e_p^{(l)}\left(\frac{1}{n},\ f^{(k)}(\varphi_-)\right)\right\}$$

$$q\geqslant p>1,\ \theta=k+l+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}.$$

下面我们来研究$\sigma_n(f)$对f的逼近误差．

对$\Gamma\in M(L^p(\Gamma),\ L^q(\Gamma))\cap L(r,\ 1)$，$q\geqslant p\geqslant 1$，$qh>1, r\geqslant 1$，$h=\frac{r}{r-1}$，$f\in E_1(D)$，$f\Psi_-'^{\frac{1}{qh}}\in L^{qh}(\Gamma)$，则显然

$$\|\sigma_n(z,f)\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant C\|f\Psi_-'^{\frac{1}{qh}}\|_{L^{qh}(\Gamma)}. \tag{*}$$

因而若有$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|(f-p_n)\Psi_-'^{\frac{1}{qh}}\|_{L^{qh}(\Gamma)}=O\{\varepsilon(n)\},$$

由第三转化引理必致

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\{\varepsilon(n)\}.$$

又若$\Gamma\in M(L^p(\Gamma),\ L^q(\Gamma))\cap L(r,\ s)$，$q\geqslant p\geqslant 1$，$r,\ s\geqslant 1$，$h=\frac{r}{r-1}$，$p=\frac{s}{s-1}$，$f(z)\in E_{qhp}(D)$，$qh>1$，则由不等式(*)和Hölder不等式有

$$\|\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant \text{const}.\|f\|_{L^{qhp}(\Gamma)}.$$

因而由第三转化引理有

定理11． 在上述条件下，若有$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{L^{qhp}(\Gamma)}=O\{\varepsilon(n)\},$$

则必 $\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\{\varepsilon(n)\}$. □

所以由定理8*就有

定理11*． 设$\Gamma\in M(L^p(\Gamma),\ L^q(\Gamma))\cap L(r,\ s)\cap M(L^{qh\rho}(\Gamma),\ L^\sigma(\Gamma))$，$h=\frac{r}{r-1}$，$\rho=\frac{s}{s-1}$，$q\geqslant p\geqslant 1$，$qh>1$，$\sigma\geqslant qh\rho$，$f^{(k)}\in E_\lambda(D)$，$\lambda\geqslant 1$，并有$p_n\in(P_n)^A$，使得

$$\|f^{(k)}-p_n\|_{L^\lambda(\Gamma)}=O\{\varepsilon(n)\},$$

则必 $$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{\varepsilon(n)}{n^{\theta+(k-1)\theta'}}\right\},$$

这里 $$\theta=\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{\max(\sigma h,\lambda)},$$

$$\theta'=\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{qh\rho}\right)+\frac{1}{\sigma h}.\ \square$$

下面是这定理的两个特例。

系1. 设 Γ 满足上定理的要求，$f^{(k)}\in E_{qh\rho}(D)$，$f^{(k)}(\varphi_-)\in e_{\sigma h}^{(l)}$，则有

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{1}{n^{l+k\theta'}}e_{\sigma h}^{(l)}\left(\frac{1}{n},\ f^{(k)}(\varphi_-)\right)\right\},$$

这里 $$\theta'=\frac{1}{h}\left(1-\frac{1}{qh\rho}\right)+\frac{1}{\sigma h}.\ \square$$

证明. 这可由定理10

$$\|f^{(k)}-\sigma_n(f^{(k)})\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{1}{n^l}e_{\sigma h}^{(l)}\left(\frac{1}{n},\ f^{(k)}(\varphi_-)\right)\right\}$$

和定理11*导出来。也可以由定理8*的系1和定理11导出来。

一个更具体的例子是

系2. 设$\Gamma\in(\Lambda)$，$f^{(k)}\in E_p(D)$，$f^{(k)}(\varphi_-)\in e_p^{(l)}$，$1<p<\infty$，$q\geqslant p, a=k+l-j-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>0$，则

$$\|f^{(j)}-\sigma_n^{(j)}(f)\|_{L^q(\Gamma)}=O\left\{\frac{1}{n^a}e_p^{(l)}\left(\frac{1}{n},\ f^{(k)}(\varphi_-)\right)\right\}.\ \square$$

证明. 由系1可得

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{1}{n^{k+l}}e_p^{(l)}\left(\frac{1}{n},\ f^{(k)}(\varphi_-)\right)\right\},$$

再利用第一转化引理(并注意第四章2.5节的注记或本章最后证明的不等式）就可得系2的证明。

当$k=l=j=0, p=q$时，虽然$a=0$，定理显然还是成立的(参看定理10)。

§5. 对复连通区域Faber级数的一些注记

5.1 设连续统D的补集K是m个单连通区域$K^{(1)},\cdots,K^{(m)}$，它们互不相交，$K^{(1)}$包含无穷远点．$K^{(i)}$的边界设为$\overset{(i)}{\Gamma}$，是可求长曲线．设$z^{(i)}\in K^{(i)}$，$i=1$，…，m；$z^{(1)}=\infty$．

设函数$\overset{(i)}{\varphi}_-(W)$等角映射$|W|>1$于$K^{(i)}$，

$$z^{(i)}=\overset{(i)}{\varphi}_-(\infty),\quad \alpha^{(i)}=\overset{(i)}{\varphi'}_-(\infty)>0,$$

$\overset{(i)}{\varphi}_-(W)$的反函数是$\overset{(i)}{\psi}_-(z)$．

这时不难看到：若$\overset{(i)}{\Gamma}$为可求长（可有重点的）Jordan 曲线，则对$n=0$，1，…，

$$\overset{(i)}{F}_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{(i)}{\Gamma}}\frac{[\overset{(i)}{\psi}_-(t)]^n}{t-z}dt$$

在$z\bar{\in}\overline{K}^{(i)}$时和一以$z^{(i)}$为极点的属于$(R_n)^A$的有理多项式重合．这时$\overset{(i)}{\psi}_-$在$\overset{(i)}{\Gamma}$上曲角极值定义（不难知道它是几乎处处存在的），并且在全平面，我们仍用$\overset{(i)}{F}_n(z)$表示上述式子导出的有理多项式．

像对单连通区域的处理一样，可以得到

定理1．** 对几乎处处的$z\in\overset{(i)}{\Gamma}$有

$$a\overset{(i)}{F}_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{(i)}{\Gamma}}\frac{B(t)-B(z)}{t-z}dt+B(z)$$

$$=\frac{V.P.}{2\pi i}\int_{\overset{(i)}{\Gamma}}\frac{B(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2}B(z),$$

这里$B(z)=a[\overset{(i)}{\psi}_-(z)]^k+b[\overset{(i)}{\psi}_-(z)]^{-k}$，$a$，$b$为任给的常数，$k=0$，1，2，…．□

5.2. 记Γ_{ij}是$\overset{(i)}{\Gamma}$（在几何点上）和$\overset{(j)}{\Gamma}$的相重部分，

$$\Gamma_i^*=\overset{(i)}{\Gamma}-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\Gamma_{ij}.$$

定义. 若$\Gamma=\sum\overset{(i)}{\Gamma}$上定义的函数$f(z)$几乎处处能表成

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{V.P.}{2\pi i}\int_{\overset{(k)}{\Gamma}}\frac{F(t)}{t-z}dt+\frac{\mu(z)}{2}F(z),$$

这里$F(t)$在Γ上定义，属于$L(\overset{(k)}{\Gamma})$，$k=1,\ \cdots,\ m$；$\mu(z)$是经过点z的$\overset{(i)}{\Gamma}$的数目．这时称$f\in V(F(z))$．□

由定理1**就可得到基本的关系式于下：

设$\{\overset{(i)}{\lambda}{}^{(n)}_{k}\}$，$n=0,\ 1,\ \cdots$；$k=0,\ \pm1,\ \cdots,\ \pm n$；$i=1,\cdots,m$，是任意给定的数序列，$f\in V(F(z))$，则对几乎处处的$z\in\Gamma_{ij}$有

$$\begin{aligned}A(z)&=f(z)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\overset{(i)}{\lambda}{}^{(n)}_{k}\overset{(i)}{F}_{k}(z)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{(i)}{\Gamma}}\frac{\overset{(i)}{R}_{n}(t)-\overset{(i)}{R}_{n}(z)}{t-z}dt+\overset{(i)}{R}_{n}(z)+\overset{(i)}{R}_{n}(z)\\&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{(j)}{\Gamma}}\frac{\overset{(i)}{R}(t)-\overset{(j)}{R}_{n}(z)}{t-z}dt\\&\quad+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i,j}}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{(k)}{\Gamma}}\frac{\overset{(k)}{R}_{n}(t)}{t-z}dt.\end{aligned}\tag{1}$$

对几乎处处的$z\in\Gamma_{i}^{*}$有

$$\begin{aligned}A(z)&=\frac{V.P.}{2\pi i}\int_{\overset{(i)}{\Gamma}}\frac{\overset{(i)}{R}_{n}(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2}\overset{(i)}{R}_{n}(z)\\&\quad+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{(k)}{\Gamma}}\frac{\overset{(k)}{R}_{n}(t)}{t-z}dt\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{(i)}{\Gamma}}\frac{\overset{(i)}{R}_{n}(t)-\overset{(i)}{R}_{n}(z)}{t-z}dt+\overset{(i)}{R}_{n}(z)\\&\quad+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{(k)}{\Gamma}}\frac{\overset{(k)}{R}_{n}(t)}{t-z}dt,\end{aligned}\tag{2}$$

这里 $\overset{(i)}{R}_n(z)=F(z)-\sum_{k=-n}^{n}\overset{(i)}{\lambda}{}^{(n)}_{k}[\overset{(i)}{\psi}_-(z)]^k$.

因此在上面条件下，若 $F\in L^{p_i}(\overset{(i)}{\Gamma})$，$p_i\geqslant 1$，则有

$$\begin{aligned}\|A(z)\|_{L^{p_i}(\overset{(i)}{\Gamma})}\leqslant&\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{(i)}{\Gamma}}\frac{\overset{-(i)}{R}_n(t)-\overset{(i)}{R}_n(z)}{t-z}dt\right.\\&\left.+\overset{(i)}{R}_n(z)\right\|_{L^{p_i}(\overset{(i)}{\Gamma})}\\&+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{(j)}{\Gamma}}\frac{\overset{(j)}{R}_n(t)-\overset{(j)}{R}_n(z)}{t-z}dt\right.\\&\left.+\overset{(j)}{R}_n(z)\right\|_{L^{p_i}(\Gamma_{ij})}\\&+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{(j)}{\Gamma}}\frac{\overset{(j)}{R}_n(t)}{t-z}\,dt\right\|_{L^{p_i}(\overset{(i)}{\Gamma}-\Gamma_{ij})}\\&=I_1+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}I_2^{(j)}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}I_3^{(j)}.\end{aligned}\tag{3}$$

把(3)式具体化就可以得到一系列结果．下面我们只给出一些形式较明朗的特例．估计的方法和§3，§4中的相同．

例如．设 $\overset{(i)}{\Gamma}$，$i=1,\cdots,m$，相互的距离为正，$1\leqslant p_i\leqslant\infty$，则必有

$$\begin{aligned}\|A(z)\|_{L^{p_i}(\overset{(i)}{\Gamma})}=O\Bigg\{&\int_0^{\lambda(n)}\frac{\omega(t,F,L^{p_i}(\overset{(i)}{\Gamma}))}{d_{\overset{(i)}{\Gamma}}(t)}dt\\&+\Big(\sum_{-n}^{n}|k\overset{(i)}{\lambda}{}^{(n)}_{k}|\Big)\\&\int_0^{\lambda(n)}\frac{\omega(t,\overset{(i)}{\Psi}_-,L^{p_i}(\overset{(i)}{\Gamma}))}{d_{\overset{(i)}{\Gamma}}(t)}dt+\\&+E_i(n)\int_{\lambda(n)}^{\frac{l(\overset{(i)}{\Gamma})}{2}}\frac{dt}{d_{\overset{(i)}{\Gamma}}(t)}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{m}E_j(n)\Bigg\},\end{aligned}\tag{4}$$

这里$l(\overset{(i)}{\Gamma})$为$\overset{(i)}{\Gamma}$的长度，

$$E_i(n)=\sup_t\|\overset{(i)}{R}_n(z(s+t))\|_{L^{p_i}(\overset{(i)}{\Gamma})},$$

$$E_j(n)=\|\overset{(j)}{R}_n(z)\|_{L(\overset{(j)}{\Gamma})},\quad j\neq i.$$

而当$\overset{(i)}{\Gamma}\in(\Lambda)$，$1<p_i<\infty$，时

$$\|A(z)\|_{L^{p_i}(\overset{(i)}{\Gamma})}$$

$$=O\left\{\|\overset{(i)}{R}_n(z)\|_{L^{p_i}(\overset{(i)}{\Gamma})}+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}E_j(n)\right\}. \tag{5}$$

象第四、第五章一样，$\Gamma\in P.S.(\alpha,\ \beta)$是指$\overset{(1)}{\Gamma}\in P.S.(\alpha_1,\ \beta_1)$，$\overset{(i)}{\Gamma}\in P.S.(\beta_i,\ \alpha_i)$，$i\neq1$，$\alpha=\min(\alpha_i)$，$\beta=\min(\beta_i)$。同样定义P.L.$(\alpha,\ \beta)$类。

$\sigma_n(f)=\sigma_n(z,\ f)$ 定义为

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\overset{(j)}{a}_k\overset{(j)}{F}_k,$$

$\overset{(j)}{a}_k=\overset{(j)}{a}_k(f)$是$F(\overset{(j)}{\varphi}_-(e^{i\theta}))$的Fourier系数。

利用定理1**可得：

设$\overset{(i)}{\Gamma}$相互是分离的，$\Gamma\in P.S.(\alpha,\ \beta)$，$\alpha,\ \beta>0$，$f\in A(D^0)\cap C(D)$，$D^0$为$D$之内域，则

$$\|\sigma_n(f)\|_{C(\Gamma)}\leqslant\text{const.}(\lg n)^2\|f\|_{C(\Gamma)}. \tag{6}$$

因此利用第三转化引理有：

若有仅以$z^{(i)}(i=1,\ \cdots,\ m)$为极点的$Q_n(z)\in(R_n)^A$，使得$\|f-Q_n\|_{C(\Gamma)}=0\{\varepsilon(n)\}$，则必

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{C(\Gamma)}=0\{(\lg n)^2\varepsilon(n)\}. \tag{7}$$

因此也就有

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{C(\Gamma)}=O\left\{(\lg n)^2\omega\left(\frac{1}{n^{\beta-\varepsilon}},f,C(D)\right)\right\}. \tag{8}$$

这里$\varepsilon>0$。

而对$\Gamma\in P.L.(\alpha,\ \beta)$，$\alpha,\ \beta>0$，则有

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{C(\Gamma)}=O\left\{(\lg n)^2\omega\left(\left(\frac{\lg n}{n}\right)^{\prime},\ f,\ C(D)\right)\right\}. \tag{9}$$

若$\overset{(i)}{\Gamma}$均为(Λ^*)类，利用Албпер[9]的方法，则相应在圆上有好的逼近式时，在Γ上也有同样好的逼近形式。即[9]中的结果一般都可搬到多连通域上来。

若Γ满足关于(6)式之假设，$f(z)\in A(D^\circ)\cap V(f(z))\cap L^p(\Gamma)$，$1\leqslant p<\infty$，$f(\overset{(i)}{\varphi}_-)\in e^{(0)}_{p/\beta+\varepsilon}$，$\varepsilon>0$，则

$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\max_i\int_0^{n^{-1}}\frac{\omega(t,f,L^p(\overset{(i)}{\Gamma}))}{t}dt+(\lg n)\max_i e^{(0)}_{p/\beta+\varepsilon}\times\left(\frac{1}{n},\ f(\overset{(i)}{\varphi}_-)\right)\right\}. \tag{10}$$

若更有$f(z)\in L^{p(2-\beta)/\beta+\varepsilon}(\Gamma)$，则

$$\|\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant\text{const.}(\lg n)\|f\|_{L^{p(2-\mu)/\beta+\varepsilon}(\Gamma)}. \tag{11}$$

因而若有仅以$z^{(i)}$，$i=1,\cdots,m$，为极点的$p_n\in(R_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{L^{p(2-\mu)/\beta+\varepsilon}(\Gamma)}=O\{\varepsilon(n)\}, \tag{12}$$

则必
$$\|f-\sigma_n(f)\|_{L^p(\Gamma)}=O\{(\lg n)\varepsilon(n)\}. \tag{13}$$

若$\Gamma\in$P.L.(α,β)时，只要$p/\beta>1$，则(10)、(11)、(12)中的ε可改为零（相应的条件中ε也改为零），但(11)、(13)中的因子$(\lg n)$要改用$(\lg n)^2$。

这一些结论都可象对单连通区域的情况的论证一样，由(1)—(4)式推导出来。

由(5)式，立刻得到圆域的结果对一般区域的转化：

若$\overset{(i)}{\Gamma}\in(\Lambda)$，$i=1,\cdots,m$，都是分离的，$f(z)$在$D$的内域解析，在$\Gamma$上有角边界值$f(t)\in L^{p_i}(\overset{(i)}{\Gamma})$，$1<p_i<\infty$，$i=1,\cdots,m$，并且对$D$内域之$z$有

$$f(z)=\int_\Gamma\frac{f(t)dt}{t-z},$$

则有

$$\sum_{j=0}^{m}\|f-\sigma_n(f)\|_{L^{p_j}(\overset{(j)}{\Gamma})}=O\left\{\sum_{j=1}^{m}\|f[\overset{(j)}{\varphi}_-(e^{i\theta})]\right.$$

$$\left.-S_{n,j}\|_{L^{p_j}(0,2\pi)}\right\},\tag{14}$$

这里$S_{n,j}$是$f[\overset{(j)}{\varphi}_-(e^{i\theta})]$的Fourier级数的第$n$次部分和。

特别若$f[\overset{(j)}{\varphi}_-]\in e_{p_j}^{(l_j)}$时，则有

$$\sum_{j=1}^{m}\|f-\sigma_n(f)\|_{L^{p_j}(\overset{(j)}{\Gamma})}$$

$$=O\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{n^{l_j}}e_{p_j}^{(l_j)}\left(\frac{1}{n},\ f[\overset{(j)}{\varphi}_-]\right)\right\}.\tag{15}$$

另外一方面，还可由（A）类曲线的性质，从定理1**或(5)式得到不等式

$$\sum_{j=1}^{m}\|\sigma_n(f)\|_{L^{p_j}(\overset{(j)}{\Gamma})}$$

$$\leqslant\text{const.}\left\{\sum_{j=1}^{m}\|f\|_{L^{p_j}(\overset{(j)}{\Gamma})}\right\}.\tag{16}$$

因而根据第三转化引理可得：若有仅以$z^{(i)}$，$i=1,\ \cdots,m$，为极点的多项式$p_n\in(R_n)^A$使得

$$\sum_{j=1}^{m}\|f-p_n\|_{L^{p_j}(\overset{(j)}{\Gamma})}=O\{\varepsilon(n)\},$$

则必
$$\sum_{j=1}^{m}\|f-\sigma_n(f)\|_{L^{p_j}(\overset{(j)}{\Gamma})}=O\{\varepsilon(n)\}.\tag{17}$$

5.3. 现在考虑当$\overset{(i)}{\Gamma}$之间有重点时的情况．一般说，这类问题比前一节的要杂得多．我们只考虑一些特例．

若D退化为网络，即$D=\Gamma$，并且设$\dfrac{t}{d_{\overset{(j)}{\Gamma}}(t)}=0(1),i=1,\cdots,m.$则在不等式（3）中的

$$I_8^{(j)}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\overset{(j)}{\Gamma}}|\overset{(j)}{R}_n(t)|\left\|\frac{1}{t-2}\right\|_{L^{p_j}(\Gamma^*_{ij})}dt$$

$$=O\left\{\int_{\overset{(j)}{\Gamma}}|\overset{(j)}{R}_n(t)|[\Pi|t-\beta^{(\lambda)}|]^{\frac{1}{p_i}-1}|dt|\right\}$$

$$= O\left\{ \left\| \overset{(j)}{R_n} \right\|_{L^{q_j}(\overset{(j)}{\Gamma})} \right\},\tag{18}$$

这里$\beta^{(\lambda)}$为 $\Gamma^*_{ij} = \overset{(i)}{\Gamma} - \Gamma_{ij}$ 的端点；当$p_j < \infty$时，$q_j > p_j$；当$p_j = \infty$时，$q_j = \infty$。

若$m = 2$，$\overset{(1)}{\Gamma}$和$\overset{(2)}{\Gamma}$重合为$\Gamma = D$，则

$$I_8^{(j)} = 0.\tag{19}$$

由(18)，(19)，则从定理1**及(1)—(5) 式可导出一系列的结果。下面就是一些特例。

若$D = \Gamma \in$ P.S.(α,β), $\alpha,\beta > 0$，$f(z) \in C(\Gamma)$ (对Γ外之点$f(z)$可没有定义)，则有

$$\|\sigma_n(f)\|_{C(\Gamma)} \leqslant \text{const}(lgn)^2 \|f\|_{C(\Gamma)}.\tag{20}$$

因此由第三转化引理有：若有仅以 $z^{(i)}$，$i = 1,\cdots,m$，为极点的$p_n \in (R_n)^A$使得

$$\|f - p_n\|_{C(\Gamma)} = O\{\varepsilon(n)\},$$

则必

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{C(\Gamma)} = O\{(\log n)^2 \varepsilon(n)\}.\tag{21}$$

所以由Мергелян型的（推广的）直接定理有

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{C(\Gamma)} = O\{(lgn)^2 \omega(\tfrac{1}{n^{\beta-\varepsilon}}, f, C(\Gamma))\},\tag{22}$$

这里$\varepsilon > 0$，而对$\Gamma \in$ P.L.(α,β)，$\alpha,\beta > 0$时有

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{C(\Gamma)} = O\{(lgn)^2 \omega(\left(\frac{lgn}{n}\right)^\beta, f, C(\Gamma))\}.\tag{23}$$

考虑在这种网络的情况下，关于中值逼近的结果就有下面的命题。

设 $D = \Gamma \in$ P.S.(α,β)，$\alpha,\beta > 0$，$f(z) \in L^p(\overset{(i)}{\Gamma})$，$i = 1,\cdots,m$，$1 \leqslant p < \infty$，$f(\overset{(i)}{\varphi_-}) \in e^{(0)}_{p/\beta+\varepsilon}$，$\varepsilon > 0$，(对不属$\Gamma$之点，$f(z)$ 可以没有定义)，则由(3)式和(18)式可得

$$\max_i \left\| f - \sigma_n(f) \right\|_{L^p(\overset{(i)}{\Gamma})} = O\left\{ \max_i \int_0^{n^{-1}} \frac{\omega(t, f, L^p(\overset{(i)}{\Gamma}))}{t} dt\right.$$

$$+(lgn)\max_i e^{(0)}_{p/\beta+\varepsilon}\left(\frac{1}{n},f(\overset{(i)}{\varphi})\right)\}. \qquad (24)$$

类似的估计有

$$\max_i \left\|\sigma(f)\right\|_{L^p(\overset{(i)}{\Gamma})} \leqslant \text{const.}(lgn)\max_i \left\|f\right\|_{L^\theta(\overset{(i)}{\Gamma})} \qquad (25)$$

只要$f\in L^\theta(\overset{(i)}{\Gamma})$，这里$\theta=p(2-\alpha)/\beta+\varepsilon$，$\varepsilon>0$.所以由第三转化引理可得：若有仅以$z^{(i)}$，$i=1,\cdots,m$，为极点的$p_n(z)\in(R_n)^A$使得

$$\max_i\left\|f-p_n\right\|_{L^\theta(\overset{(i)}{\Gamma})}=O\{\varepsilon(n)\},$$

则有

$$\max_i\left\|f-\sigma_n(f)\right\|_{L^p(\overset{(i)}{\Gamma})}=O\{(lgn)\varepsilon(n)\}. \qquad (26)$$

若$D=\Gamma\in(\Lambda)$，(这里自然$m=2$，因而可利用(19)式)，$f\in L^p(\Gamma)$，$1<p<\infty$，(在不属于Γ之点$f(z)$可以没有定义)，则由(5)式可得

$$\left\|f-\sigma_n(f)\right\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\sum_{i=1}^{2}\left\|f[\overset{(i)}{\varphi}_-(e^{i\theta})]-S_{n,i}\right\|_{L^p(0,2\pi)}\right\}, \qquad (27)$$

这里$S_{n,i}$是$f[\overset{(i)}{\varphi}_-(e^{i\theta})]$的Fourier级数的第$n$部分和.

特别若$f[\overset{(i)}{\varphi}_-]\in e_p^{(l_i)}$，则有

$$\left\|f-\sigma_n(f)\right\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{n^{l_i}}e_p^{(l_i)}\left(\frac{1}{n},f[\overset{(i)}{\varphi}_-]\right)\right\}. \qquad (28)$$

在同样条件下，下面估计式是成立的：

$$\left\|\sigma_n(f)\right\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant\text{const.}\left\|f\right\|_{L^p(\Gamma)}. \qquad (29)$$

所以由第三转化引理有：若有仅以$z^{(1)}=\infty$，$z^{(2)}$为极点的$p_n\in$

$(R_n)^A$使得

$$\left\|f-p_n\right\|_{L^p(\Gamma)}=O\{\varepsilon(n)\},$$

则必

$$\left\|f-\sigma_n(f)\right\|_{L^p(\Gamma)}=O\{\varepsilon(n)\}.$$

5.4. 下面谈一个前面我们已经应用了的多项式不等式．即是

定理12. 若$\overset{(i)}{\Gamma}\in(\Lambda), i=1,\cdots,m$，相互是分离的，$R_n(z)\in(R_n)^A$的极点不外是$z^{(1)},\cdots,z^{(m)}$，则对$1<p<\infty$，有

$$\left\|R_n'(z)\right\|_{L^p(\Gamma)}\leqslant cn\left\|R_n(z)\right\|_{L^p(\Gamma)},$$

c和n，$R_n(z)$无关．□

证明 实际上

$$R_n(z)=\sigma_n(z,R_n(z))=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{n}\overset{(j)}{a_k}\overset{(j)}{F_k}(z)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\overset{(j)}{Q_n}(z).$$

当$z\in K^{(j)}$时

$$\overset{(j)}{Q_n}(z)=\sum_{k=-n}^{n}\overset{(j)}{a_k}[\overset{(j)}{\psi_-}(z)]^k$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{(j)}{\Gamma}}\sum_{k=-n}^{n}\overset{(j)}{a_k}[\overset{(j)}{\psi_-}(t)]^k\frac{dt}{t-z}.$$

这时可证，在$\overset{(j)}{\Gamma}$上几乎处处有

$$\overset{(j)}{Q_n'}(z)=\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}k\overset{(j)}{a_k}[\overset{(j)}{\psi_-}(z)]^{k-1}\overset{(j)}{\psi_-'}(z)$$

$$+\underset{2\pi i}{\mathrm{V.P.}}\int_{\overset{(j)}{\Gamma}}\sum_{k=-n}^{n}k\overset{(j)}{a_k}[\overset{(j)}{\psi_-}(t)]^{k-1}[\overset{(j)}{\psi_-'}(t)]\frac{dt}{t-z}.$$

利用(Λ)类曲线上的 M.Riesz不等式和$\overset{(j)}{\varphi_-'}$在边界上上下有界的事

实就可证

$$\left\|\overset{(j)}{Q_n'}(z)\right\|_{L^{p}(\overset{(j)}{\Gamma})} \leqslant \text{const}.n\left\|\overset{(j)}{Q_n}(z)\right\|_{L^{p}(\overset{(j)}{\Gamma})},$$

这实质上包含了定理的结论。

显然定理可以改成

$$\sum_{j=1}^{m}\left\|R_n'(z)\right\|_{L^{p_j}(\overset{(j)}{\Gamma})} \leqslant cn\left\{\sum_{j=1}^{m}\left\|R_n(z)\right\|_{L^{p_j}(\overset{(j)}{\Gamma})}\right\},$$

$1<p_i<\infty$。而且当$m=2$，$\overset{(1)}{\Gamma}$和$\overset{(2)}{\Gamma}$重合时也是成立的。

参 考 文 献

[1] 吴学谋，光滑区域中解析函数用多项式来逼近的线性中值误差，函数论研究报告，1:1(1957)

[2] W.E.Sewell, Degree of Approximation by Polynomials in the Complex Domain, 1942.

[3] Г.М.Годузин，复变函数的几何理论，陈建功译，1956.

[4] И.И.Лрнвапов，解析函数的边界性质，吴亲仁译.

[5] 陈建功，敏高夫斯基不等式的拓广及其在整函数平均逼近论上的应用，科学记录新辑，2:3(1958).

[6] Б. В. Хведелидзе, ОБ Одном Классе Сингулярньlx Интеграпbнblx Уравнений с Ядрамитила Коши, Cooбш. АНГруз ССР 15, ИО.7(1954).

[7] С. Я. Альлер И В. В. Иванов, О Цриближении Функчий Частнь1ми Суммами Ряда ло Полиномам Фабера, ДАН, 90(1953), 325-328.

[8] G.H.Hardy and J.E.Littlewood, A Convergence Criterior for Fourier Series, Math. Zeit, 28(1928), 612—634.

[9] С. Я. Алbлер, О, Равномерньlx Лрuближениях Функчий Комллексного Переменного В Замкнутом ОБласти, Изв. АНСССР, Серия Матем, 19(1955), 423—444.

[10] И.Л.Натансон, Конструктивная Теория Функчий, 1949.

[11] 吴学谋，Faber级数的误差转化分析，科学通报，9(1981)。
[12] 吴学谋，复函数逼近的一些研究（I），（II），武汉建材学院学报，3，4(1980)。

第七章

解析最优逼近多项式和对调和函数的逼近

§1. 解析直交多项式级数

1.1. 按直交多项式展成 Fourier 级数常常是作为实现多项式逼近的有效手段，其部分和在所讨论的函数空间中往往就是最优逼近多项式。

我们首先来讨论线积分时的结果，讨论$L^2(\Gamma)$中的直交多项式级数。但是这里所用的方法完全可用于建立Соболев空间$W_2^{(l)}(\Gamma)$中的解析直交多项式级数的理论。

设Jordan区域D的边界Γ为可求长，$\{H_n(z)\}$，$H_n(z)\in(P_n)^A$为Γ上之正规直交多项式，即

$$\int_\Gamma H_n(z)\overline{H_m(z)}\,|dz| = \begin{cases} 1 & m=n, \\ 0 & m\neq n. \end{cases}$$

若$f(z)\in E_1(D)$，则称

$$C_n = C_n(f) = \int_\Gamma f(z)\overline{H_n(z)}\,|dz|$$

是$f(z)$的Fourier系数；称

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(z)$$

为$f(z)$按$\{H_n(z)\}$展开的Fourier级数；部分和$S_n(f)$记为

$$S_n = S_n(z,f) = \sum_{k=0}^{n} C_k H_k(z).$$

我们知道，对于$f(z)\in E_2(D)$，

$$r_n=r_n(f)=\|f-S_{n-1}\|_{L^2(\Gamma)}$$

一般不收敛于零。B. N. Смирнов 证明了对任何$f(z)\in E_2(D)$，$r_n(f)\to 0$的充要条件是曲线Γ属于(S)类（参看[1]中第十章）。但是Γ不属于(S)类时，Смирнов 的结果并不等于说任何函数的$r_n(f)$都不收敛于零。实际上，只要函数$f(z)$满足一定条件，正如我们前面看到的一样，$r_n(f)$不仅仅可以收敛于零，而且还能估计出其收敛的级。

因为$S_n(z,f)=M(f,\|(P_n)^A\|_{L^2(\Gamma)})$，若有一个$p_n\in(P_n)^A$使得$\|f-p_n\|_{L^2(\Gamma)}\leqslant\varepsilon(n)$，则必

$$r_{n+1}(f)\leqslant\varepsilon(n);$$

另一方面，$\varepsilon(n)$是可由$f(z)$和Γ的特点进行估计的，于是对这些函数就可以找到多项式逼近的实现方法，而且中值误差可以估计。因而由第一转化引理就可以讨论在某种范数意义下的误差估计。

我们前面的工作很大程度上解决了 Fourier 级数在各意义下的收敛问题。这些结果是很多的，我们不全部罗列，只举一些例子。

由 Faber 级数的理论有

例1. 若$\Gamma\in L(r,s)$，$r,s\geqslant 1$，$f[\varphi_-]\in e_{2k}^{(h)}$，$r^{-1}+h^{-1}=1$，则对$f\in E_2(D)$，有

$$r_n(f)=O\Big\{\int_0^{\lambda(n)}\omega(t,f,L^2(\Gamma))\frac{dt}{d_\Gamma(t)}$$

$$+n^2\int_0^{\lambda(n)}\frac{(t)^{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{p_0}}}{d_\Gamma(t)}dt$$

$$+\frac{1}{n^k}\Big(\int_{\lambda(n)}^{\frac{l}{2}}\frac{dt}{d_\Gamma(t)}\Big)e_{2k}^{(k)}\Big(\frac{1}{n},f[\varphi_-]\Big)\Big\}.$$

特别是当$\omega(\delta,f,L^2(\Gamma))=O(\delta^\sigma)$，$0<\delta\leqslant 1$，$\dfrac{t}{d_\Gamma(t)}=O(1)$时

$$r_n(f)=O\Big\{\frac{\lg n}{n^k}e_{2k}^{(h)}\Big(\frac{1}{n},f[\varphi_-]\Big)\Big\}.$$

上面有关符号和性质参看第六章（特别是§4）。

例2. 若$\Gamma\in L(r,1)$，$r>1$，$\dfrac{t}{d_\Gamma(t)}=O(1)$，$f^{(k)}[\varphi_-]\in e^{(0)}_{ph}$，

则

$$r_n(f)=O\Big\{\int_0^{n-\lambda}\omega(t,f^{(k)},L^p(\Gamma))\frac{dt}{t}$$

$$+\frac{(\lg n)^{k+1}}{n^{\theta+(k-1)\theta'}}e^{(0)}_{ph}\Big(\frac{1}{n},f^{(k)}[\varphi_-]\Big)\Big\}.$$

这里λ为充分大的任给定的常数，$\theta'=h^{-1}=1-r^{-1}$，$\theta=h^{-1}(1-p^{-1})+(\max(p,2h))^{-1}$（参看第六章中定理8的系2）。

考虑更具体些的曲线就有

例3. 设$\Gamma\in$ P.S.(α,β)，$\alpha,\beta>0$，$f^{(k)}(z)\in E_p(D)$，$p\geqslant1$，$\omega(\delta,f^{(k)},L^p(\Gamma))=O(\delta^\sigma)$，$0<\sigma\leqslant1$，$f^{(k)}[\varphi_-]\in e^{(0)}_{p/\beta+\varepsilon}$，$\varepsilon>0$，则对$q\geqslant2$，

$$\|f-S_n(z,f)\|_{L^q(\Gamma)}=O\Big\{\frac{1}{n^\theta}e^{(0)}_{p/\beta+\varepsilon}\Big(\frac{1}{n},f^{(k)}[\varphi_-]\Big)\Big\},$$

$$\theta=\beta\Big[1+\frac{1}{\max(\beta p,2)}-\frac{1}{p}\Big]$$

$$+(k-1)\beta-(2-\alpha)\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\Big)+\varepsilon;$$

$$\|f-S_n(z,f)\|_{C^{(l)}(\bar D)}=O\Big\{\frac{1}{n^{\theta'}}e_{p/\beta+\varepsilon}\Big(\frac{1}{n},f^{(k)}[\varphi_-]\Big)\Big\},$$

只要 $\theta'=\theta-(2-\alpha)\Big(\dfrac{1}{q}+l\Big)>0$.

例4. 设$\Gamma\in$ P.L.(α,β)，$\alpha,\beta>0$，$f^{(k)}\in E_p(D)$，$p\geqslant1$，$\omega(\delta,f^{(k)},L^p(\Gamma))=O(\delta^\sigma)$，$0<\sigma\leqslant1$，$f^{(k)}[\varphi_-]\in e^{(0)}_{p/\beta}$，则

$$\|f-S_n(f)\|_{L^q(\Gamma)}=O\Big\{\frac{(\lg n)^{k+1}}{n^\theta}e^{(0)}_{p/\beta}\Big(\frac{1}{n},f^{(k)}[\varphi_-]\Big)\Big\},$$

$$\theta=\beta\Big[1+\frac{1}{\max(\beta p,2)}-\frac{1}{p}\Big]$$

$$+(k-1)\beta-(2-\alpha)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right);$$

$$\|f-S_n(f)\|_{C(\overline{D})}^{(l)}=O\left\{\frac{(\lg n)^{k+1}}{n^{\theta'}}e_{p/\theta}^{(0)}\left(\frac{1}{n},f^{(k)}[\varphi_-]\right)\right\},$$

只要 $\theta'=\theta-(2-\alpha)\left(\frac{1}{q}+l\right)>0$。

例5．设$\Gamma\in(\Lambda)$，$f^{(k)}[\varphi_-]\in e_p^{(l)}$，$f^{(k)}\in E_p(D)$，$p>1$，则

$$\|f-S_n(f)\|_{L^q(\Gamma)}^{(r)}=O\left\{\frac{1}{n^{\theta}}e_p^{(l)}\left(\frac{1}{n},f^{(k)}[\varphi_-]\right)\right\},$$

只要$\theta=k+l-r+q^{-1}-(\min(2,p))^{-1}>0$即可，这里$q\geqslant2$。参看第六章4.4节定理8*的系2。

对一般区域，利用第五章的直接定理和第二转引理（注意L^2是嵌入C中的，并注意C和L^2间的多项式不等式（第四章的定理3））则有

例6．设$f^{(k)}\in A(D)\cap C(\overline{D})$，令$\omega_{(k)}(\delta)=\omega(\delta,f^{(k)},C(\overline{D}))$，则

$$\|f-S_n(f)\|_{C(\overline{D})}=O\left\{\left[J_D\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right]^k\frac{\omega_{(k)}\left(J_D\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right)}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}}\right\},$$

而对$\Gamma\in$ P.S.(α,β)，$\alpha,\beta>0$（利用第一转化引理），则有

$$\|f-S_n(f)\|_{C(\overline{D})}^{(l)}=O\left\{\frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}}\omega_{(k)}\left(\frac{1}{n^{\beta-\varepsilon}}\right)\right\},$$

$$\sigma=k\beta-\frac{2-\alpha}{2}-(2-\alpha)l>0;$$

对$\Gamma\in$ P.L.(α,β)，$\alpha,\beta>0$，有

$$\|f-S_n(f)\|_{C(\overline{D})}^{(l)}=O\left\{\frac{(\lg n)^{k\beta}}{n^{\sigma}}\omega_{(k)}\left(\left(\frac{\lg n}{n}\right)^{\beta}\right)\right\}.$$

利用 Fekete 插补多项式的结果有

例7．设$f^{(k)}\in E_p(D_R^+)$，$f^{(k)}[\varphi_{-,R}]\in e_p^{(l)}$，$p>1$，$R>1$，$\varphi_{-,R}$映$|w|>1$为$\overline{D_R^+}$之补集，无穷远点相互对应，则

$$\|f-S_n(f)\|_{C(\overline{D})}^{(r)}=O\left\{\frac{B}{n^{\theta}R^{n}}e_p^{(l)}\left(\frac{1}{n},f^{(k)}[\varphi_{-,R}]\right)\right\},$$

$$\theta=\frac{1}{p}-4+k+l,\quad B=U_D\left(\frac{1}{n}\right)^{-(\frac{1}{2}+r)},$$

$$\|f-S_n(f)\|_{C(\overline{D}_\rho^+)}^{(r)}=O\left\{\left(\frac{\rho}{k}\right)^n n^{-\theta+\frac{1}{2}+r}e_p^{(l)}\left(\frac{1}{n},f^{(k)}[\varphi_{-;R}]\right)\right\},$$

$$1<\rho\leqslant R;$$

当D为凸区域的“反像”时，θ可改为$\frac{1}{\rho}-3+k+l$；当$D\in$ P.S.(α,β)，α，$\beta>0$时，可改为$\frac{1}{p}-4+k+l+\alpha-\varepsilon,\varepsilon>0$；对$D\in$ P.L.(α,β)，$\varepsilon=0$。

1.2. 我们现在来考虑映射函数$\psi_+(z)$展成直交多项式级数的问题。

不妨设区域D包含原点$z=0$，$\psi_+(0)=0$。由于

$$\int_\Gamma(\psi_+'(z))^{\frac{1}{2}}\overline{H_n(z)}|dz|=\int_0^{2\pi}H_n(\varphi_+(e^{i\theta}))(\varphi_+'(e^{i\theta}))^{\frac{1}{2}}d\theta$$

$$=2\pi\overline{H_n(0)}(\varphi_+'(0))^{\frac{1}{2}},$$

因此有 $(\psi_+'(z))^{\frac{1}{2}}\sim2\pi(\varphi_+'(0))^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\overline{H_k(0)}H_k(z)$。

设$\Gamma\in(\Lambda^*)\cap(\Lambda_{(k)})$（参看第五章3.4节的定义），则

$$\omega\left(\delta,\ \frac{d^k}{dz^k}(\psi_+')^{\frac{1}{2}},C(\Gamma)\right)=O\{\omega(\delta,\psi_+^{(k+1)},C(\Gamma)\}$$

$$=O\left\{\int_0^\delta\frac{\varepsilon_{(k)}(t)}{t}dt+\delta\int_\delta^l\varepsilon_{(k)}(t)\frac{dt}{t^2}+\delta\lg\frac{1}{\delta}\right\},$$

$$\varepsilon_{(k)}(\delta)=\omega\left(\delta,\frac{d^k}{ds^k}\arg z'(s),\ C(\Gamma)\right),$$

$z=z(s)$为Γ的自然方程，l为Γ的长度（参看[2]）。

因此有

定理1. 设$\Gamma\in(\Lambda^*)\cap(\Lambda_{(k)})$，则有

$$\left\|(\psi_+'(z))^{\frac{1}{2}}-2\pi(\varphi_+'(0))^{\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{n}\overline{H_m(0)}H_m(z)\right\|_{C(\overline{D})}^{(r)}$$

$$=O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{k-r-\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\varepsilon_{(k)}(t)\,\frac{dt}{t}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\varepsilon_k(t)\,\frac{dt}{t^2}+\frac{\lg n}{n}\right)\right\};$$

$$\|\Psi_+-S_n(\Psi_+)\|_{C(\overline{D})}^{(r)}$$

$$=O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{k-r+\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\varepsilon_{(k)}(t)\frac{dt}{t}+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\varepsilon_{(k)}(t)\frac{dt}{t^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\lg n}{n}\right)\right\}.\square$$

设 $\Gamma\in(\overset{(p)}{\Lambda}_{(k)})$，$1<p<\infty$（参看第五章 3.5 节中引理1内之定义），则由[2]（中之方法）有

$$\Psi_+^{(k+1)}\in E_p(D),$$

$$\omega(\delta,\ \Psi_+^{(k+1)}[\varphi_-],\ L^p(0,2\pi)),\omega(\delta,g[\varphi_-],L^p(0,2\pi))$$

$$=O\left\{\int_0^{\delta}\frac{\overset{(p)}{I}_{(k)}(t)}{t}dt+\delta\int_{\delta}^{l(p)}\overset{}{I}_{(k)}(t)\frac{dt}{t^2}+\delta^{1-\frac{1}{p}}\right\},$$

这里 $\quad g=\dfrac{d^k}{dz^k}(\Psi_+')^{\frac{1}{2}}$

$$\overset{(p)}{I}_{(k)}(\delta)\ =\omega\left(\delta,\ \frac{d^k}{ds^k}\arg z'(s),\ L^p(\Gamma)\right)$$

因此由Faber级数理论（第六章4.4节）和第一转化引理可得

定理2. 设$\Gamma\in(\Lambda)\cap(\overset{(p)}{\Lambda}_{(k)})$，$1<p<\infty$,则对$2\leqslant q\leqslant\infty$，

$$\|(\Psi_+'(z))^{\frac{1}{2}}-2\pi(\varphi_+'(0))^{\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{n}\overline{H_m(0)}\,H_m(z)\|_{L^{(q)}(\Gamma)}^{(r)}$$

$$=O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\theta}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}\overset{(p)}{I}_{(k)}(t)\frac{dt}{t}+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{l(p)}\overset{}{I}_{(k)}(t)\frac{dt}{t^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\right]\right\},$$

这里 $\quad \theta=k-r+\dfrac{1}{q}-(\min(2,\ p))^{-1}$，$r\leqslant k$；

$$\|\Psi_+-S_n(\Psi_+)\|^{(r)}_{L^q(\Gamma)}=O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\theta}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}I^{(p)}_{(k)}(t)\frac{dt}{t}+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}I^{(p)}_{(k)}(t)\frac{dt}{t^2}+\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\right]\right\},$$

这里　$\theta=k+1-r+q^{-1}-(\min(2,\ p))^{-1}$，$r\leqslant k+1$。□

由1.1节的例3、例4，经过简单计算（计及Ψ_+的连续性），就可得

定理3. 设$\Gamma\in$P.S.$(\alpha,\ \beta)$，α，$\beta>0$，则有

$$\|\Psi_+-S_n(\Psi_+)\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\sigma-\varepsilon}\right\},\quad \varepsilon>0,$$

$$2\leqslant p\leqslant\infty,\ \delta=\left(\frac{1}{2-\beta}+\frac{\beta}{p}\right)\beta-(2-\alpha)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right);$$

设$\Gamma\in$P.L.$(\alpha,\ \beta)$，α，$\beta>0$，则有

$$\|\Psi_+-S_n(\Psi_+)\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{\lg n}{n^{\sigma}}\right\}.\ \square$$

利用1.1节例7即可得

定理4. 设Γ为解析的Jordan曲线，则

$$\left\|(\Psi_+'(z))^{\frac{1}{2}}-2\pi(\varphi_+'(0))^{\frac{1}{2}}\sum_{m=0}^{n}\overline{H_m(0)}H_m(z)\right\|^{(k)}_{C(\overline{D})}=O(\rho^n),$$

$$\|\Psi_+(z)-S_n(z,\ \Psi_+)\|^{(k)}_{C(\overline{D})}=O(\rho^n).$$

这里$\rho=\rho(k)>0$为某小于1的常数。□

1.3. 现在我们来讨论直交多项式级数在边界上的一些收敛性的判别法则。

引理1. 记$r_n=\left(\sum_{n}^{\infty}c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$，则当

$$\sum_{k=1}^{\infty}r_{n_k}^2\frac{\log k}{k}<\infty$$

时，$\sum_{n=0}^{\infty}c_nH_n(z)$在$\Gamma$上几乎处处收敛。□

这个命题对于实的直交级数是早已证明了的（参看[3] 中第五章），同样的方法可以用来证明本引理。

对于$f(z)\in E_2(D)$，$c_n=c_n(f)$是 Fourier 系数，即前面引的r_n即$r_n(f)$。

因此，若有$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{L^2(\Gamma)}\leqslant\varepsilon(n)$$

则有$r_{n+1}(f)\leqslant\varepsilon(n)$，故引理就导致

定理5.　设$h(t)\nearrow+\infty$，$\varepsilon(t)\searrow 0$，

$$\int^{\infty}\varepsilon^2(h(t))\frac{\lg t}{t}dt<\infty,$$

则$S_{[h(n)]}(f)$ 在Γ上几乎处处收敛，这里$[h(n)]$为$h(n)$ 的整数部分。□

由1.1.节的例1（或例2）的结论就可得

系1.　设$\Gamma\in L(r,\ 1)$，$r>1$，$\dfrac{t}{d_\Gamma(t)}=O(1)$，$f\in E_2(D)$，

$f[\varphi_-]\in e_{2,h}^{(0)}$，$\dfrac{1}{h}=1-\dfrac{1}{r}$，

$$\int^{\infty}\left\{\int_0^{h(t)^{-\lambda}}\omega(\eta,\ f,L^2(\Gamma))\frac{d\eta}{\eta}+e_{2,h}^{(0)}\left(\frac{1}{h(t)},\ f[\varphi_-]\right)\right.$$

$$\left.\lg h(t)\right\}^2\times\frac{\lg t}{t}dt<\infty,$$

则$S_{[h(n)]}(f)$在Γ上几乎处处收敛，$\lambda>0$为任给的充分大的常数。□

因此，若

$$\omega(\delta,\ f,\ L^2(\Gamma)),\ e_{2,h}^{(0)}(\delta,\ f[\varphi_-])=O\left\{\left(\lg\frac{1}{\delta}\right)^{-\sigma}\right\},$$

这里$\delta>2$，则必$S_n(f)$在Γ上几乎处处收敛。

利用例5的结论就可得到

系2.　设$\Gamma\in(\Lambda)$，$1<p\leqslant 2$，$f(z)\in E_p(D)$，

$$\int^{\infty}e_p^{(0)}\left(\frac{1}{h(t)},\ f[\varphi_-]\right)^2 h(t)^{-\theta}\frac{\lg t}{t}dt<\infty,$$

$$\theta=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\leqslant 0,$$

则$S_{[h(n)]}(z, f)$ 在Γ上几乎处处收敛。□

特别当

$$e_s^{(0)}(\delta, f[\varphi_-]) = O\left\{\delta^{-\frac{\theta}{2}}\left(\lg\frac{1}{\delta}\right)^{-\sigma}\right\}, \ \delta>1.$$

时，$S_n(z, f)$ 在Γ上几乎处处收敛。

$\sum c_n H_n(z)$什么时候在Γ上方按任何排列次序收敛（无条件收敛）呢？这可由下面的命题给出答案。

若有上升的序列$\{K(n)\}$使得

1° $0<K(n)\leqslant K(n+1)\to\infty$；

2° $\sum|c_n|^2K(n)(\log n)^2<\infty$；

3° 存在正整数序列$\{n_k\}$使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}[K(n_k)]^{-1}<\infty, \ \lg n_{k+1}<\lambda\lg n_k,$$

λ为某一正的常数。则$\sum c_n H_n(z)$ 在Γ上按任何排列次序几乎处处收敛。

这一命题的证明和实直交级数的相应结果相同（参看［3］第五章）。

若取$n_k=[\exp\exp k+1]$，则上命题可化成一较好的应用式。这时，由

$$\sum c_n^2(\lg(\lg n)^{1+\varepsilon}(\lg n)^2<\infty, \ \varepsilon>0.$$

即可得到上命题的结论。

由此经过一些简单的计算，就可得上命题的一个便于应用的推论

定理6. 设$f\in E_2(D)$，并有$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{L^2(\Gamma)}=O\{\varepsilon(n)\}, \ \varepsilon(t)\searrow 0,$$

$$\int^{\infty}(\lg t)(\lg\lg t)^{1+\varepsilon}\frac{\varepsilon^2(t)}{t}dt<\infty, \ \varepsilon>0,$$

则$\sum c_n(f)H_n(z)$在Γ上按任何排列次序是几乎处处收敛的。□

由例题1的结论就可得

系1. 设$\Gamma\in L(r, 1)$，$r>1$，$\frac{t}{d_\Gamma(t)}=O(1)$，$f(z)\in E_2$

(D), $f(\varphi_-)\in e_{2h}^{(0)}$, $r^{-1}+h^{-1}=1$,

$$\int^{\infty}\left\{\int_0^{t^{-\lambda}}\omega(\xi,\ f,\ L^2(\Gamma))\frac{d\xi}{\xi}+(\lg t)e_{2h}^{(0)}\left(\frac{1}{t},f[\varphi_-]\right)\right\}^2$$

$$(\lg t)(\lg\lg t)^{1+\varepsilon'}\frac{dt}{t}<\infty\quad(\varepsilon'>0\text{充分小}),$$

$\lambda>0$为任给定的常数，则$\sum c_n(f)H_n(z)$ 在Γ上按任何排列次序几乎处处收敛。□

特别是，若$\Gamma\in P_*S\ (\alpha,\ \beta)$，$\alpha,\beta>0$，$f(z)\in E_2(D)$，$f[\varphi_-]\in e^{(0)}_{\frac{2}{\mu}+\varepsilon}$，$\varepsilon>0$，$\omega(\delta,\ f,\ L^2(\Gamma))$，$e^{(0)}_{\frac{2}{\mu}+\varepsilon}(\delta,\ f[\varphi_-])=O(|\lg\delta|^{-\sigma})$，$\sigma>2$，则 $\sum c_n(f)H_n(z)$ 在Γ上按任何排列次序几乎处处收敛（对$\Gamma\in P_*L_*(\alpha,\ \beta)$，$\varepsilon$可为零）。

同样由1.1节例5之结论可得

系2. 设$\Gamma\in(\Lambda)$，$f(z)\in E_p(D)$，$1<p\leqslant 2$，

$$\int^{\infty}t^{\frac{1}{p}-\frac{3}{2}}(\lg t)(\lg\lg t)^{1+\varepsilon}e_p^{(0)}\left(\frac{1}{t},\ f[\varphi_-]\right)dt<\infty,$$

$\varepsilon>0$为任给的充分小的常数，则$\sum c_n(f)H_n(z)$ 在Γ上按任何排列次序几乎处处收敛。□

特别是，若

$$e_p^{(0)}(\delta,\ f[\varphi_-])=O\{\delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|\log\delta|^{-\sigma}\},\quad \sigma>2$$

时有此结论.

现在我们来考虑直交多项式级数在Γ上按Cesaro意义求和的问题。我们有

引理2. 设$\sum\limits_{n=2}^{\infty}|c_n|^2(\lg\lg n)^2<\infty$，则 $\sum c_nH_n(z)$ 在Γ上几乎处处可 $(c,\ \lambda)$ $(\lambda>0)$ 求和。□

证法同实直交级数的一样。

用$\varepsilon(n)$来表写$c_n(f)$，并把上面的不等式化成便于应用的积分形式，则可得

定理7. 设$f(z)\in E_2(D)$，有$p_n\in(P_n)^A$使得

$$\|f-p_n\|_{L^2(\Gamma)}=O\{\varepsilon(n)\},\quad \varepsilon(t)\searrow 0,$$

$$\int^{\infty}\varepsilon^2(t)\frac{\lg\lg t}{t\lg t}dt<\infty,$$

则$\sum c_n(f)H_n(z)$在Γ上几乎处处可（c，λ）（$\lambda>0$）求和。□

由1.1.节例1的命题即可得

系1. 设$\Gamma\in L$（r，1），$r>1$，$f(z)\in E_2(D)$，$f[\varphi_-]\in e^{(0)}_{2,h}$，

$$h^{-1}+r^{-1}=1,\frac{t}{d_\Gamma(t)}=O(1),\int^{\infty}\left\{\int_0^{t^{-\sigma}}\omega(\xi,\ f,\ L^2(\Gamma))\frac{d\xi}{\xi}+(\lg t)e^{(0)}_{2,h}\left(\frac{1}{t},\ f[\varphi_-]\right)\right\}^2\times\frac{\lg\lg t}{t\lg t}dt<\infty,$$ $\sigma>0$为任给定的充分大的常数，则$\sum c_n(f)\times H_m(z)$在Γ上几乎处处可（c，λ）（$\lambda>0$）求和。□

特别地，若$\Gamma\in$P.S.（α，β），α，$\beta>0$，
$f(z)\in E_2(D)$，$f[\varphi_-]\in e^{(0)}_{\frac{2}{\beta}+\varepsilon}$，$\varepsilon>0$，

$$\omega(\delta,\ f,\ L^2(\Gamma)),\quad e^{(0)}_{\frac{2}{\beta}+\varepsilon}(\delta,\ f[\varphi_-])$$

$$=O\{|\lg\delta|^{-1}|\lg\lg\delta|^{-\theta}\},$$

这里$\theta>1$，则有上面的结论。

由1.1节例5之结果即可得

系2. 设$\Gamma\in(\Lambda)$，$f(z)\in E_p(D)$，$1<p\leqslant 2$，

$$\int^{\infty}t^{\frac{1}{p}-\frac{3}{2}}\frac{\lg\lg t}{\lg t}e^{(0)}_p\left(\frac{1}{t},\ f[\varphi_-]\right)dt<\infty$$

则$\sum c_n(f)H_n(z)$在Γ上几乎处处（c，λ）（$\lambda>0$）可求和。□

特别若

$$e^{(0)}_p(\delta,\ f[\varphi_-])=O\{\delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|\lg\lg\delta|^{-\theta}\},\quad \theta>1$$

时，就有上面的结论。

若绝对收敛，对于$f(z)\in E_2(D)$，有不等式：

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_{n_k}(f)|\leqslant\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}r_{n_k}(f),$$

$\{n_k\}$为任何正整数上升序列。

这结果对实直交级数的情况是由Стечкин得到的（参看[4]）。这里的证法相同。这一引理的直接推论是

定理8. 设对$f(z)\in E_2(D)$，有$p_n\in(P_n)^A$使得 $\|f-p_n\|_{L^2(\Gamma)}=O\{\varepsilon(n)\}$，$\varepsilon(t)\searrow 0$，$h(t)\nearrow\infty$，

$$\int^{\infty}\varepsilon(h(t))t^{-\frac{1}{2}}dt<\infty,$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}C_{[h(n)]}(f)$绝对收敛，因而

$$\sum C_{[h(n)]}(f)H_{[h(n)]}(z)$$

在Γ上几乎处处绝对收敛。

后一论断是由于

$$\int_{\Gamma}\sum|C_{[h(n)]}(f)H_{[h(n)]}(z)||dz|$$

$$\leqslant\sum|C_{[h(n)]}(f)|\int_{\Gamma}|H_{[h(n)]}(z)||dz|$$

$$\leqslant\sum|C_{[h(n)]}(f)|(l(\Gamma))^{-\frac{1}{2}}\left(\int_{\Gamma}|H_{[h(n)]}(z)|^2|dz|\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=(l(\Gamma))^{\frac{1}{2}}\sum|C_{[h(n)]}(f)|.$$

至于在什么点上绝对收敛，下面的命题给出了一种答复。

若$\sum r_n n^{-\frac{1}{2}}<\infty$，$\sum\limits_{k=0}^{n}|H_k(z_0)|^2=0(n)$，$z_0\in\Gamma$，则$\sum C_nH_n(z_0)$绝对收敛。

证法可由[4]中引出，这补题也就是说：

若有$p_n\in(P_n)$，$\|f-p_n\|_{L^2(\Gamma)}=0\{\varepsilon(n)\}$，$\varepsilon(t)\searrow 0$，$\int^{\infty}\varepsilon(t)t^{-\frac{1}{2}}dt<\infty$，$\sum\limits_{k=0}^{n}|H_k(z_0)|=O(n)$，则必

$$\sum|C_n(f)H_n(z_0)|<\infty.$$

由1.1节例1之命题可知：

设$\Gamma\in L(r,1)$，$r>1$，$\dfrac{t}{d_\Gamma(t)}=O(1)$，$f(z)\in E_2(D)$，$f[\varphi_-]$

$\in e_{2\lambda}^{(0)}$, $h^{-1}+r^{-1}=1$, $h(t)\nearrow\infty$,

$$\int^{\infty}\left\{\int_0^{h(t)^{-\lambda}}\omega(\xi,\ f,\ L^2(\Gamma))\frac{d\xi}{\xi}\right.$$
$$\left.+(\lg h(t))e_{2\lambda}^{(0)}\left(\frac{1}{h(t)},\ f[\varphi_-]\right)\right\}t^{-\frac{1}{2}}dt<\infty,$$

$\lambda>0$为任给的充分大的常数，则$\sum|C_{[h(n)]}(f)|<\infty$。

特别是有

系 1．设$\Gamma\in$ P.S.$(\alpha,\ \beta)$，$\alpha,\ \beta>0$，$f(z)\in E_2(D)$，$f[\varphi_-]\in e_{\frac{2}{\beta}+\varepsilon}^{(0)}$，$\varepsilon>0$，

$$\omega(\delta,\ f,\ L^2(\Gamma)),\ e_{\frac{2}{\beta}+\varepsilon}^{(0)}(\delta,\ f[\varphi_-])$$
$$=0\{\delta^{\frac{1}{2}}|\lg\delta|^{-\sigma}\},\ \ \sigma>1,$$

则$\sum|C_n(f)|<\infty$，因而$\sum|C_n(f)H_n(z)|<\infty$对几乎所有$z\in\Gamma$成立；而当$\sum\limits_{m=1}^{n}|H_m(z_0)|=O(n)$，$z_0\in\Gamma$时，$\sum|C_n(f)H_n(z_0)|<\infty$。□

对$\Gamma\in$ P.L.$(\alpha,\ \beta)$，$\alpha,\ \beta>0$，则$\varepsilon=0$。

由1.1节的例子5就可得

系 2．设$\Gamma\in(\Lambda)$，$f(z)\in E_p(D)$，$1<p\leqslant 2$，$h(t)\nearrow\infty$，

$$\int^{\infty}e_p^{(0)}\left(\frac{1}{h(t)},\ f[\varphi_-]\right)\frac{h(t)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}}}dt<\infty,$$

则$\sum|C_{[h(n)]}(f)|<\infty$。□

附记：当Γ退化为一可求长非闭的Jordan弧线L时，同上面一样，在L上按线积分建立直交多项式，那么对$f(z)\in L^2(L)$同样可以建立类似于上面一系列结果的定理。1.1节和1.3节相应的结论读者不难列出来，这里从略。

1.4. 若考虑按面积积分的直交多项式级数，也可以得到许多结果。

设$\{K_n(z)\}$为$L^2(D)$中之正规直交多项式系：

$$\iint_D K_n(z)\overline{K_m(z)}dxdy=\begin{cases}1 & n=m;\\0 & n\neq m.\end{cases}$$

这里$K_n(z)\in(P_n)^A$。

若$f(z)\in A(D)\cap L(D)$，则对$\{K_n(z)\}$的Fourier展式为

$$f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}C_k^*(f)K_k(z),$$

$$C_k^*(f)=\iint_D f(z)\overline{K_k(z)}dxdy$$

记

$$S_n^*(z,\ f)=S_n^*(f)=\sum_{k=0}^{n}C_k^*(f)K_k(z),$$

则显然$S_n^*(z,\ f)=M(f,\ \ \|(P_n)^A\|_{L^2(D)})$对$f(z)\in A(D)\cap L^2(D)$是成立的。

我们知道，当D为Carathéodory型区域时，

$$\|S_n^*(f)-f\|_{L^2(D)}\to 0$$

(Farrell 定理，参看[15])，因而$S_n^*(f)$在D中广义一致收敛于$f(z)$，并且$\sum C_n^*(f)K_n(z)$是绝对收敛的(参看[6])。

至于误差$\|f-S_n^*(f)\|_{L^q(D)}^{(h)}$，$\|f-S_n^*(f)\|_{L^q(\Gamma)}^{(h)}$完全可以由第一、第二转化引理（和相应的嵌入不等式）导出来。下面是一些简单的例子。

例 8　若有$p_n\in(P_n)^A$，$\|f-p_n\|_{L^q(D)}\leqslant\varepsilon(n)$，$D\in S_2(r_0,\theta_0)$，$U_D\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant r_0$，则有

$$\|f-S_n^*(f)\|_{L^q(D)}\leqslant\left\{\left(2\frac{12e^2\text{mes}D}{\theta_0 U_D\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}+1\right\}\varepsilon(n).$$

这是第二转化原则的直接推论。

一些特殊的情况就是

例 9　设Γ为Jordan曲线，$f^{(h)}\in A(D)\cap C(\overline{D})$，$f^{(h)}$在$\overline{D}$上

之连续模为$w_{(k)}(\delta)$，则有

$$\|f-S_n^*(f)\|_{C(\bar{D})}=0\left\{\left[J_D\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right]^k\frac{w_{(k)}\left(J_D\left(\frac{\lg n}{n}\right)\right)}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}\right\}.$$

而当$\Gamma\in$ P.S.$(\alpha,\ \beta)$，$\beta>0$时

$$\|f-S_n^*(f)\|_{C^{(r)}(\bar{D})}=0\left\{\frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}}\omega_{(k)}\left(\frac{1}{n^{\beta-\varepsilon}}\right)\right\},$$

这里$\sigma=k\beta+(r+1)(\alpha-2)>0$，$\varepsilon>0$；当$\Gamma\in$ P.L.$(\alpha,\ \beta)$，$\beta>0$时，

$$\|f-S_n^*(f)\|_{C^{(r)}(\bar{D})}=O\left\{\left(\frac{\lg n}{n}\right)^{k\beta}\right.$$

$$\left.n^{(r+1)(\alpha-2)}\omega_{(k)}\left(\left(\frac{\lg n}{n}\right)^{\beta}\right)\right\}.$$

这里引用了例 8 和第五章定理 2 及转化引理的结论。

例10 设Γ为可求长Jordan曲线，$f(z)\in E_q(D)$，$\delta_{2,q}(D)<\infty$(参看第四章定理13)，则由$\|f-p_n\|_{L^q(\Gamma)}\leqslant\varepsilon(n)$，用第二转化引理可得

$$\|f-S_n^*(f)\|_{L^q(\Gamma)}\leqslant\left\{8a_q(l(\Gamma))^{\frac{1}{q}}e\theta_0^{-\frac{1}{2}}\frac{\delta_{2,q}(D)}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)}+1\right\}\varepsilon(n).$$

一般由$\|f-p_n\|_{L^2(D)}\leqslant\varepsilon(n)$，$\varepsilon(t)\searrow 0$，可得

$$\|f-S_n^*(f)\|_{L^p(D)}\leqslant\frac{4}{\lg u}\int_n^\infty\left[\frac{12e^2}{\theta_0 U_D\left(\frac{1}{t}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\frac{\varepsilon\left(\frac{t}{u}\right)}{t}dt,$$

$2\leqslant p\leqslant\infty$，$u>1$。

我们不再引录类似的结果，下面只谈谈等角写像函数展成直交多项式级数的问题。

不失一般性，不妨设D包含原点$z=0$。设函数$w=g(z)$等角映射D于$|w|<$R，$g(0)=0$，$g'(0)=1$。当D为Carathéodory 型区域时，根据前面的说明，$S_n^*(g')$在D中是广义一致收敛于$g'(z)$

的，并且$S_n^*(g')$绝对收敛且在$L^2(D)$中收敛．而且，显然有下面展开式

$$g'(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\pi R^2\overline{K_k(0)}K_k(z).$$

像1.2节一样我们容易证得下面一系列结果：

A）设$\Gamma\in P.S.(\alpha,\ \beta)$，$\beta>0$，则

$$\|\Psi_+(z)-S_n^*(z,\psi_+)\|_{L^p(D)}=O\left\{\frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}}\right\},$$

$\varepsilon>0$，$2\leqslant p\leqslant\infty$，$\sigma=\left(\frac{1}{2-\beta}+\frac{2\beta}{p}\right)\beta-2(2-\alpha)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)$；

$$\|\psi_+(z)-S_n^*(z,\ \psi_+)\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{1}{n^{\sigma-\varepsilon}}\right\},$$

$\varepsilon>0$，$1<p<\infty$，$\sigma=\left(\frac{1}{2-\beta}+\frac{\beta}{p}\right)\beta-(2-\alpha)$.

若$\Gamma\in P.L.(\alpha,\ \beta)$，$\beta>0$，则

$$\|\psi_+(z)-S_n^*(z,\ \psi_+)\|_{L^{2r}(D)}=O\left\{\frac{\lg n}{n^{\lambda}}\right\},$$

$$\lambda=\left(\frac{1}{2-\beta}+\frac{2\beta}{q}\right)\beta-(2-\alpha)\left(1-\frac{1}{r}\right),\quad 1\leqslant r<q;$$

$$\|\psi_+(z)-S_n^*(z,\ \psi_+)\|_{L^p(\Gamma)}=O\left\{\frac{\lg n}{n^{\lambda}}\right\},$$

$1<p<\infty$，$\lambda=\left(\frac{1}{2-\beta}+\frac{\beta}{p}\right)\beta+(2-\alpha)$.

B）设$\Gamma\in(\Lambda^*)\cap(\Lambda_{(k)})$，则对$r\leqslant k$，

$$\left\|g'(z)-\sum_{m=0}^{n}\pi R^2\overline{K_m(0)}K_n(z)\right\|_{C(\bar{D})}^{(r)}$$

$$=O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{k-r-1}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\varepsilon_{(k)}(t)\frac{dt}{t}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{l}\varepsilon_{(k)}(t)\frac{dt}{t^2}+\frac{\lg n}{n}\right)\right\},$$

对$r\leqslant k+1$，有

$$\|\psi_+ - \mathbf{S}_n^*(\psi_+)\|_{C(D)}^{(r)}$$

$$= O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{k-r}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\varepsilon_{(k)}(t)\,\frac{dt}{t} + \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{l}\varepsilon_{(k)}(t)\,\frac{dt}{t^2} + \frac{\lg n}{n}\right)\right\}.$$

C) 设$\Gamma \in (\Lambda) \cap (\overset{(p)}{\Lambda}_{(k)})$，$1<p<\infty$，则

$$\left\|g'(z) - \sum_{m=0}^{n}\pi\mathrm{R}^2\,\overline{K_m(O)}K_m(z)\right\|_{L^q(D)}$$

$$= O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\theta}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\overset{(p)}{I}_{(k)}(t)\frac{dt}{t}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{l}\overset{(p)}{I}_{(k)}(t)\frac{dt}{t^2} + \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\right)\right\},$$

$$\theta = k - \frac{1}{\min(p,\ q/2)} + \frac{4}{q} - 1;$$

$$\left\|g'(z) - \sum_{m=0}^{n}\pi\mathrm{R}^2\,K_m(0)\,K_m(z)\right\|_{L^q(\Gamma)}^{(r)}$$

$$= O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\theta'}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\overset{(p)}{I}_{(k)}(t)\frac{dt}{t}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{l}\overset{(p)}{I}_{(k)}(t)\frac{dt}{t^2} + \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\right)\right\}$$

$$\theta' = k - r - 1 - \frac{1}{\min(p,\ q)} + \frac{1}{q},\quad r \leqslant k;$$

$$\|\psi_+ - \mathbf{S}_n^*(\psi_+)\|_{L^q(D)}$$

$$= O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\theta+1}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\overset{(p)}{I}_{(k)}(t)\frac{dt}{t}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{l}\overset{(p)}{I}_{(k)}(t)\frac{dt}{t^2} + \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\right)\right\}.$$

$$\|\psi_+ - \mathbf{S}_n^*(\psi_+)\|_{L^q(\Gamma)}^{(r)}$$

$$= O\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\theta'+1}\left(\int_0^{\frac{1}{n}}\overset{(p)}{I}_{(k)}(t)\frac{dt}{t}\right.\right.$$

$$+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{l(p)} I_{(k)}(t)\frac{dt}{t^2}+\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}\Big)\Big\},$$

这里$r\leqslant k+1$.

D）设Γ为解析Jordan曲线，则

$$\left\|g'(z)-\sum_{m=0}^{n}\pi R^2\overline{K_m(O)}K_m(z)\right\|_{C(\overline{D})}^{(k)}=0(p^n);$$

$$\|\psi_+(z)-S_n^*(z,\ \psi_+)\|_{C(\overline{D})}^{(k)}=O(p^n),$$

这里k为任何非负整数，$0<p=\rho(k)<1$.

附记：我们同样可以讨论按权的（线性的，面性的）直交多项式级数，特别是权函数界于两个正常数之间时，前面许多结果相应是成立的，一般是在估计式中多了一个常数因子，所以并不会改变一些本质的东西，但这时直交多项式的形式改变了．而且可在$W_2^{(l)}(\Gamma)$，$W_2^{(l)}(D)$中建立这种理论．

一般说，引入内积的方式是多种多样的．对不同的内积一般说都可作平行于我们作过的讨论．特别是关于1.3节的一些结果．

本节的许多结果都可推广到（像第四章，第五章或第六章中介绍的）“分片多连”的集台上．

§2．一般解析最优逼近多项式的一些注记

2.1. 由第四章得到的一系列不等式（包括由它们可能的组合而得的不等式），根据第二转化引理（必要时结合第一转化引理）就可以得到许许多多关于解析最优逼近多项式或调合最优逼近多项式在各种范数意义下的误差估计的转化．关于这类问题处理的技巧我们在第二章、第三章、第五章（Bieberbach多项式理论）以及在本章§1中介绍不少了，所以对最优解析逼近多项式或调合最逼近多项式其他有关的结果再作全面介绍和全面讨论是没有什么必要的．下面我们谈谈由有关的嵌入不等式和第二转化

引理一般可得到哪些类型的结果（自然，为了叙述方便，有些条件是简化了的）。

设E为一函数集，$(P_n)^*\subset(P_n)^A\cap E$，若

$$\|p_n\|^+\leqslant\varphi(n,\ \|p_n\|^-),\ p_n\in(P_n)^*,\tag{1}$$

$$\|e\|^-\leqslant B(\|e\|^-),\ e\in E,\tag{2}$$

$\varphi(x,\ t)$，$B(t)$ 对x，t 都是非降的，$\|\cdot\|^\pm\in p(h^\pm)$。若有$Q^+\in(P_n)^*$使得$\|f-Q_n^+\|^+\leqslant\varepsilon^+(n)$，$f\in E$，则必

$$\|f-M(f,\ \|(P_n)^*\|^-)\|^+$$
$$\leqslant h^+\{\varepsilon^+(n)+\varphi(n,\ 2h^-B(\varepsilon^+(n)))\}.$$

若有$Q^-\in(P_n)^*$，$\|f-Q_n^-\|^-\leqslant\varepsilon^-(n)$，则在一定条件下，（对具体问题，读者不难列出这种所需要的条件），

$$\|f-M(f,\ \|(P_n)^*\|^*)\|^-$$
$$\leqslant h^-\{\varepsilon^-(n)+B(2h^+D^+(n))\},$$

$$D^+(n)=2(h^+)^4(h^+)^{-\frac{\lg n}{\lg u}}(\lg u)^{-1}$$
$$\times\int_n^\infty(h^+)^{\frac{\lg t}{\lg u}}\varphi\left[t,2h^-\varepsilon^-\left(\frac{t}{u}\right)\right]\frac{dt}{t},\ u>1,$$

若代替(2) 式的是

$$\|p_n\|^-\leqslant\psi(n,\ \|p_n\|^+),\ p_n\in(P_n)^*,\tag{2*}$$

则在一定条件下有

$$\|f-M(f,\ \|(P_n)^*\|^-)\|^+$$
$$\leqslant h^+\{\varepsilon^+(n)+\varphi(n,\ 2h^-D_-(n))\}$$
$$\|f-M(f,\ \|(P_n)^*\|^+)\|^-$$
$$\leqslant h^-\{\varepsilon^-(n)+\psi(n,\ 2h^+D_+(n)\},$$

这里

$$D_-(n)=(h^-)^{4-\frac{\lg n}{\lg u}}\frac{2}{\lg u}\int_n^\infty(h^-)^{\frac{\lg t}{\lg u}}$$
$$\times\Psi\left[t,\ 2h^+\varepsilon^+\left(\frac{t}{u}\right)\right]\times\frac{dt}{t},$$

$$D_+(n)=(h^+)^{4-\frac{\lg n}{\lg u}}\frac{2}{\lg u}\int_n^\infty(h^+)^{\frac{\lg t}{\lg u}}$$
$$\times\varphi\left[t,\ 2h^-\varepsilon^-\left(\frac{t}{u}\right)\right]\frac{dt}{t}.$$

因此，一般说由一对不等式 (1)，(2)，或者 (1)，(2*)，就可以得到最优逼近多项式对函数的误差估计的两个结果. 这种一般的说法对调合多项式逼近或其他类型的（实的）逼近理论也是类似成立的. 若考虑的是解析多项式逼近或调合多项式逼近，而范数的类型不外是

$$\|\cdot\|_{L_p^{(h)}(\Gamma_R)}, \quad \|\cdot\|_{W_p^{(h)}(\Gamma_R)}, \quad \|\cdot\|_{L_p^{(h)}(D_R^+)},$$

$\|\cdot\|_{W_p^{(h)}(D_R^+)}$，$R\geqslant 1, 0<p\leqslant\infty$. 这时列出结论所需要的条件是很容易的（类似的处理我们已经讨论过了）. 因此，以后我们只要把一对不等式列出来而不一定把它们对应的（两个）关于最优逼近多项式的定理写出来也就够了.

自然，上面谈到的形式并不是最一般的，若用第一章中第一、第二转化引理的一般形式，则结论将更完善些. 但实质还是一样的.

2.2. 这里我们只举几个关于不等式对的例子. 读者可根据第四章的结果列出更多的成对的不等式出来.

定义. 设$z_0\in D$为任意给定的，$g(z)$在D中定义，若$g^{(i)}(z_0)=0$，$i=0, 1, \cdots, k$则（形式地）记为$g\in(D_k)$，或者说条件(D_k)成立。

设集D之闭包中任何两点z_1和z_2有全属于$\overline{D}$的可求长 Jordan 弧线联结，这些可能联线的弧线的长度的下确界为$l(z_1, z_2)$. 在这种情况下，我们称$D\in[J]$，并记

$$l(D)=\sup_{z_1,z_2\in\overline{D}} l(z_1, z_2). \ \square$$

利用第四章2.1节的不等式和条件[J]的定义，就可得到

例11.
$$\begin{cases} \|p_n\|_{C^{(k)}(\overline{D})}\leqslant \dfrac{ek!}{U_n\left(\dfrac{1}{n}\right)^k}\|p_n\|_{C(\overline{D})} \\ \|g\|_{C(\overline{D})}\leqslant 2[l(D)]^k\|g\|_{C^{(k)}_{(\overline{D})}}, \end{cases}$$

这里$g\in E=C^{[k]}(\overline{D})\cap A(D)\cap(D_{k-1})$，有界正域 $D\in[J]$，$p_n\in(P_n)^*$，对$f\in E$，

$$\|f - Q_n\|_{C^{(k)}(\overline{D})} \leqslant \varepsilon(n),$$

则
$$\|f - M(f, \ \|(P_n)^*\|_{C(\overline{D})})\|_{C^{(k)}(\overline{D})}$$

$$\leqslant \left\{1 + \frac{4ek![l(D)]^k}{U_D\left(\frac{1}{n}\right)^k}\right\}\varepsilon(n).$$

这里$\varepsilon(n)$ 是可由$f^{(k)}(z)$ 的特征进行估计的，而Q_n的具体形式在这里对我们是不重要的。

根据第一转化引理还可考虑在其他范数下的误差估计。

利用第四章的定理和定理7可得

例12.
$$\begin{cases} \|p_n\|_{C(\overline{D})} \leqslant 2[l(D)]^k \left(\dfrac{e(p+1)(p+2)}{\theta_0 U_D\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)^{\frac{1}{p}} \|p_n\|_{L_p^{(k)}(D)}, \\ \|g\|_{L_p^{(k)}(D)} \leqslant \lambda_{k,p}(D) \|g\|_{C(\overline{D})}, \end{cases}$$

这里E为$C(\overline{D}) \cap A(D) \cap L_p^{(k)}(D) \cap (D_{k-1})$。以后我们凡引用到符号$l(D)$ 时，都假设$D \in [J]$。而$p_n \in (P_n)^* = (P_n)^A \cap E$。

举一个应用的例子，设$D \in$ P.L.(α, β)，$\alpha, \beta > 0$，$p < [1 - \max(0, 1 - 2\alpha)]/[(2-\beta)k]$（这时显然有 $\lambda_{k,p}(D) < \infty$）。若$f^{(\sigma)} \in A(D)$ 在$\overline{D}$上满足η级Hölder-Lipschitz条件，则

$$\|f - M(f, \|(P_n)^*\|_{L_p^{(k)}(D)})\|_{C(\overline{D})}$$

$$= 0\left\{(\lg n)^{\beta(\sigma+\eta)} \left(\frac{1}{n}\right)^a\right\},$$

这里
$$a = \beta(\sigma + \eta) - \frac{2(2-\alpha)}{p}.$$

利用第四章定理4和定理8可得

例13.
$$\begin{cases} \|p_n\|_{L^q(D)} \leqslant \xi \|p_n\|_{L_p^{(k)}(D)}, \\ \|g\|_{L_p^{(k)}(D)} \leqslant \mu_{k,p,q}(D) \|g\|_{L^q(D)}, \end{cases}$$

这里设D满足第四章定理 8 的条件，$E = A(D) \cap L_p^{(k)}(D) \cap L^q(D) \cap (D_{k-1})$，$p_n \in (P_n)^* = (P_n)^A \cap E$，

$$\xi = 2[l(D)]^k(\text{mes}D)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{e^2(p+1)(p+2)}{\theta_0 U_D\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

因此，若$D\in \text{P.S.}(\alpha,\beta),\alpha,\beta>0,f(z)\in E,q=\infty,f^{(m)}(z)\in c(\bar{D})$，$p<[1-\max(1-2\alpha,\ 0)]/[(2-\beta)k]$，则

$$\|f-M(f,\ \|(P_n)^*\|_{L_p^{(k)}(D)})\|_{C(\bar{D})}$$
$$=0\{n^{\sigma+\varepsilon}\omega(n^{-\beta+\varepsilon})\},$$

这里$\varepsilon>0$，$\omega(\delta)=\omega(\delta,\ f^{(m)},\ c(\bar{D}))$，$\sigma=\dfrac{2(2-\alpha)}{p}-\beta m$。

若$D\in S_2(r_0,\ \theta_0)$之边界Γ为Jordan可求长曲线，$E=E_q(D)\cap L^p(D)$，$p_n\in(P_n)^*=(P_n)^A\cap E$，$\delta_{p,q}(D)<\infty$（参看第四章定理13），则有

例14.
$$\begin{cases}\|p_n\|_{L^q(\Gamma)}\leqslant[l(\Gamma)]^{\frac{1}{q}}\left(\dfrac{e^2(p+1)(p+2)}{\theta_0 U_D\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)^{\frac{1}{p}}\|p_n\|_{L^p(D)},\\ \|g\|_{L^p(D)}\leqslant\delta_{p,q}(D)\|g\|_{L^q(\Gamma)}.\end{cases}$$

若$\delta_{r,q}(D)\mu_{k,p,r}(D)<\infty$（参看第四章定理8），$E=E_q(D)\cap L_p^{(k)}(D)\cap(D_{k-1})$，$(P_n)^*=(P_n)^A\cap E$，则有

例15.
$$\begin{cases}\|p_n\|_{L^q(\Gamma)}\leqslant2[l(D)]^k[l(\Gamma)]^{\frac{1}{q}}\\ \quad\left(\dfrac{\partial2(p+1)(p+2)}{\theta_0 U_D\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)^{\frac{1}{p}}\|p_n\|_{L_p^{(k)}(D)}\\ \|g\|_{L^{(k)}(D)}\leqslant\delta_{r,q}(D)\mu_{k,p,r}(D)\|g\|_{L^q(\Gamma)}.\end{cases}$$

因此若$D\in\text{P.S.}(\alpha,\ \beta)$，$\alpha$，$\beta>0$，$f(z)\in E$，有$p_n\in(P_n)^*$使得$\|f-p_n\|_{L^q(\Gamma)}\leqslant\varepsilon(n)$，则必

$$\|f-Q_n\|_{L^q(\Gamma)}=0\ \{n^{\frac{2(2-\alpha)}{p}+\varepsilon}\varepsilon(n)\},\ \ \varepsilon>0,$$

这里Q_n为$M(f,\|(P_n)^*\|_{L^p}),p<2q$，或者为$M(f,\|(P_n)^*\|_{L_p^{(k)}(D)})$，$p<[1-\max(1-2\alpha,\ 0)]\times\left[(2-\beta)\left(\dfrac{1}{q}+k\right)\right]^{-1}$.

相似地，还可以列举出许多不等式组，据我们初步计算，由第四章至少还能导出一二十对能用于最优（多项式）逼近的讨论

的不等式。

§3. 对调和函数的逼近

3.1. 像利用解析多项式来逼近解析函数一样，我们可以用调合多项式 (U_n)来逼近调合函数. 但这往往会遇到更多的困难，因为对于调合函数可采用的手段没有象处理解析函数时所用的那么完善；而且这些方法和工具大都是由解析函数理论的成果转化来的. 于是所得的结果往往因为转化而产生了"弱化",特别是在估计各种意义下逼近的误差时会遇上这种情况.

由于调和函数（我们在此只讨论二维的）是解析函数的实部（或虚部），若关于调和多项式对调和函数（在各种意义下的）逼近的可能性或误差估计的条件是直接由相应的解析函数的特征来阐明的，则等于取消关于调和多项式对调合函数逼近的探讨，因为那是直接属于解析函数构造的课题.

我们应该设法直接利用调合函数的特点（例如在各种意义下它在区域上的连续性）来揭示调和多项式对它的逼近的可能性和估计逼近的程度.

但是关于可能性的问题，一般说是有类似在解析函数理论中相应完善结果的. 例如，设D为一Jordan区域，调和函数$U(z)$在闭域$\bar{D}$上连续，则必存在调和多项式序列$\{U_n(z)\}$在$\bar{D}$上一致收敛于$U(z)$；设D为有界的carathéodory区域，D中之调和函数$U(z)\in L^p(D)$，$p>0$，则必存在调和多项式序列$\{U_n(z)\}$使得

$$\lim_{n\to\infty}\|U(z)-U_n(z)\|_{L^p(D)}=0$$

等等. 而证法可直接引用在逼近理论中已采用过的.

关于利用第一、第二转化引理来处理调和多项式逼近的误差转化的问题，看来是没有作再多讨论的必要了. 因为只要知道有关的不等式（组），结论的形式就很容易列出来.

3.2. 若由调和函数已知的性质能找到对应的解析函数的某些性质，那时再用上解析多项式逼近的直接定理，就可以得到用调和函数本身的性质直接描述的直接定理了。因此，只要找出调和函数和对应解析函数的性质（例如连续性）之间的联系，关于调和多项式逼近的直接定理就算找到了。

我们来讨论连续模的一些性质。

设D为一Jordan区域，则这时映射函数$\psi_+(z)$，$\psi_+(w)$在相应区域的边界上都是连续的，它们的连续模分别为

$$^*I_D(\delta)=\omega(\delta,\ \psi_+,\ C(\bar{D})),\ ^*J_D(\delta)=\omega(\delta,\ \varphi_+,\ c(|w|\leqslant 1)).$$

D中之调和函数族简记为$H(D)$。若$U(z)\in H(D)\cap c(\bar{D})$之连续模为$\omega(\delta)=\omega(\delta,\ U,\ c(\bar{D}))$，则显然

$$\omega(\delta,\ U(\varphi_+(\omega)),\ c(|w|\leqslant 1))\leqslant\omega(^*J_D(\delta)).$$

设$U(\varphi_+(w))$为$\varphi(w)\in A(|w|<1)$之实部，利用Schwarz公式，并用通常处理Cauchy型积分的方法就有

引理1. 设$\mathrm{Re}\varphi(w)\in c(|w|\leqslant 1)$之连续模为$R(\delta)$，并且

$$\int_0^c R\ (t)\frac{dt}{t}<\infty,$$

则$\varphi(w)\in c(|w|\leqslant 1)$，并且

$$\omega(\delta,\ \varphi,\ c(|w|\leqslant 1))$$
$$=0\left\{\int_0^\delta R\ (t)\frac{dt}{t}+\delta\int_\delta^c R\ (t)\frac{dt}{t^2}\right\}.\ \square$$

继续前面的讨论。这时我们知道，若

$$\int_0^c\omega(^*J(t))\ \frac{dt}{t}<\infty,\ ^*J(t)=^*J_D(t),$$

则$\varphi(w)\in c(|w|\leqslant 1)$，并且有

$$\omega(\delta,\ \varphi,\ c(|w|\leqslant 1))$$
$$=0\left\{\int_0^\delta\omega(^*J(t))\ \frac{dt}{t}+\delta\int_\delta^c\omega(^*J(t))\ \frac{dt}{t^2}\right\}.$$

设$f(z)=\varphi(\psi_+(z))$之实部为$U(z)$，这时解析函数$f(z)\in$

$c(\bar{D})$，并且

$$\omega(\delta,\ f,\ c(\bar{D}))=0\left\{\int_0^{*I(D)}\omega(^*J(t))\ \frac{dt}{t}\right.$$

$$\left.+\ ^*I(\delta)\int_{^*I(\delta)}^{c}\omega(^*J(t))\ \frac{dt}{t^2}\right\},$$

这里$^*I(\delta)={}^*I_D(\delta)$。总之我们有

引理2. 设D为Jordan区域，$U\in H(D)\cap C(\bar{D})$ 之连续模为$\omega(\delta)$，

$$\int_0^c\omega(^*J(t))\ \frac{dt}{t}<\infty,$$

设$f(z)\in A(D)$ 以$U(z)$ 为其实部，则必$f\in c(\bar{D})$，并且

$$\omega(\delta,t,c(\bar{D}))=0\left\{\int_0^{*I(\delta)}\omega(^*J(t))\frac{dt}{t}\right.$$

$$\left.+\ ^*I(\delta)\int_{*I(\delta)}^{c}\omega(^*J(t))\ \times\frac{dt}{t^2}\right\}.\ \square$$

特别当$D\in$ P.S.(α,β)，$\alpha>0$ 时，上式可化成

$$\omega(\delta,f,c(\bar{D}))=0\left\{\int_0^{\delta^\theta}\omega(t)\ \frac{dt}{t}\right.$$

$$\left.+\delta^{\frac{1}{2-\beta}-\varepsilon}\int_{\delta^\theta}^{c}\frac{\omega(t)}{t^{1-\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}}dt\right\},$$

这里$\varepsilon>0$，当$D\in$ P.L.(α,β) 时，$\varepsilon=0$，而$\theta=\dfrac{\alpha}{2-\beta}-\varepsilon$。

由第五章之定理 2 即得

例16. 设D为 Jordan 区域，$U\in H(D)\cap C(\bar{D})$ 之连续模为$\omega(\delta)$；

$$\int_0^c\omega(^*J(t))\frac{dt}{t}<\infty,$$

则有$U_n\in(U_n)$ 使得

$$\|U-U_n\|_{c(\bar{D})}=0\ \left\{\int_0^{\xi\left(\frac{\lg n}{n}\right)}\omega(^*J(t))\frac{dt}{t}\right.$$

$$+\xi\left(\frac{\log n}{n}\right)\int_{\xi\left(\frac{\lg n}{n}\right)}^{c}\omega\left({}^{*}J(t)\right)\frac{dt}{t^{2}}\Big\},$$

这里$\xi(\delta)={}^{*}I(J_D(\delta))$。

特别当 $D\in$ P.S.(α,β)，$\alpha,\beta>0$时，上式化成

$$\|U-U_n\|_{C(\bar{D})}=0\left\{\int_0^{\left(\frac{1}{n}\right)^{\theta}}\omega(t)\frac{dt}{t}+\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{\beta}{2-\beta}-\varepsilon}\int_{\left(\frac{1}{n}\right)^{\theta}}^{c}\omega(t)\right.$$

$$\left.\times\frac{dt}{t^{1+\frac{1}{\alpha}+\varepsilon}}\right\},$$

这里$\varepsilon>0$，$\theta=\dfrac{2\beta}{2-\beta}-\varepsilon$。而当$D\in$ P.L.(α,β)，$\alpha,\beta>0$时，可化成

$$\|U-U_n\|_{C(\bar{D})}=0\left\{\int_0^{\left(\frac{\lg n}{n}\right)^{\sigma}}\omega(t)\frac{dt}{t}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\lg n}{n}\right)^{\frac{\beta}{2-\beta}}\int_{\left(\frac{\lg n}{n}\right)^{\sigma}}^{c}\frac{\omega(t)}{t^{1+\frac{1}{\alpha}}}\right\},$$

这里$\sigma=\dfrac{2\beta}{2-\beta}$。

我们来考虑 $U(z)$ 的高阶导数的连续性。

设 $\Gamma\in(\Lambda_{(k-1)})$ 参看 第五章3.4节)，则我们知道，这时映射函数的导函数 $\varphi_+^{(k)}(w)$，$\Psi_+^{(k)}(z)$ 在定义域的闭域上连续，并且有

$$0\left\{\int_0^{\delta}\varepsilon_{(k-1)}(t)\frac{dt}{t}+\delta\int_{\delta}^{c}\varepsilon_{(k-1)}(t)\frac{dt}{t^2}+\delta\lg\frac{1}{\delta}\right\}$$

级的连续模（参看[2]或第五章）。

记$\partial^k U$为U在边界 Γ 上对x，y，n，s 的k次（混合）偏导数。引入条件

$$(\Lambda^*_{(k-1)}):\quad \int_0^{c}\varepsilon_{(k-1)}(t)\left(\lg\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}<\infty.$$

设$U\in H(D)\cap C(\bar{D})$，$\partial^k U\in C(\Gamma)$ 在Γ上之连续模记为 $\overset{(k)}{R}(\delta)$。这时像第四章中§3的讨论一样，可证对应的 ${}^{*}\partial^k U(\varphi_+(w))$

$\in C(|w|=1)$（这里$^*\partial^h$是相应于∂^h对w平面上之$|w|=1$而言的），并且其连续模为$\overset{(h)}{T}(\delta)$，其级为

$$0\left\{\overset{(h)}{R}(\delta)+\int_0^\delta \varepsilon_{(h-1)}(t)\frac{dt}{t}+\delta\int_\delta^c \varepsilon_{(h-1)}(t)\frac{dt}{t^2}\right.$$

$$\left.+\delta\lg\frac{1}{\delta}\right\}.$$

把引理1略作变形就可证，若$\int_0^c \overset{(h)}{T}(t)\frac{dt}{t}<\infty$，则$\varphi^{(h)}(w)$

$\in c(|w|\leqslant 1)$，$\varphi(w)$以$U(\varphi_+(w))$为实部并且其连续 模$\overset{(h)}{B}(\delta)$ 的级为

$$0\left\{\int_0^\delta \overset{(h)}{T}(t)\frac{dt}{t}+\delta\int_\delta^c \overset{(h)}{T}(t)\frac{dt}{t^2}\right\}.$$

经过简单的计算就有

$$\overset{(h)}{B}(\delta)=0\left\{\int_0^\delta \overset{(h)}{R}(t)\frac{dt}{t}+\delta\int_\delta^c \overset{(h)}{R}(t)\frac{dt}{t^2}+\delta\left(\lg\frac{1}{\delta}\right)^2\right.$$

$$\left.+\int_0^\delta \varepsilon_{(h-1)}(t)\left(\lg\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}+\delta\int_\delta^c \varepsilon_{(h-1)}(t)\left(\lg\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}\right\}.$$

这时显然$f^{(h)}(z)\in A(D)\cap c(\bar{D})$ 的 连续模之级为

$$0\left\{\overset{(h)}{B}(\delta)+\int_0^\delta \varepsilon_{(h-1)}(t)\frac{dt}{t}+\delta\int_\delta^c \varepsilon_{(h-1)}(t)\frac{dt}{t^2}\right.$$

$$\left.+\delta\lg\frac{1}{\delta}\right\},$$

这里$f(z)=\varphi(w)$。

总结上述，我们得到

引理3. 设$\Gamma\in(A^*_{(h-1)})$，$U\in H(D)\cap c(\bar{D})$，$\partial^h U\in c(\Gamma)$在$\Gamma$上之连续模为$\overset{(h)}{R}(\delta)$，它满足

$$\int_0^c \overset{(h)}{R}(t)\frac{dt}{t}<\infty,$$

则以U为实部的$f\in A(D)$ 之k次导数$f^{(h)}\in c(\bar{D})$，$f^{(h)}$ 之连续模

之级为

$$0\left\{\int_0^\delta \overset{(k)}{R}(t)\frac{dt}{t}+\delta\int_\delta^c \overset{(k)}{R}(t)\frac{dt}{t^2}+\delta\left(\lg\frac{1}{\delta}\right)^2\right.$$

$$\left.+\int_0^\delta \varepsilon_{(k-1)}(t)\left(\lg\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}+\delta\int_\delta^c \varepsilon_{(k-1)}(t)\left(\lg\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}\right\}. \square$$

利用引理3，由Альпер的直接定理（参看[7]）就可以得到

例17. 设$\Gamma\in(\Lambda^*_{(k-1)})$，$U\in H(D)\cap c(\bar{D})$，$\partial^k U\in c(\Gamma)$在$\Gamma$上之连续模$\overset{(k)}{R}(\delta)$使得

$$\int_0^c \overset{(k)}{R}\frac{dt}{t}<\infty,$$

则存在$U_n\in(U_n)$，使得

$$\|U-U_n\|_{C(\bar{D})}=0\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^k\left[\int_0^{\frac{1}{n}} \overset{(k)}{R}(t)\frac{dt}{t}+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^c \overset{(k)}{R}(t)\frac{dt}{t^2}\right.\right.$$

$$+\frac{(\lg n)^2}{n}+\int_0^{\frac{1}{n}}\varepsilon_{(k-1)}(t)\left(\lg\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

$$\left.\left.+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^c \varepsilon_{(k-1)}(t)\left(\lg\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}\right]\right\}.$$

而且若更有$\Gamma\in(\Lambda_{(k)})$，则可改进为

$$\|U-U_n\|_{c(\bar{D})}=0\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^k\left[\int_0^{\frac{1}{n}} \overset{(k)}{R}(t)\frac{dt}{t}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^c \overset{(k)}{R}(t)\frac{dt}{t^2}\right]\right\}.$$

利用等角写像很容易证得

引理4. 设Γ为解析 Jordan 曲线，则对任何$f(z)\in A(D)$，$f(z_0)=0$，$z_0\in D$，有

$$C_p(\delta,f)\leqslant c(C_p(\delta,R_e f)),$$

这里$1<p<\infty$，c和f无关。□

因此，由第五章面性中值的结果就可得

例18. 设Γ为解析 Jordan 曲线，$U\in H(D)$，$\partial^k U/\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}\in$

$L^2(D)$，则存在$U_n \in (U_n)$ 使得

$$\|U-U_n\|_{L^2(D)} = 0\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{k}{2}} c_2\left(\frac{1}{n}, \frac{\partial^k U}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}\right)\right\}.$$

3.3. 例16—例18反映的都是直接由调和函数本身给定的性质来描述的用调和多项式来逼近的直接定理。类似地还可得到更多的这类定理。例如可利用第六章 Faber 级数中值逼近的结果来研究调和逼近在线性中值意义下的各种直接定理，这些讨论留给读者。

由直接定理就可像第二章§2和本章§1，§2一样很好地来讨论调和多项式最优逼近的问题和建立调和直交多项式级数理论，讨论的方式是相似的。现我们谈谈和数学物理直接方法有关的一些问题。

用最优逼近多项式（极值多项式）来对调和函数逼近，这实质是数学物理直接方法中的最小二乘方法。Михлип 在考虑对平面的 Laplace 方程的第一、第二边值问题（Dirichlet 问题，Неймаnn问题）时，只证明了这种方法的收敛性，而误差的级的问题并没有解决（参看[8]中关于最小二乘方法的一章）。根据前面的结果，有些问题是可解决的。下面我们对 Михлин遗留的问题作一些注记。

Dirichlet 问题是，设在Γ上给定了边界函数$F(z)$（它必须是有界的，并且至多有有限个点不连续），求$U \in H(D)$，它以$F(z)$为边界值（可能有有限个点例外）。我们可取$M(F(z), \|(U_n)\|_{L^p(\Gamma)})$，$p>0$，作为$U$的近似。这时，我们不必知道$D$内$U(z)$之值，而$M_n = M(F, \|(U_n)\|_{L^p(\Gamma)})$在$D$中是广义一致收敛于$U$的。若只考虑在闭域上一致逼近的误差估计问题（这对实际问题是最感兴趣的），用我们的方法来处理（这时利用例16—例17够了，所需的调合多项式不等式可由第四章导出），就很容易得到下面的结论：

A）设$\Gamma \in$ P. S. (α, β)，$\alpha, \beta>0$，$F(z)$在Γ上满足δ级的 Hölder-Lipschitz条件$\frac{1}{\beta p}<\delta \leqslant 1$，则

$$\|U-M_n\|_{c(\bar{D})}=0\left(\frac{1}{n^{\lambda}}\right),\ \lambda=\frac{\alpha}{2-\beta}\left(3\sigma-\frac{1}{p}\right)-\varepsilon,\ \varepsilon>0.$$

B) 设$\Gamma\in(\Lambda^*_{(k-1)})$，$\frac{d^k}{ds^k}F(z(s))$ 之连续 模 $\omega(s)$ 满足

$$\int_0^c \frac{\omega(t)}{t}dt<\infty,$$

则对$k\geqslant 1$，$p\geqslant 1$，$0\leqslant r\leqslant k$有

$$\|\partial^r(U-M_n)\|_{C(\Gamma)}=0\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{k-r-\frac{1}{p}}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}\omega(t)\frac{dt}{t}\right.\right.$$
$$+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{c}\omega(t)\frac{dt}{t^2}+\frac{(\lg n)^2}{n}+\int_0^{\frac{1}{n}}\varepsilon_{(k-1)}(t)\left(\lg\frac{1}{t}\right)dt$$
$$\left.\left.+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{c}\varepsilon_{(k-1)}(t)\left(\lg\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}\right]\right\}.$$

而当$\Gamma\in(\Lambda_{(k)})$时，则可改进为

$$\|\partial^r(U-M_n)\|_{C(\Gamma)}=0\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{k-r-\frac{1}{p}}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}\omega(t)\frac{dt}{t}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{c}\omega(t)\frac{dt}{t^2}\right]\right\}.$$

Neumann 问题是，给定了边界Γ上$U(z)$ 之法线导数$F(z)$，求解$U(z)\in H(D)$。这时我们取$M_n^*(z)\in(U_n)$ 为实现

$$\left\|F(z)-\frac{\partial V_n(z)}{\partial n}\right\|_{L^p(\Gamma)},p>0,$$

的 极 小 元 $V_n\in(U_n)$，也 即 $M_n^*=M(F,\ \|(U_n)\|^*)$，$\|g\|^*=\|\partial g/\partial n\|_{L^p(\Gamma)}$。

若还是考虑M_n^*对 U在$c(\Gamma)$ 中的误差估计问题，则用例17的结论就可得到

C) 设$\Gamma\in(\Lambda^*_{(k)})$，$\partial^k F/\partial s^k\in C(\Gamma)$ 之连续模 $\omega(\delta)$ 满足

$$\int_0^c\omega(t)\frac{dt}{t}<\infty,$$

则对$0\leqslant r\leqslant k$，$p\geqslant 1$，有

$$\left\|\frac{\partial}{\partial n}(\partial^r(U-M_n^*))\right\|_{C(\Gamma)}=0\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{k-r-\frac{1}{p}}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}\omega(t)\frac{dt}{t}\right.\right.$$

$$+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{c}\omega(t)\frac{dt}{t^2}+\frac{(\lg n)^2}{n}+\int_0^{\frac{1}{n}}\varepsilon_{(k)}(t)\left(\lg\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}$$

$$\left.\left.+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{c}\varepsilon_{(k)}(t)\left(\lg\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}\right]\right\}.$$

而当$\Gamma\in(\Lambda_{(k+1)})$时，估计式可改进为

$$\left\|\frac{\partial}{\partial n}\left(\partial^r(U-M_n^*)\right)\right\|_{C(\Gamma)}=0\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^{k-r-\frac{1}{p}}\left[\int_0^{\frac{1}{n}}\omega(t)\frac{dt}{t}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{c}\omega(t)\frac{dt}{t^2}\right]\right\}.$$

而关于$E(n)=\|U(z)-U(z_0)-M_n^*(z)+M_n^*(z_0)\|_{C(\Gamma)}$，$z_0\in D$，则可由下式估计

$$E(n)=0\left\{\left\|\frac{\partial}{\partial n}(U-M_n^*)\right\|_{C(\Gamma)}\right\}.$$

在实际问题中，这些M_n，M_n^*往往是直交多项式级数的部分和。

参 考 文 献

〔1〕 Г. М. Голузин，复变函数的几何理论，陈建功译。

〔2〕 吴学谋，关于等角写像的边界性质，数学学报，7:2 (1957)，271—276.

〔3〕 S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa-Lwow, (1935).

〔4〕 С. Б. Стечкин, ОБ Оьсолютной Сходимости Ортогональных Рядов, умн II, No. 3 (1947), 177—178.

〔5〕 O. J. Farrell, On Approximation to an Analytic Function by Polynomials, Bull. Amer. Math. Soc. 40, NO 12 (1934), 908—914.

〔6〕 S. Bergman, The Kernel Function and Comformal Mapping,

Amer. Math. Soc. New York (1950).

〔7〕 С. Я. Альпер, Оравномерных Прибъижениях Фу́нку́ий Комллексного Переменного в замкнутой Оьласти, ИАН сер. Матем. **19** (1955), 423—444.

〔8〕 С. Г. Михлин, прямые Методы В Математической Физике, М-Л. (1950).

〔9〕 吴学谋，解析函数的一些边界性质与嵌入不等式（I）（II），华中工学院学报，3，4（1979）.

〔10〕 吴学谋，复函数逼近的一些研究（I）（II），武汉建材学院学报，3，4(1980).

〔11〕 吴学谋，Faber 级数的误差转化分析，科学通报，9（1981）.

〔12〕 吴学谋，变分转化分析（I）（II），应用数学和力学，1（198(），3（1981）.

第 八 章

封闭性的转化

§1. 几个具体的方案

在第一章中，第三等价定理进一步刻划了完全性与封闭性的联系，体现了在特定的条件下，完全性与封闭性相互的转化.

在许多问题的研究中，往往还要考虑另外一种转化. 即已知F_Δ在F中封闭(完全)，在什么条件下，它能转化到E_Δ在E中封闭(完全). E，F可以是不同的抽象空间. 这样的问题,从泛函分析的角度作一般性的考虑，结果还很少. 比较有些成效的是结合问题的具体条件进行讨论.

一种方案是利用解析函数的唯一性到封闭性的转化来实现上述转化；一种是利用函数变换的特殊考虑来实现上述转化.

关于第一种方案,我们可以概括地介绍于下.

设F与E一致，而F_Δ与E_Δ互不相同. 并且已知F_Δ在E中x_0处封闭或完全. 设有一组条件(K)，当(K)满足时，$f\in E^*$，$f(x)=0$，$x\in E_\Delta$，导致$f(y)=0$，$y\in F_\Delta$. 既然F_Δ在x_0处完全，则$f(x_0)=0$. 因此条件(k)就保证了E_Δ在x_0处的完全性(或封闭性).

在利用解析函数的唯一性时,往往可以把条件(k)要求得更苛刻：由$f(x)=0$，$x\in E_\Delta$，导致$f(x)\equiv 0$，因而自然有$f(y)=0$，$y\in F_\Delta$，从而由F_Δ在x_0处的完全性导致E_Δ在x_0处的完全性. 由

于解析函数有许多深刻细致的结果，这种苛求的条件(k)却又是不难实现的.

具体一些说，是对集合$E_0 \cup F_\Delta$能用复平面的某一集合$D = E_\Delta^z \cup F_\Delta^z$来编号，$E_\Delta^z$，$F_\Delta^z$相应对于$E_\Delta$与$F_\Delta$。$x(z)$：$D \longmapsto E_\Delta \cup F_\Delta$。当$f \in E^*$，$f(x(z))$是$z$的解析函数时，若条件$(k)$使得对$z \in E_\Delta^z$，$f(x(z)) = 0$，导致对$z \in F_\Delta^z$，$f(x(z)) = 0$，或者由$z \in E_\Delta^z$，$f(x(z)) = 0$，导致$f(x(z)) \equiv 0$。那么，由$F_\Delta$在$E$中的完全性就导致$E_\Delta$在$E$中完全.

上述方案我们简称第一方案.

第一方案的一个变形是下述的第二方案.

设E_Δ为可数集(x_n)，$f \in E^*$，$f(x_n) = 0$，在一组条件(k)约制下，等价于对某$g \in E^*$，有$\partial^{i_n} g(x(z_n))/\partial z^{i_n} = 0$，$(i_n)$为非负整数，可以相同；$x(z)$为映复平面的某一集合于$E$的映象。而$\partial^{i_n} g(x(z_n))/\partial z^{i_n} = 0$又在某一条件$(k_\Delta)$约制下导致$g \equiv 0$。而当$g \equiv 0$又导致$f \equiv 0$时，由$F_\Delta$在$E$中完全则必$E_\Delta$在$E$中完全.

这一方案我们将用例子来说明，主要是利用Abel插补理论所刻划的解析函数的一种特殊的唯一性.

利用函数变换的转化方法我们简称第三方案.

若F_Δ在E中完全，而E_Δ又在F_Δ中完全，则必E_Δ也在E中完全.

利用这一引理来进行转化的，我们简称第四方案.

关于第一方案的用例可参看[1—3]，那里有关于$L^p(a,b)$中的完全性研究，可用的解析函数序列有$\{F(s_i x)\}$，$\{e^{i\lambda_n \theta}\}$，$\{F(s_n e^{i\theta})\}$，$\{F(e^{i(\theta+t)})\}$，$\{(e^{i\theta} - z_n)^{-1}\}$，$\{(e^{i\theta} - z_n)^{-n}\}$，$\{F(s_i t)/h(t)\}$，$\{F(t + s_i)/h(t)\}$，$\{U_i[0, \lg h(e^\sigma), \{\lambda_n\}]\}$ $(i = 1,2,3)$等形式. 类似的结果对带权空间与C空间成立. 下面我们侧重介绍其它方案的用例.

§ 2. Abel 插补法的应用

下面举一个应用第二方案进行转化的例子。为不失方法的典型性，我们考虑 $L^p(-\pi,\pi)$ 中的完全性问题。这时，$\{e^{in_j\theta}\}$ 在 $L^p(-\pi,\pi)$，$1<p<\infty$ 中是完全的，$\{n_j\}$ 满足条件 (M_1)：$\sum \frac{1}{n_j}=\infty$。

记 $\mu(r)$ 为 $\beta_n\leqslant r$ 之个数，这里 $\beta_n=|\alpha_0|+|\alpha_1-\alpha_0|+\cdots+|\alpha_n-\alpha_{n-1}|$。Иърагимов[5]指出：对于整函数 $F(z)$，若满足条件 (k'')：

1°）$\lg M(r,F)<\lambda\mu(\alpha r)$，$r>r_0$

2°）$\lambda<\lg\frac{1-\alpha}{\alpha}$，$\alpha<\frac{1}{2}$，

则当 $F^{(n)}(\alpha_n)=0$ 时，必致 $G(z)\equiv 0$。

由这一结果即可证得

定理1. 若整函数 $F(z)$ 满足条件 (M_1) 和 (k'')，则 $\{e^{int}F^{(n)}(\alpha_n e^{it})\}$ 在 $L^p(-\pi,\pi)$ 中封闭。□

实际上，考虑函数

$$f(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\overline{y(t)}F(ze^{it})dt.$$

对 $y(t)\in L^{\frac{p}{p-1}}(-\pi,\pi)$，$f(z)$ 是一整函数，

$$M(r,f)\leqslant \text{常数}\cdot M(r,F),$$

因而 $f(z)$ 也满足条件 (k'')。

若
$$\int_{-\pi}^{\pi}\overline{y(t)}e^{int}F(\alpha_n e^{it})dt=0,\quad n=0,1,\cdots \tag{•}$$

则必导致 $f^{(n)}(\alpha_n)=0$，$n=0,1,2,\cdots$。由 Иърагимов 之结果，有 $f(z)\equiv 0$。因此 $f^{(n_j)}(0)=0, j=1,2,\cdots$，也即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\overline{y(t)}e^{in_jt}dt=0.$$

由 $\{e^{in_jt}\}$ 在 $L^p(-\pi,\pi)$ 中的完全性，即导致 $y(t)$ 几乎处处为零。

也即是(*)导致 $y(t)$ 几乎处处为零，因而证明了定理。

注：1) $F(z)$可改为全纯于$|z|<1$内的函数，这时要求$|\alpha_n|<1$，$\lim\alpha_n=\alpha$，$|\alpha|<1$，$\sum|\alpha_n-\alpha_{n-1}|<\infty$，$|\alpha_n-\alpha|\leqslant1-|\alpha|$(参看[4])；

2) 类似的结果对$p=1,\infty,C(-\pi,\pi)$以及无穷区间上的泛函空间皆成立；

3) 在上节和本节中都用到条件(M_1)，这是由于Müntz定理的限制，一般由别的封闭性结果可以改动这一条件。例如Szász就曾指出，只要$\sum\frac{1+2Re(\lambda_n)}{1+|\lambda_n|}=\infty$，$\mathrm{Re}(\lambda_n)>-\frac{1}{2}$成立，$\{x^{\lambda_n}\}$就在$L^p(0,1)$，$p>1$中完全。

§3. 中值逼近的有关问题

3.1. 这一节我们来讨论其他方案的一些例子，主要是讨论面性中值逼近的问题。

设 D 为复平面的单连通区域，$h(z)\geqslant0$, $h(z)\in L(D)$，$g(z)\in L_h^p(D)$，是指

$$\|g\|_{L_h^p(D)}=\left\{\iint_D h(z)|g(z)|^p dxdy\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

定义 $H_p(D,h)=A(D)\cap L_h^p(D)$，$A(D)$为 D 中的解析函数族。若多项式族 $(P)^A=\bigcup_n(P_n)^A$ 在函数族(f)中按 $L_h^p(D)$ 的意义封闭，则简记为$(f)\in(F)L_h^p(D)$。

设 $w=\varphi(z)$等角映射 D 为 D^*，相应的$h(z)$变成 $h^*(w)=h(\varphi^{-1}(w))$。记$(\varphi)_p$ 为函数族$\bigcup_n\varphi^n(\varphi')^{\frac{2}{p}}$，这时有下列转化定理：

定理2. 设 $H_p(D^*,h^*)\in(F)L_{h^*}^p(D^*)$，$p>0$，若 $(\varphi)_p\in(F)L_h^p(D)$，则$H_p(D,h)\in(F)L_h^p(D)$。□

实际上，对任给定的$\varepsilon>0, f\in H_p(D,h)$，则由$f[(\varphi^{-1})']^{\frac{2}{p}}\in$

$H_p(D^*,h^*)\in(F)L_{h^*}^p(D^*)$，有 w 之多项式 $P(w)$ 使得

$$\|f[(\varphi^{-1})']^{\frac{2}{p}}-P(w)\|_{L_{h^*}^p(D^*)}\leqslant\frac{\varepsilon}{\lambda},\ \lambda=2^{2+\frac{1}{p}},$$

也即是

$$\|f-p(\varphi)(\varphi')^{\frac{2}{p}}\|_{L_h^p(D)}\leqslant\frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

而 $P(\varphi)(\varphi')^{\frac{2}{p}}$ 是 $(\varphi)_p$ 之元素的某一线性组合，由 $(\varphi)_p\in(F)L_h^p(D)$，故存在 z 之多项式 $Q(z)$，使得

$$\|P(\varphi)(\varphi')^{\frac{2}{p}}-Q\|_{L_h^p(D)}\leqslant\frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

因为 $\|\cdot\|_{L_h^p(D)}\in\mathrm{p}(2^{1+\frac{1}{p}})$，故有

$$\|f-Q\|_{L_h^p(D)}\leqslant\varepsilon.\qquad\text{证毕.}$$

这定理虽然简单，但却是许多进一步转化的基础。它本身也同时涉及转化的第三、第四两种方案。

定理3. 设 $H_p(D^*,h^*)\in(F)L_{h^*}^p(D^*),p>0,H_q(D,1)\in(F)L^q(D)$，$q>p$，$(p)^A\in L(D^*)$，$\varphi'\in L^\lambda(D)$，$\lambda>2q/p$，$h\in L^{\frac{q}{q-p}}(D)$，则 $H_p(D,h)\in(F)L_h^p(D)$。□

实际上，由上定理，只要证明 $(\varphi)_p\in(F)L_h^p(D)$ 即可。这时，由 Hölder 不等式，对任何 n 知道 $\varphi^n(\varphi')^{\frac{2}{p}}\in H_q(D,1)$；而由 $H_q(D,1)\in(F)L^q(D)$，因而对任给定的 $\varepsilon>0$ 有 $p\in(P)^A$，

$$\|\varphi^n(\varphi')^{\frac{2}{p}}-P\|_{L^q(D)}\leqslant\varepsilon.$$

而这时，再用 Hölder 不等式有

$$\|\varphi^n(\varphi')^{\frac{2}{p}}-P\|_{L_h^p(D)}\leqslant\|h\|_{L^{\frac{q}{1-q}}(D)}(\|\varphi^n(\varphi')^{\frac{2}{p}}-P\|_{L^q(D)})^p$$

$$\leqslant\varepsilon^p\|h\|_{L^{q/(q-p)}(D)}.$$

由于 $\varepsilon>0$ 是任给的，故有 $(\varphi)_p\in(F)L_h^p(D)$。

定理证毕。

3.2. 为了更深入地讨论中值逼近的转化，我们设$\overline{D}$整个包含在圆$|z|<R$内。不失一般性，我们设$R=1$。

我们将讨论一致逼近的一些结果对中值逼近的转化。首先来分析古典的Runge定理的证法中所体现的转化规律。

我们都知道，若D是一Jordan区域，则$A(\overline{D})\in(F)C(\overline{D})$，这就是Runge原来的定理(1918年).后来证法很多,Walsh(1927)推广到$A(D)\cap C(\overline{D})\in(F)C(\overline{D})$。

$f\in A(\overline{D})$，则f必在一包含$\overline{D}$之区域B中解析,对$z\in\overline{D}$，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\frac{f(t)}{t-z}dt. \tag{1}$$

Λ为$\overline{D}$外之一可求长曲线，它与$\overline{D}$之距离大于零。不失一般性，仍可设Λ全卧于单位圆内。Runge定理的一个典型证法就是第四种方案。首先把(1)之积分用有限和来逼近

$$\sum a_i\frac{f(t_i)}{t_i-z}f(z).$$

而对$f(t_i)/(t_i-z)$，则用$(t_i^*-z)^{-1}$的多项式来逼近，这里$|t_i^*|=1$，即t_i^*在单位圆周上。因而可用极点在单位圆周上的有理函数来逼近f于$\overline{D}$上。因这有理函数在单位圆内是没有异点的，故这有理函数在原点的Taylor展式就在$\overline{D}$上一致收敛于这有理函数。所以就必有多项式叙列收敛于f于$\overline{D}$上。

这方法的重点是用$(z-t_i^*)^{-1}$的多项式来逼近$(z-t_i)^{-1}$于$\overline{D}$上，而$\overline{D}$是与t_i,t_i^*保持一定距离的,且与某一联t_i，t_i^*的可求长Jordan弧L保持正的距离。

我们知道

$$\frac{1}{z-a}=\frac{t}{1+ct}=\sum c_nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\frac{1}{z-b}\right)^n,$$

这里 $t=\dfrac{1}{z-b}$，$c=b-a$，$c_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$，$f(t)=\dfrac{t}{1+ct}$.

利用 Taylor 级数的余项估计，不难看到对 $\eta>0$ 有

$$\max_{|z-b|>c+\eta}\left|\frac{1}{z-a}-\sum_{k=0}^{n}c_k\left(\frac{1}{z-b}\right)^k\right|$$

$$\leqslant\left(\frac{|b-a|}{|b-a|+\eta}\right)\max_{|z-b|>c+\eta}\left|\frac{1}{z-a}\right|.$$

故若$\bar{D}$属于$|z-b|>c+\eta$，则在$\bar{D}$上可用$(z-b)^{-1}$之多项式以任何精度逼近$(z-a)^{-1}$。但即使$a\bar{\in}\bar{D}$，是$\bar{D}$亦往往并不在$|z-b|>c+\eta$之范围内。然而，只要$a\bar{\in}\bar{D}$总有充分接近a之b及充分小之$\eta>0$，使得$\bar{D}$在$|z-b|>c+\eta$之范围内。因而对a与b距离很远时，只要有一条Jordan可求长弧L：$z=z(s)$，$z(0)=a$，$z(l)=b$，$\bar{D}$在L之η邻域之外，则可在L上加入足够多的分点，每两点相距充分小，就可以逐次用上面的方法来逼近，且逼近度可任意小。而且，每步用以逼近的有理多项式都是可以对其上升性进行估计的。这一过程所得的具体结果可用下面的命题来刻画。

引理. 设L：$z=z(s)$为联点$a=z(0)$和点$b=z(l)$的可求长Jordan弧，s是由a到$z(s)$沿L所度之弧长；设G为L的某一邻域，而$d(s)$为$z(s)$到G的边界的距离，记R_s为所有$|z-z(t)|<d(t)$，$s\leqslant t\leqslant l$的圆之和集，则对于任给的$\varepsilon>0$，存在着$(z-b)^{-1}$之多项式P，使得

α) $\left|\frac{1}{z-a}-P\right|<\varepsilon$，$z\bar{\in}G$（或$z\bar{\in}R_0$）；

β) $|P|<\exp\left\{\left(\ln\frac{e}{d(0)\varepsilon}\right)\exp\left[c\int_0^s d(t)^{-1}dt\right]\right\}$，$z\bar{\in}R_s$；

γ) c为满足$\pi\leqslant c<5$之常数.

特别当$d(t)\equiv\eta$时，β）之估计可改为

$$|P|<\exp\left\{\ln\frac{e}{\varepsilon\eta}\right)\exp\frac{5s}{\eta}\right\},\quad z\bar{\in}R_s. \ \square$$

详细论述可参看[6]。

这个一致逼近的结果可以通过许多复杂的途径转化成中值逼

近封闭性转化的定理．下面举几个比较简单的例子．

记$D(\eta)$为D中与D之边界距离小于$\eta>0$的部分，记$\Gamma(\eta)$是$D-D(\eta)$的边界．当$\eta>0$充分小时，$\Gamma(\eta)$为由有限条Jordan可求长曲线组成．对于$t\in\Gamma(\eta)$，设存在卧于$D-D(2\eta)$之外的曲线L联结t与单位圆周，并且其长不大于某一函 $\delta_D^*(\eta)\in(\downarrow_\eta)$．$\delta_D^*(\eta)$ 可以看成D的度量性质的一种刻画．[10]中已指出，在一般情况下

$$|\Gamma(\eta)|\leqslant\frac{5}{\eta}m(D(\eta)),\quad \delta_D^*(\eta)\leqslant\frac{5}{2\eta}m(D(\eta))+1,$$

这里$|\Gamma(\eta)|$为$\Gamma(\eta)$之长，$m(D(\eta))=m_1(D(\eta))$，

$$m_h(D(\eta))=\iint\limits_{D(\eta)}h(z)dxdy.$$

对许多集合D，$\delta_D^*(\eta)$可以有更好的估计，例如对凸集或以原点为中心的星形区域，$\delta_*^D(\eta)\leqslant1$．

定理4. 设D^*有界，$H_p(D^*,\ h^*)\in(F)L_{h^*}^p(D^*)$，$p>0$，$m_h(D(\eta))=0\{\xi(\eta)^{-1}\}$，$\delta=0\{\eta^{\frac{2}{p}}\left|\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)\right|^{-1}\}$，

$$\xi(\eta)=\eta^{-\frac{2}{p}}\left|\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)\right|\exp\left\{\left(\ln\frac{2e}{\eta\delta}\right)\exp\frac{10\delta_D^*(\eta/2)}{\eta}\right\},$$

则$H_p(D,\ h)\in(F)L_h^p(D)$．□

证明. 在引理2中，取$d(s)\equiv\eta/2$，ε为δ，b为单位圆上之点，a为t，由于估计都是不等式（没有等式），故那里关于$(z-b)^{-1}$之多项式可改为关于z的多项式．即存在多项式族$\{P_{t;\eta}(z)\}$使得

$$\left|\frac{1}{t-z}-P_{t;\eta}(z)\right|<\delta,$$

这里$z\in\overline{D-D(\eta)}$，$t\in\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)$，而对$z\in\bar{D}$，有

$$|P_{t;\eta}(z)|<\exp\left\{\left(\ln\frac{2e}{\eta\delta}\right)\exp\frac{10\delta_D^*(\eta/2)}{\eta}\right\}.$$

这时，对于确定的η，定义多项式

$$P_\eta(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}[\varphi(t)]^\eta[\varphi'(t)]^{\frac{2}{p}}P_{t;\eta}(z)dt.$$

因为D^*有界，故有某常数$M>0$，$|\varphi(z)|<M$，因此$|\varphi'(t)|<\frac{2}{\eta}M$，$t\in\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)$，而对$z\in D$，当$\eta$充分小后有

$$|P_\eta(z)|<\frac{1}{2\pi}M^{m+\frac{2}{p}}\left(\frac{2}{\eta}\right)^{\frac{2}{p}}\left|\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)\right|\exp\left\{\left(\ln\frac{2e}{\eta\delta}\right)\right.$$

$$\left.\exp\frac{10\delta_D^*(\eta/2)}{\eta}\right\}\leqslant\text{const}\cdot\xi(\eta).$$

这里

$$\iint\limits_D h(z)\left|[\varphi(z)]^n[\varphi'(z)]^{\frac{2}{p}}-P_\eta(z)\right|^p dxdy\leqslant 2^p\iint\limits_{D(\eta)} h(z)$$

$$\left|P_\eta(z)\right|^p dxdy+2^pM^{np}\iint\limits_{D(\eta)}$$

$$h(z)|\varphi'(z)|^2dxdy+\iint\limits_{D-D(\eta)} h(z)\left|[\varphi(z)]^n[\varphi'(z)]^{\frac{2}{p}}\right.$$

$$\left.-P_\eta(z)\right|^p dxdy.$$

容易证明

$$\lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{D(\eta)} h(z)|\varphi'(z)|^2dxdy=0.$$

我们来估计上式右边第三项。这时对$z\in D-D(\eta)$有

$$[\varphi(z)]^n[\varphi'(z)]^{\frac{2}{p}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\frac{\eta}{2})}[\varphi(t)]^n$$

$$[\varphi'(t)]^{\frac{2}{p}}\frac{dt}{t-z},$$

因此

$$\left|[\varphi(z)]^n[\varphi'(z)]^{\frac{2}{p}}-P_\eta(z)\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}M^{m+\frac{2}{p}}\left(\frac{2}{\eta}\right)^{\frac{2}{p}}\left|\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)\right|\delta.$$

所以第三项不大于

$$\frac{1}{2\pi}M^{m+\frac{2}{p}}\left(\frac{2}{\eta}\right)^{\frac{2}{p}}\left|\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)\right|\delta m_h(D).$$

由δ之假定，知当$\eta\to 0$时，上式是收敛于零的。

现在来估计第一项。

$$\iint\limits_{D(\eta)} h(z)|P_\eta(z)|^p dxdy \leqslant m_h(D(\eta))\max_{z\in D}|P_\eta(z)|$$

$$\leqslant \mathrm{const}\cdot m_h(D(\eta))\xi(\eta).$$

因此当$\eta\to0$时，它也是收敛于零的。

总之，已证$(\varphi)_p\in(F)L_h^p(D)$。故由定理3，可知$H_p(D,\ h)\in(F)L_h^p(D)$。

定理证毕。

若引用估计

$$|\Gamma(\eta)|\leqslant\frac{5}{\eta}m(D(\eta)),$$

则定理4变成

定理4*. 设D^*有界，$H_p(D^*,\ h^*)\in(F)L_{h^*}^p(D^*)$，$p>0$，$m^h(D(h))=0\{\xi^*(\eta)^{-1}\}$，$\delta=\eta^{1+\frac{2}{p}}$，

$$\xi^*(\eta)=\delta^{-1}m(D(\eta))\exp\left\{\left(\ln\frac{2e}{\eta\delta}\right)\exp\frac{10\sigma_D^*(\eta/2)}{\eta}\right\}$$

则$H_p(D,\ h)\in(F)L_h^p(D)$。□

下面几个推论的形式比上面的结果更加简明。

系1. 若D^*有界，$H_p(D^*,\ h^*)\in(F)L_{h^*}^p(D^*)$，$p>0$，则在下列任一条件的制约下，$H_p(D,\ h)\in(F)L_h^p(D)$。

1°)

$$\lim_{\eta\to0}\frac{\eta^2}{m\left(D\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)}\ln\ln\frac{1}{m_h(D(\eta))}>50;$$

2°)

$$\lim_{\eta\to0}\frac{\eta^2}{m(D(\eta))}\ln\ln\frac{1}{m_h(D(\eta))}>50;$$

3°)

$$\lim_{\eta\to0}\eta^2\ln\ln\frac{1}{m_h(D(\eta))}>0;$$

4°)

$$\lim_{d(z)\to 0} \frac{[d(z)]^2}{m\left(D\left(\frac{1}{2}d(z)\right)\right)} \ln\ln\frac{1}{h(z)} > 50,$$

这里$d(z)$为$z\in D$到D之边界之距离。□

证明. 2°)－4°)都可直接推出1°)，所以只要证明1°)能导$H_p(D, h)\in(F)L_h^p(D)$即可.

有估计

$$\sigma_D^*(\eta/2)\leqslant 5m(D(\eta/2))+1,$$

所以

$$\xi^*(\eta)<\exp\{\exp[(50+\varepsilon)\eta^{-2}m(D(\eta/2))]\}$$

对某$\varepsilon>0$以及充分小之$\eta>0$成立. 而由1°), 则有$m_h(D(\eta))\xi^*(\eta)=O(1)$. 由定理4*, 即得证明.

类似地可以证明

系2. 设D^*有界, $H_p(D^*, h^*)\in(F)L_h^{p*}(D^*)$, $p>0$. 当$\sigma_D^*(\eta)$有界时, 则下列任一条件都保证$H_p(D, h)\in(F)L_h^p(D)$.

1°)

$$\lim_{\eta\to 0}\eta\ln\ln\frac{1}{m_h(D(\eta))}=\infty;$$

2°) $\displaystyle\lim_{d(z)\to 0} d(z)\ln\ln\frac{1}{h(z)}=\infty.$

所有这些条件都指明, $h(z)$虽然在区域不为零, 但当它趋向边界时充分快地收敛于零, 故保证了封闭性的转化. □

注: 上面用$\Gamma(\eta)$来进行处理的方式完全可以用D之内平准曲线族来代替, 这时也可以得到类似的结果, 只不过描述的概念不一样.

3.3. 下面结果与定理的证法相似, 只不过问题的提法不一样.

定理5. 设极点在$\bar{D}$处的有理函数系在$H_p(D, h)$, $p>0$中封闭, 并对任给定的$\varepsilon>0$及任何给定的$a\bar{\in}\bar{D}$, 存在卧于$\bar{D}$外之可求长Jordan弧L: $z=z(s)$, $z(0)=a$, $|z(l)|=1$使得

$$\left|\int_0^l \exp\left\{\frac{p}{r_0}\exp\left[r_0 c\int_0^s \frac{dt}{d(t)}\right]\right\}dB(s)\right| < \varepsilon, \tag{1}$$

则$H_p(D,\ h)\in(F)L_h^p(D)$。这里$B(s)=m_h(D\cap R_s)$，G，$d(s)$，R_s，c的意义与引理中同，r_0为任何大于1之实数。□

证明. 由引理，知对任何$a\bar{\in}\bar{D}$和任给的$\varepsilon_1>0$，存在多项式$P(z)$，使得

$$\left|\frac{1}{z-a}-P(z)\right|<\varepsilon_1,\ z\bar{\in}R_0, \tag{2}$$

$$|P(z)|<\exp\left\{\left(\ln\frac{e}{d(0)\varepsilon_1}\right)\exp\left[c\int_0^s d(t)^{-1}dt\right]\right\},z\bar{\in}R_s. \tag{3}$$

这时我们还可要求a到D之距离大于$d(0)$，因为a是已给定了的。

因为

$$\iint_D h(z)\left|\frac{1}{z-a}-P(z)\right|^p dxdy=\iint_{D\cap R_s}+\iint_{D-D\cap R_s}h(z)\left|\frac{1}{z-a}-P(z)\right|^p dxdy,$$

由（3）式有

$$\iint_{D\cap R_s}h(z)\left|\frac{1}{z-a}-P(z)\right|^p dxdy\leqslant 2^p\iint_{D\cap R_s}h(z)\frac{dxdy}{|z-a|^p}$$

$$+2^p\iint_{D\cap R_s}h(z)|P(z)|^p dxdy\leqslant\left(\frac{2}{d(0)}\right)^p\int_0^l dB(s)+2^p\int_0^l$$

$$\exp\left\{p\left[\ln\frac{e}{d(0)\varepsilon_1}\right]\exp\left[c\int_0^s\frac{dt}{d(t)}\right]\right\}dB(s),$$

注意不等式

$$\lambda\sigma\leqslant\frac{\lambda^{r_0}}{r_0}+\frac{\sigma^{r'}}{r'},\ \left(\frac{1}{r_0}+\frac{1}{r'}=1,\ \lambda,\ \sigma\geqslant 0\right)$$

则由不等式（1）得到

$$\int_0^l dB(s)<\varepsilon e^{-\frac{p}{r_0}},$$

因而有

$$\iint_{D\cap R_s}h(z)\left|\frac{1}{z-a}-P(z)\right|dxdy<(2e^{\alpha})^p\int_0^l\exp\left\{\frac{p}{r_0}\exp\right.$$

$$\left[r_0 c\int_0^s d(t)^{-1}dt\right]\Big\}dB(s)+$$

$$+\left(\frac{2e^{-1/r_*}}{d(0)}\right)^p \varepsilon<\text{const}\cdot\varepsilon,$$

这里$\alpha=\frac{1}{r'}\left[\ln\frac{e}{d(0)\varepsilon_1}\right]^{r'}$. 另一方面，由（2）式有

$$\iint_{D-D\cap R_*} h(z)\left|\frac{1}{z-a}-P(z)\right|^p dxdy<\varepsilon_1^p m_h(D).$$

由于ε，ε_1是任给的，故对任何$a\bar{\in}\bar{D}$，$\frac{1}{z-a}\in(F)L_h^p(D)$. 而极点在$\bar{D}$外之有理函数又可用形如

$$\sum\frac{b_k}{z-a_k},\qquad a_k\bar{\in}\ \bar{D}$$

的函数来任意逼近，因此定理得证。

定理5主要是用第四方案，它是用一致逼近的结果转化成由有理中值逼近到多项式中值逼近。

（1）式可用下面较明朗的形式来代替，

$$\left|\int_0^l \exp\left\{p\exp\left[5\int_0^l\frac{dt}{d(t)}\right]\right\}dB(s)\right|<\varepsilon. \qquad (1^*)$$

因对于确定的$f(z)\in H_p(D,\ h)$，我们都选$r_0\geqslant\frac{5}{c}$即可，故当$p>1$时，（1）式还可用下式来代替

$$\left|\int_0^l \exp\left\{\exp\left[5p\int_0^l\frac{dt}{d(t)}\right]\right\}dB(s)\right|<\varepsilon. \qquad (1^{**})$$

另一较明朗的形式是

定理5*. 若对任何$a\bar{\in}\bar{D}$，$|a|<1$，有$\delta_0(a)>0$存在，则当$\delta<\delta_0(a)$时，有$\bar{D}$外之可求长Jordan弧L: $z=z(s)$，$z(0)=a$，$|z(l)|=1$，使得对$p>0$有

$$m_h(D_\delta(L))<\exp\left\{-p_0\exp\frac{5l}{\delta}\right\},\ p_0=\min(p,\ 1).$$

当极点在$\bar{D}$外的有理函数系在$H_p(D,\ h)$中封闭时，$H_p(D,\ h)\in$

$(F)L_h^p(D)$。这里$D_\delta(L)$是L的δ邻域与D之公共部分。□

实际上，在定理5中取$d(s)=\delta$，并且令 $1<r_0<\frac{5}{c}$，则当δ充分小时

$$\exp\left\{\frac{p}{r_0}\exp\left[r_0 c\int_0^s \frac{dt}{d(t)}\right]\right\}<\exp\left\{p_0\exp\left[c'\frac{l}{\delta}\right]\right\},$$

这里$c<c'<5$。故有

$$\left|\int_0^l \exp\left\{\frac{p}{r_0}\exp\left[r_0 c\int_0^s \frac{dt}{d(t)}\right]\right\}dB(s)\right|<\left(\exp\left\{p_0\exp\left[c'\frac{l}{\delta}\right]\right\}\right)m_h(D_\delta(L)).$$

因而定理5*之条件对$\delta>0$充分小可导致定理5的条件的满足。

定理5*证毕。

3.4. 再对第四方案提出一些例子。

我们已经知道，在一定条件下，许多函数族是在$L^p(|z|=1)$中封闭的，如$\{z^{\lambda_n}\}$，$\{G(a_n z)\}$，$\{z^n G^{(n)}(a_n z)\}$等等。因在 $L^p(|z|=1)$，$p\geqslant1$中收敛必导致在$|z|<1$内广义一致收敛，因而在$\bar{D}$上一致收敛。而$(P)^A$显然又属于$L^p(|z|=1)$，$p\geqslant1$。因此可以得到下面一个关于面性中值的结果：

定理6. 若$H_p(D,\ h)\in(F)\ L_h^p(D)$，$p>0$；又设解析函数族$(f)$对某$q\geqslant1$，在$L^q(|z|=1)$中封闭。则$(f)$也必按$L_h^p(D)$的度量在$H_p(D,\ h)$中封闭。□

这样就不难找到象$\{z^{\lambda_n}\}$，$\{G(a_n z)\}$，$\{z^n G^{(n)}(a_n z)\}$，$\{(z-a_n)^{-1}\}$，$\{(z-a_n)^{-n}\}$之类的函数族在$H_p(D,\ h)$中封闭的条件。

参 考 文 献

〔1〕吴学谋，函数集的完全性，数学学报，7：4（1957），477—491.

〔2〕С.Манделбьойт, Лримыкающие Ряды. Регуляризация Лоследовательностей, Лрименения, Москва, 1955.

〔3〕 С.Мандельбройт, теоремы Замкнутости и теоримы Комлозиции, Москва, 1962.
〔4〕 М.А.Евграфов, Интерполяционная Задача Абеля—Гонцарова, Москва, 1954.
〔5〕 И.И.Ибрагимов, О Стодимости Интерлоляционного Ряда Абеля—гонцарова, Магем.Сб.21 (63) (1947).
〔6〕 С.Н.Мергелян, О Лолноте Систем Аналитицеских функций ЎМН, 8; 4 (56) (1953), 3—63.

第九章

泛系方法论与泛系逼近论

我们已指出过，泛系方法论或泛系理论是事物机理中广义的

的关系、高阶谓词、动态关系、含参量的关系等概念的泛称，或是它们的概括与推广．E也叫S的硬部，记为$B(S)$； H也叫S的软部，记为$H(S)$。S有时也记为$B(S)/H(S)$。

广义的系统是指一定的事物集与某些有关的泛结构集合的统一体．广义的对称或泛对称是指变与相对不变或自由与约束的联系与转化，特别是广义系统转化中泛结构的相对守恒性或相对封闭性．形式泛系就是描述广义的系统、转化、对称与泛系关系及其转化的一种数学工具．

一般说，形式泛系的两部分都表述为某些积集的子集形式：$B(S)\subset\Pi E_i$，$H(S)\cap\Pi H_j$，而且它们之间还可能有某些关系，只有那样才能得到较多有用的结果．也即形式泛系往往是一些多层次的多元关系的复合或结合．下面我们介绍一些生成方案．我们记$F\uparrow T=\{f|f:T\to F\}$，用$P(F)$表集$F$的子集形成的集合．

定义（R生成泛系）．设U为任何给定的集合族，$R:U\to R(U)$，则$S=(E,H)$，$E\in U$，$H\subset R(E)$，作为一种形式描述工具，则叫R生成泛系．□

例：（1）$R(E)\triangleq E$；（2）$R(E)\triangleq E\uparrow T$，这里$T$是某一给定的集合；（3）$R(E)\triangleq E\times T$；（4）$R(E)\triangleq L\uparrow(E\uparrow T)$，这里$L$是一给定的集合；（5）$R(E)\triangleq P([\cup E\uparrow T_i]\cup[\cup E\times F_j])$，这里$T_i$，$F_j$为某些给定的集合；（6）$R(E)\triangleq[\cup(L\uparrow(E\uparrow T_i))]\cup[\cup L\uparrow(E\times F_j)]$；（7）由上述诸$R$经复合迭代，集代数运算，直积与幂运算生成各种新的$R$．

从上述例子我们可以看到，传统数学与现在的Fuzzy 集论都是R生成泛系的逻辑模型，也即三者有某种广义逼近性．

定义（G过程及结构空间）．若R为一给定的集生成算子，Λ为一给定的满足选择公理的 Zermelo—Fraenkel 公理系统的传递模型的序数集．对于$\lambda\in\Lambda$，设a_λ，b_λ为二给定的集族．定义$\bar{a}_0=a_0$，$\bar{a}_1=a_1$，$\bar{a}_{\lambda+1}=(\bar{a}_\lambda, a_{\lambda+1})$，$\lambda\in\Lambda$，$\lambda\geqslant1$．令$N_n\triangleq\{1,2,\cdots,n\}$，$N(\cdot)\triangleq\{N_n\}$，$T(\cdot)\triangleq T\cup N(\cdot)$。则下面的生成过程叫做$G$过程．

$$G[E] \equiv G[E, \vec{a}_1, \vec{b}_1, R) \triangleq [\cup R(E \uparrow T)] \cup$$
$$[\cup R(E \times F)](T \in a_1(\cdot), F \in b_1(\cdot)),$$
$$G^{\sigma+1}[E) \equiv G^{\sigma+1}[E, \vec{a}_{\sigma+1}, \vec{b}_{\sigma+1}, R)$$
$$\triangleq G[G^{\sigma}[E), a_{\sigma+1}, b_{\sigma+1}, R);$$

若对极限序数σ，我们定义

$$G^{\sigma}[E) \triangleq \cup G^{\lambda}[E)(\lambda < \sigma).$$

我们将用$H \subset J_M[E,R)$或$H \subset J[E)$表示：$\exists(\Lambda' \subset \Lambda, a_\sigma, b_\sigma, \sigma \in \Lambda')$，使得$H \subset \Pi G^{\sigma}[E \cup M, \vec{a}_\sigma, \vec{b}_\sigma, R)(\sigma \in \Lambda')$。

$J[E)$即叫E的结构空间，M叫结参。□

注1：在结构空间定义中，有时用$E \times M$代替$E \cup M$。

注2．$J[E)$与$G^{\sigma}[E)$都可看成一类R集生成算子。

定义．$S=(E,H)$，$H \subset R(E)$，$H \subset G^{\sigma}[E)$，$H \subset J[E)$，分别叫做R泛系、G^{σ}泛系和J泛系。G过程中的有关的R叫做泛结构H的原逻辑或原信息。□

因为每一映射$R: U \to R(U) \subset V$都可找到某种等价描述$f \in Y_2 \uparrow (U \times V)$，或者$g \in B_2 \uparrow (U \times V)$，或者$h \in N_2 \uparrow (U \times V)$，或者$r \in P(U \times V)$，这里$Y_2=\{阴，阳\}$，$B_2=\{0,1\}$为二值Boole代数．所以，任何$G^{\sigma}$泛系与$J$泛系都可由原逻辑信息$Y_2\uparrow$，$B_2\uparrow$，$N_2\uparrow$或$P$生成．若把生成这种特殊的局整关系看成一种广义的逼近，则上述G过程可看成一种广义逼近过程．而且由上述讨论可知道中国的阴阳分析与Boole值模型的普适性．同时，Fuzzy集论在数学形式上可转化为非Fuzzy的更高层次的形式泛系来处理．由于在G过程中G^{σ}泛系和J泛系是由包含关系（局整关系）和直积运算（形影关系）生成，因而局整关系与形影关系就构成了广义逼近许多形式泛系的组件或基砖．

1.2．基本转化的复合

局整关系与形影关系既然是许多形式系统（特别广义的形式的转化）的组件，我们就可用类似公理的方法用它们来描述一些更复杂的转化．

定义．设形式系统$S=(G, E, F, f, g)$满足下列条件：(1) $E, F\subset G$，它们的元素分别叫做投影与限定；(2) $f\subset G^3$为G的部分运算，满足结合律。若$(x,y,z)\in f$记为$x\cdot y=z$，即$(x\cdot y)\cdot t=x\cdot(y\cdot t)$．$f$只对$G^2$的某些子集有定义，简称复合或形式复合；(3) g为G的部分映射，称为形式递运算，$g(x)$也简记为x^{-1}； 定义$A\cdot B=\{a\cdot b|a\in A, b\in B\}$，$A^{-1}=\{x^{-1}|x\in A\}$；(4) $E\cdot E\subset E$，$F\cdot F\subset F$，$E\cdot F=F\cdot E$．□

定义．在上定义条件下，E^{-1}中的元素叫赋形，F^{-1}中的元素叫扩展，$E\cdot E^{-1}$，$E^{-1}\cdot E$，$F^{-1}\cdot E$，$F\cdot E^{-1}$，$F\cdot E^{-1}\cdot E\cdot F^{-1}$中的元素分别叫做硬模拟、隐模拟、鸟瞰、显微、协模拟．当把广义系统的软部作为论域G中的元素时，定义的硬模拟就叫做软模拟．由E与F经f，g生成的各种元素叫泛模拟．□

上面引入的局整关系、形影关系、模拟关系与宏微关系的形式化概念都可看成某些广义的逼近．广义逼近中泛结构的相对守恒性叫逻辑守恒性，它们可看成某些广义的逼近度．泛系方法论已经有一部分工作研究其它泛系关系与上述广义逼近的转化，也求得了一系列广义逼近度的结果．

1.3. 类集性泛系与T元泛系

传统集论的局整关系与形影关系满足上节形式化的条件，因而可以自然地诱导出相应的泛系宏微关系与模拟关系．Fuzzy集论的许多映射也满足这一模型．

若L为上完备格，$f_1\in L\uparrow(E_1\times E_2)$，$f_2\in L\uparrow(E_2\times E_3)$，则定义复合$f_1\circ f_2\in L\uparrow(E_1\times E_3)$为$(f_1\circ f_2)(x_1, x_3)=\bigvee(f_1(x_1, x_2)\wedge f_2(x_2, x_3))(x_2\in E_2)$．对$f_1\subset E_1\times E_2$，$f_2\subset E_2\times E_3$，则定义$f_1\circ f_2=\{(x_1,x_3)|(x_1,x_2)\in f_1, (x_2,x_3)\in f_2\}$．而对$D\subset E_2$，定义$f_1\circ D=\{x_1|(x_1,x_2)\in f_1, x_2\in D\}$，$D\circ f_2=\{x_3|(x_2, x_3)\in f_2, x_2\in D\}$．类似的，对$f_1\in L\uparrow(E_1\times E_2)$，定义$f_1^{-1}\in L\uparrow(E_2\times E_1)$为$f_1^{-1}(x_2, x_1)=f_1(x_1,x_2)$；对$f_1\subset E_1\times E_2$，定义$f_1^{-1}=\{(x_2,x_1)|(x_1,x_2)\in f_1\}$．关于复合更复杂的推广见[1]．

对于任何一个二元关系$\varphi \subset G \times K$都可经过限定转化为对$G$与$K$均满的情况。同时又可证明满二元关系与隐模拟是等价的，因而隐模拟可用来刻划或广义逼近任何二元关系的本质特性。

能用硬部来广义逼近形式泛系的局整关系和形影关系的形式泛系叫类集性泛系。因而类集性泛系的子泛系与影泛系相对由硬部的子集与影集一意诱导生成，自然也定义了类集性泛系的宏微关系与模拟关系，而且往往可留用集论的某些概念与符号。例如并、交、包含、直积、映射与复合等。这里要注意的是，这种诱导不一定保证类集性泛系一切性状与集合的相同，例如类集性泛系的子泛系的并并不等于泛系本身，虽然相应的硬部之并全部复盖原泛系的硬部.这一特点正是泛系方法对有名的系统论原理"整体大于部分的和"的数学模拟证明。另外，类集性泛系的诱导不一定只有一种方案，所以有关泛系关系的具体实现是与诱导有关的。若$S=(B(S), H(S))$是一类集性泛系，$B(S')=B(S)\circ f$, $f\subset B(S)\times B(S')$，并且存在诱导$f^*=C(S,f)$，$H(S')=H(S)\circ f^*$, $f^*\subset H(S)\times H(S')$，则广义的影泛系$S\circ f=\widehat{S'}=(B(S)\circ f,\ H(S)\circ f^*)$显然依赖于$C(\cdot,\cdot)$。类集性概念也可看成Fuzzy扩展原理的推广。

为了保证诱导后概念的一意性，往往要求诱导映射具有可交换性与可结合性：$(f\circ g)^*=f^*\circ g^*$，$(f\circ g)^*\circ h^*=f^*\circ(g\circ h)^*$。

下面介绍一些诱导。

定义（复合的自然诱导）。若$h\in H\subset L\uparrow(E\uparrow T)$，$L$为上完全分配格，则定义$h\circ f^*=h\circ f\in L\uparrow[(E\circ f)\uparrow T]$，$H\circ f^*=\{h\circ f\}\subset L\uparrow[(E\circ f)\uparrow T]$。类似对$H\subset E\uparrow T$定义$f^*$。□

定义（限定的自然诱导）。若f：$E'\subset E$，则$E'\times T\subset E\times T$，$E'\uparrow T\subset E\uparrow T$，$P(E')\subset P(E)$，$P(E'\times T)\subset P(E\times T)$，$P(E'\uparrow T)\subset P(E\uparrow T)$。若$h\in P(E)$，定义$h\circ f^*=h\circ E'\in P(E')$，这样即定义了$P(E)\circ f^*=P(E')$。类似定义$P(E\times T)\circ f^*=P(E'\times T)$，$P(E\uparrow T)\circ f^*=P(E'\uparrow T)$，等。□

定义（映射的自然诱导）。若f：$E\to f(E)$，对$h=(e,\ t)\in$

$E\times T$，令$f^*(h)=(f(e),\ t)$，则f^*：$E\times T\to f(E)\times T$。对$h=(e_t)(t\in T)\in E\uparrow T$，令$f^*(h)=(f(e_t))(t\in T)$，则$f^*$：$E\uparrow T\to f(E)\uparrow T$。对$h\in P(E)$，则$h\subset E$，定义$f^*(h)=f(h)\subset f(E)$，则$f^*$：$P(E)\to P(f(E))$。类似定义$f^*$：$P(E\times T)\to P(f(E)\times T)$；$f^*$：$P(E\uparrow T)\to P(f(E)\uparrow T)$。□

我们容易证明下面的结果。

若R_σ是集算子，并且$R_\sigma(E)\circ f_\sigma^*\subset R_\sigma(E\circ f)$，$I(h)=\{i|h\in R_i(E)\}$，势$|I(h)|\equiv 1$，则$[UR_\sigma(E)]\circ f^*\subset UR_\sigma(E\circ f)$，这里$h\circ f^*$为$h\circ f_i^*(i\in I(h))$。

设R_σ为集算子，并且$R_\sigma(E)\circ f_\sigma^*\subset R_\sigma(E\circ f)$，则$\{A_1R_\sigma[A_2(EA_3)]A_4\}\circ f^*\subset A_1R_\sigma[A_2((E\circ f)A_3)]A_4$，这里$A_1$，$A_2\in\{,\Pi P,\ (\circ)-\Pi,\ L_\sigma\uparrow\}$，$A_3$，$A_4\in\{\uparrow T_\sigma,\ \times F_\sigma\}$，而$f^*$是由$\{f_\sigma^*\}$生成的确定的有关自然诱导，$(\circ)-\Pi g_i$表示$g_1\circ g_2\circ g_3\circ\cdots$。

例：(1) $[\Pi R_\sigma(E)]\circ f^*\triangleq\Pi[R_\sigma(E)\circ f_\sigma^*]\subset\Pi R_\sigma(E\circ f)$；(2) $P(R_\sigma(E))\circ f_\sigma^{**}=P(R_\sigma(E)\circ f_\sigma^*)\subset P(R_\sigma(E\circ f))$，这里$f_\sigma^{**}$是$f_\sigma^*$的某一自然诱导；(3) $[L\uparrow(R_\sigma(E)\uparrow T)]\circ f_\sigma^{**}\subset L\uparrow[(R_\sigma(E)\circ f_\sigma^*)\uparrow T]\subset L\uparrow[R_\sigma(E\circ f)\uparrow T]$。

定义（L↑P(L)诱导）．若g：$P(L)\to L$，f：$E\to f(E)$，$h\in L\uparrow(E\uparrow T)$，则对$t\in f(E)\uparrow T$，$\Pi f^{-1}(t(i))(i\in T)\triangleq k\subset E\uparrow T$，并且，$h(k)\in P(L)$，故有$g(h(k))\in L$。令$f^*(h)\in L\uparrow(f(E)\uparrow T)$定义为$f^*(h)(t)=g(h(k))$。对$h\in L\uparrow(E\times F)$相似定义$f^*$。□

定义（Y_2W诱导）．设f：$E\to f(E)$，$h\in Y_2\uparrow[W\times(E\uparrow T)]$，则$h^{-1}$(阳)$\subset W\times(E\uparrow T)$。令$D=\{(w,\ a\circ f)|(w,\ a)\in h^{-1}$(阳)$\}$，这里$a\circ f=f(a(*))$：$T\to f(E)$，并且$a\circ f\in f(E)\uparrow T$，$w\in W$，因此$D\subset W\times(f(E)\uparrow T)$。这时定义$f^*(h)\triangleq k\in Y_2\uparrow[W\times(f(E)\uparrow T)]$，这里$k^{-1}$(阳)$=D$。显然$f^*$：$Y_2\uparrow[W\times(E\uparrow T)]\to Y_2\uparrow[W\times(f(E)\uparrow T)]$。类似可定义$f^*$：$Y_2\uparrow[W\times E\times F]\to Y_2\uparrow[W\times f(E)\times F]$。□

可以证明：复合、限定、映射的自然诱导及$L\uparrow P(L)$诱导和Y_2W诱导都具有结合性与可交换性．而且泛代数系统、拓扑空间、测度空间、图论系统、Fuzzy 集等都可转化为类集性泛系来

处理。

定义（T元泛系）．令$T=\{T_i\}$为某集族，则J泛系$S=(G, H)$叫泛系代数系统．这里$H\subset L\uparrow D$，$D=\cup G\uparrow T_i$．记$G\uparrow T=\{G\uparrow T_i\}$，$f\subset G\uparrow T$表示$f=\{f_i\}$，$f_i\subset G\uparrow T_i$，则（$G$，$f$）叫$T$元泛系．□

T元泛系是一种典型的类集性泛系．与泛系代数系统有关的概念有：（1）$D=G$：拓扑空间、测度空间、概率空间、Fuzzy集、Fuzzy测度空间等；（2）$D=G^2$：图、格、软代数、布尔代数、半序集、等价性、对称性、Fuzzy关系、函数关系、相似等；（3）$D=G^3$：群、环、域、半群、半环、缔合性、分配性．迭代性等；（4）$D=\cup G^n(n=0, 1, \cdots, \infty)$：形式语言、Fuzzy算法、图画、立体结构、动态过程等。

T元泛系也是泛代数系统的自然推广．利用赋形逻辑守恒性，我们能自然地建立$G\uparrow T$中的序结构，合取，析取，复合等，只要G中有相应的结构。

1.4. 泛同态与泛系变量

若C为某给定的泛系类，B是一类泛系转化（例如泛系关系所描述的某些转化），B中使C不变的转化称为(C, B)同态或(C, B)泛同态．对于类集性泛系，一一对应的同态也称同构．若C，C'为二给定的泛系类，B中使C转化为C'之内，则为(C, B, C')泛同态．若对每$d'\in C'$，有B中之元使某$d\in C$转化为d'，则B叫(C, C')泛系变量．可测函数、连续映射、随机变量、Fuzzy变量、Fuzzy集等都是特殊的泛系变量．泛同态与泛系变量都是典型的泛对称，是守恒性的一种宏观描述．这些泛对称的转化叫做Nöether泛对称或N泛对称。

§2. 一些泛系关系的转化与广义逼近

2.1. 典型的二元关系与泛系同态定理

设$g\in P(G^2)$，记$g^{(n+1)}=g^{(n)}\circ g$，$g^t=g\vee g^{(2)}\vee\cdots$，对

$P(G^n)$ 上的大小关系及合取析取运算，按集论包含关系诱导的格来定义。定义$I=I(G)=\{(x,x)|x\in G\}$。令$R[G)=\{g|I\leqslant g\}$，$S[G)=\{g|g=g^{-1}\}$，$S_a[G)=\{g|g\wedge g^{-1}\leqslant I\}$，$T[G)=\{g|g^{(2)}\leqslant g\}$，$C[G)=\{g|g\vee g^{-1}=G^2\}$，$U[G)=\{g|g^t\wedge g^{-t}\leqslant I\}$，$T_q[G)=\{g|f\leqslant g\}(f\in\{(g-g^{-1})^{(2)}, (g-g^{-1})\circ(g\wedge g^{-1}), (g\wedge g^{-1})\circ(g-g^{-1})\})$，它们分别表征下列二元关系类：自返性、对称性、反对称性、传递性、完全性、单向性、拟传递性。

定义$E_s[G)=R[G)\cap S[G)$，$E[G)=E_s[G)\cap T[G)$，$L_s[G)=R[G)\cap T[G)$，$L[G)=L_s[G)\cap S_a[G)$，$L_c[G)=L[G)\cap C[G)$，$L_q[G)=R[G)\cap T_q[G)$。它们分别表征下列二元关系类：半等价性（相容性，一种Fuzzy性）、等价性、半偏序性（半半序性）、半序性(偏序性)、全序性、拟偏序性(拟半序性)。

类R，S，E_s，E即为典型的泛系异同关系类。类S_a，T，T_q，U，L_s，L_q，L，L_u即为典型的泛系序关系类。

对于$\delta\in E_s[G)$，定义$G_i=\max\{D|D\subset G, D^2\leqslant\delta\}$，记$\{i\}_r$为$\sigma(\delta)$，$\|\delta\|=|\sigma(\delta)|$，$\{G_i\}$为$G/\delta$，称$G$对$\delta$的商系统或商集合，并记$G_i\subset G(d\delta)$或$G=\cup G_i(d\delta)$。定义诱导关系$f_\delta=\{(x, G_i)|x\in G_i\}(\subset G\times(G/\delta))$。

下面一些结果不难证明，但它们描述了与广义逼近有关的一些基本机理。

定理1. 若$G=\cup G_i(d\delta)$，则$G=\cup G_i$。若$\delta\in E[G)$，则诸G_i退化为G的一分明划分。$(x, y)\in\delta$等价于$\exists i(x, y\in G_i)$。对于E类，$(x, y)\in\bar{\delta}$（δ的补）等价于$\exists ij(i\neq j, x\in G_i, y\in G_j)$，并且$x\circ\delta=\delta\circ x=G_i$。□

定理2. f_δ是G与G/δ间的隐模拟，并且$f_\delta\circ f_\delta^{-1}=\delta$，$f_\delta^{-1}\circ f_\delta=\{(G_i, G_j)|G_i\cap G_j\neq\phi\}\in E_s[G/\delta)$。当$\delta\in E[G)$时，$f_\delta$退化为映射$f_\delta:G\to f_\delta(G)=G/\delta$，$f_\delta^{-1}\circ f_\delta=I(G/\delta)$。□

定理3. 若$g\subset F\times G$对F为满，则$g\circ g^{-1}\in E_s[F)$。若对G为满，则$g^{-1}\circ g\in E_s[G)$。□

定理4. 若$g\subset F\times G$为隐模拟，则$g\circ g^{-1}\in E_s[F)$，$g^{-1}\circ g\in$

$E_s[G)$。当g为硬模拟时，则$g\circ g^{-1}\in E[F)$，$g^{-1}\circ g\in E[G)$。□

定理5. 若$g\in L_q[G)$，则$g\wedge g^{-1}\in E_s[G)$。若$g\in L_s[G)$，则$g\wedge g^{-1}\in E[G)$。反之，若$g\in L_q[G)$，$g\wedge g^{-1}\in E[G)$，则$g\in L_s[G)$。□

这个定理的有关说明见[17]。

定理6. 若$g\subset F\times G$为隐模拟，$\delta\in A[F)$，$A\in\{R, S, E_s\}$，则$g^{-1}\circ\delta\circ g=\delta'\in A[G)$，若$A\in\{T, E, L_s\}$，或者$g\circ g^{-1}=I(F)$，或者对某正整数$n$使得$g\circ g^{-1}\leqslant\delta^{(n)}$，则$\delta'\in A[G)$。□

定理7. 若$\theta_i\in E_s[G)$，则$\vee\theta_i$，$\wedge\theta_i$，$\theta_i^{-1}\in E_s[G)$。若$(\circ)-\Pi\theta_i$可交换，则它也属于$E_s[G)$。此外，$\theta_i\cap D^2\in E_s[G\cap D)$。□

定理8. 若$g\in P(G^2)$，则$g^t\in T[G)$。若$\theta_i\in E[G)$，则$\wedge\theta_i$，θ_i^{-1}，$(\vee\theta_i)^t\in E[G)$，$\theta_i\cap D^2\in E[G\cap D)$。若$\theta_i$对复合可交换，则$(\circ)-\Pi\theta_i\in E[G)$。□

定理2，4，7，8实际上是泛代数中的基本同态定理的实质性推广，其简单的形式具有方法论的特点。并且描述了典型的广义逼近的规律，它把泛系异同关系、模拟关系、形影关系、局整关系用一种朴素的形式联系起来，将此简称为泛系同态基本定理。下面我们介绍泛系同态定理的一些发展形式。

定义. 设θ，$\delta\in E_s[G)$，$G=\cup G_i(d\theta)=\cup G'_j(d\delta)$。定义$f_\varepsilon=\{(G_i, G'_j)\mid G_i\cap G'_j\neq\phi\}$，$\varepsilon=\delta/\theta=f_\varepsilon\circ f_\varepsilon^{-1}$。□

对于半等价关系的除法可以证明一系列与泛系同态定理有关的结果。

定理9. $f_\varepsilon\subset(G/\theta)\times(G/\delta)$是隐模拟，并且$\delta/\theta\in E_s[G/\theta)$。若$\delta\geqslant\theta$，则$f_\varepsilon$退化为一映射，$\delta/\theta\in E[G/\theta)$，$\|\delta/\theta\|=\|\delta\|$，$G/\theta=\cup Q_j(d\delta/\theta)$，$Q_j=\cup G_i(G_i\cap G'_j\neq\phi)$，$\delta/\theta=\vee[\cup G_i(G_i\cap G'_j\neq\phi)]^2(j\in\sigma(\delta))$。□

定理10. $\theta/I(G)=\theta$。□

定理11. $f_{\delta/\theta}=f_\theta^{-1}\circ f_\delta=f_{\theta/\delta}^{-1}$． $\delta/\theta=f_\theta^{-1}\circ f_\delta\circ f_\delta^{-1}\circ f_\theta=f_\theta^{-1}\circ\delta\circ f_\theta$。□

一般地说，$\{\delta/\theta\mid\delta\in E_s[G)\}\neq E_s[G/\theta)$，但我们有下面的定

理。

定理12. 设$\delta\in E_s[G]$，$\theta\in E[G]$，则有$\delta/\theta\geqslant\theta/\theta=I(G)/\theta=f_\theta^{-1}\circ f_\theta=f_{\theta/\theta}=(f_{\theta/\theta})^{(*)}=f_\theta^{-1}\circ\theta\circ f_\theta=\{(G_i,\ G_k)\mid G_i\cap G_k\neq\phi\}=I(G/\theta)$，$\{\delta/\theta\mid\delta\in E_s[G]\}=E_s[G/\theta]$。□

定理13. 若$\delta'\leqslant\delta''$，则$\delta'/\theta\leqslant\delta''/\theta$。□

定理14. 若$I(G)\leqslant\delta\leqslant\theta$，$\delta\in E_s[G]$，$\theta\in E[G]$，则$\delta/\theta=\theta/\theta=I(G)/\theta$。□

定理15（会诊型泛系同态定理）. 设$g_\sigma\subset G\times F_\sigma$为给定的隐模拟族。$d_\sigma\in P(F_\sigma^2)$，则$f_c\subset(G/b)\times(G/a)$均为隐模拟。这里$c=a/b$；$a$，$b\in\{\delta_\sigma\}\cup\{\wedge\delta_\sigma,\ \vee\delta_\sigma\}$，$\delta_\sigma=g_\sigma\circ\theta_\sigma(d_\sigma)\circ g_\sigma^{-1}$，或者$\delta_\sigma=\tau_\sigma(g_\sigma\circ d_\sigma\circ g_\sigma^{-1})$，$\theta_\sigma$，$\tau_\sigma$为某些泛系算子，$\theta_\sigma$：$P(F_\sigma^2)\to E_s[F_\sigma)$，$\tau_\sigma$：$P(G^2)\to E_s[G)$。并且，若$b\leqslant a$，$a\in E[G)$，则$f_c$退化为映射，$f_c$：$G/b\to f_c(G/b)=G/a$，并且$c\in E[G/b)$。□

这里描述的广义的会诊表征了对不同方案的综合所导致的广义逼近的强化。

定理 7 中关于异同关系限定守恒的结果的另外一种形式是：

定理16. 若$\delta\in E_s[G)$，$G=\cup G_i(d\delta)$，则$G\cap Q=\cup(G_i\cap Q)(d(\delta\cap Q^2))$.并且有$Q\circ\delta=\cup G_i(d[\delta\cap(Q\circ\delta)^2])\ (G_i\cap Q\neq\phi)$，$|(Q\circ\delta)/[\delta\cap(Q\circ\delta)^2]|=|(G\cap Q)/(\delta\cap Q^2)|$。□

定理17. 若δ，θ，$\varepsilon\in E_s[G)$，$a=\delta/\varepsilon$，$b=\theta/\varepsilon$，$c=a/b$，$d=\delta/\theta$，则有$I(G/\varepsilon)/a=\varepsilon/\delta$，$f_d\leqslant f_c=f_\theta^{-1}\circ\varepsilon\circ f_\delta$，$f_\theta^{-1}\circ\delta\circ f_\theta=d\leqslant c=f_\theta^{-1}\circ\varepsilon\circ\delta\circ\varepsilon\circ f_\theta\in E_s[G/\theta)$。若$\varepsilon\leqslant\delta\wedge\theta$，则有$\delta/\theta=(\delta/\varepsilon)/(\theta/\varepsilon)$。□

2.2. 泛系算子与交互估值定理

下列运算或变换的复合叫做泛系运算：集代数运算（包括逻辑运算）、复合、泛系模拟、直积的改序变换。把结构或多元关系转化为泛系异同关系或泛系序关系的运算叫泛系算子。

定义. 设$g\in P(G^2)$，定义$\varepsilon_1(g)=g\vee g^{-1}\vee I$，$\varepsilon_2(g)=\varepsilon_1(g\wedge g^{-1})$，$\varepsilon_3(g)=\varepsilon_1(g^t\wedge g^{-t})$，$\varepsilon_4(g)=\varepsilon_1(g\circ g^{-1})$，$\varepsilon_5(g)=$

$\varepsilon_1(g^{-1}\circ g)$, $\varepsilon_{i+6}(g)=\varepsilon_i(\bar{g})$, $\delta_j(g)=[\varepsilon_j(g)]^t$. 另外定义$\lambda_j(g)=\max\{\delta|\delta\in E[G], \delta\leqslant\varepsilon_j(g)\}$(若有意义的话). 一般它们可能没意义，也可能多值，在一些具体问题中可取其一分枝来讨论. □

从定义可得知，$\varepsilon_i(g)\in E_s[G]$, $\delta_i(g)$, $\lambda_i(g)\in E[G]$, $\lambda_3(g)=\varepsilon_3(g)=\delta_3(g)$。若$g\in L[G]$, $G=\bigcup G_\sigma(d\varepsilon_1(g))$，则$G_\sigma$为对于$g$的极大链；$g\cap G_\sigma^2\in L_c[G_\sigma]$。若$G=\bigcup G'_\lambda(d\varepsilon_\sigma(g))$，则$G'_\lambda$即为对于$g$的极大反链。同样可以证明下面的重要定理。

定理18. 若$g\in P(G^2)$，$\theta=f_\delta^{-1}\circ g\circ f_\delta$。设$\delta=\delta_1(g)$，则$\theta\leqslant I(G/\delta)$或$\theta\in S_a[G/\delta)$。若$\delta=\delta_3(g)$，则$\theta\in U[G/\delta)$。若$g\in L_s[G)$，$\delta=\varepsilon_2(g)$，则$\theta\in L[G/\delta)$。□

定理19. 若$g\in P(G^2)$, $G=\bigcup G_\sigma(d\delta)$，设$\delta=\delta_1(g)$，则$G_\sigma$之间没有$g$通道相连；因而$G$能分解为相对于$g$的绝缘子系统的充要条件是$\delta_1(g)\neq G^2$。设$\delta=\delta_3(g)$，则$G_\sigma$之间或者对$g$为不相连，或者只有单向串联通道；因而大系统$G$能解耦分解为相对于$g$绝缘或单向串联的子系统的充要条件为$\delta_3(g)\neq G^2$。□

定理19充分显示了一类大系统泛系逼近的特点。而商系统$G/\delta_1(g)$正是对关系g的一种“黑箱化”屏蔽。同样，$G/\delta_3(g)$是对g中非单向性成分的“黑箱化”屏蔽。这类泛系逼近原理对简化处理或模拟复杂的系统有方法论的意义。

对子集与商集的势可用泛系理论导出许多关系，它们提供了有关势的广义逼近估计，下列结果的证明留给读者自证。

定理20. 若$\delta\in E_s[G)$，$G_i\subset G(d\delta)$，$G'_j\subset G(d\varepsilon_6(\delta))$，则$\exists i(x,y\in G_i,\ x\neq y)$等价于$\neg\exists j(x,y\in G'_j)$，并且$\exists j(x,y\in G'_j,\ x\neq y)$等价于$\neg\exists i(x,y\in G_i)$。因此，我们有估计$|G_i|\leqslant\|\varepsilon_6(\delta)\|$，$|G'_j|\leqslant\|\delta\|$。□

定理21. 若$g\subset G^2$，$\delta,\theta\in E_s[G)$，$G=\bigcup G_i(d\delta)=\bigcup G'_j(d\theta)$，则对$(\delta,\theta)=(\varepsilon_1(g),\varepsilon_7(g))$有估计$|G_i|\leqslant\|\varepsilon_7(g)\|$，$|G'_j|\leqslant\|\varepsilon_1(g)\|$；对$(\delta,\theta)=(\varepsilon_2(g),\varepsilon_8(g))$有估计$|G_i|\leqslant\|\varepsilon_8(g)\|$，$|G'_j|\leqslant\|\varepsilon_2(g)\|$；对$(\delta,\theta)=(\varepsilon_3(g),\varepsilon_6(g'))$有估计$|G_i|\leqslant\|\varepsilon_6(g')\|$，$|G'_j|\leqslant\|\varepsilon_3(g)\|$。□

定义．$\delta\in E_s^*[G]$指$\delta\in E_s[G]$，并且对$G=\bigcup G_i(d\delta)$有$\forall i G_i\cap(\bigcup G_k(k\neq i))\neq G_i$。□

定理22．设$\delta\in E_s^*[G]$，$G=\bigcup G_i(d\delta)=\bigcup G_j'(d\varepsilon_6(\delta))$，则可选$x_i\in G_i$使得$x_i\bar{\in}G_k(k\neq i)$，并且$\{x_i\}^2\leqslant\varepsilon_6(\delta)$。同时有$\max|G_j'|=\|\delta\|$。□

下面八个定理都是定理22的自然推论。

定理23．若$g\subset G^2$，$\varepsilon_1(g)\in E_s^*[G]$，$G_j'\subset G(d\varepsilon_7(g))$，则$\max|G'|=\varepsilon_1(g)$。□

定理 24．若$g\subset G^2$，$\varepsilon_7(g)\in E_s^*[G]$，$G_i\subset G(d\varepsilon_1(g))$，则$\max|G_i|=\|\varepsilon_7(g)\|\leqslant\min\|\delta_{12}(g)\|$。这里$\delta_{12}(g)=\lambda_2(\bar{g})$，一般有$\delta_{12}(g)\leqslant\varepsilon_7(g)$。□

定理 25．若$g\subset G^2$，$\varepsilon_2(g)\in E_s^*[G]$，$G_j'\subset G(d\varepsilon_6(g))$，则$\max|G_j'|=\|\varepsilon_2(g)\|$。□

定理26．若$g\in P(G^2)$，$\varepsilon_6(g)\in E_s^*[G]$，$G_i\subset G(d\varepsilon_2(g))$，则$\max|G_i|=\|\varepsilon_6(g)\|$。□

定理27．若$g\in P(G^2)$，$G_j'\subset G(d\varepsilon_6(\delta(g)))$，则$\max|G_j'|=\|\delta(g)\|$。这里$\delta\in\{\delta_k\}\cup\{\lambda_k\}$。□

定理 28．若$g\subset G^2$，$G_i\subset G(d\delta(g))$，$\varepsilon_6(\delta(g))\in E_s^*[G]$，$\delta\in\{\delta_k\}\cup\{\lambda_k\}$，则$\max|G_i|=\|\varepsilon_6(\delta(g))\|$。□

定理 29．若$g\subset G^2$，$G_j'\subset G(d\varepsilon_6(g^t))$，则$\max|G_j'|=\|\varepsilon_3(g)\|$。□

定理 30．若$g\subset G^2$，$\varepsilon_6(g^t)\in E_s^*[G]$，$G_i\subset G(d\varepsilon_3(g))$，则$\max|G_i|=\|\varepsilon_6(g^t)\|$。□

对于一般非$E_s^*[G]$类我们可得到一些较弱的结果如下。

定理31．若$\delta\in E_s[G]$，$G_i\subset G(d\delta)$，$G_j'\subset G(d\varepsilon_6(\delta))$，$\delta'$，$\delta''\in E[G]$，$\delta'\leqslant\delta$，$\delta''\leqslant\varepsilon_6(\delta)$，则$|G_i|\leqslant\|\delta''\|$，$|G_j'|\leqslant\|\delta'\|$。□

特别当$\delta=\varepsilon_1(g)$时，相应条件变成$\delta'\leqslant\varepsilon_1(g)$，$\delta''\leqslant\varepsilon_7(g)$，并可导致估计$|G_i|\leqslant\|\lambda_2(\bar{g})\|$，$|G_j'|\leqslant\|\lambda_1(g)\|$。当$\delta=\varepsilon_2(g)$时，条件变成$\delta\leqslant\varepsilon_2(g)$，$\delta''\leqslant\varepsilon_6(g)$，结论为$|G_i|\leqslant\lambda_6(g)\|$，$|G_j'|\leqslant\|\lambda_2(g)\|$。当$\delta=\varepsilon_3(g)$时，$\delta''\leqslant\varepsilon_6(g^t)$，有$|G_i|\leqslant\|\delta''\|$，$|G_j'|\leqslant$

$\|\varepsilon_3(g)\|$.

定理32. 若$G_i \subset G(d\varepsilon_6(\delta))$，则$\max|G_i| = \|\delta\|$对$\delta = \delta_k(g)$，$\lambda_k(g)$，$\delta_k(\varepsilon_j(g))$，$\lambda_k(\varepsilon_j(\varepsilon_l(g)))$等成立，只要$\delta \in E[G]$或$E_1^*[G]$。□

定理33. 若$\delta \in E[G]$，$G_i \subset G(d\varepsilon_8(\delta))$，则$G$可分为$\max|G_i|$个互斥子类，$G = \cup D_t(d\delta)$，$|\{t\}| = \max|G_i|$，并且$D_t^2 \leqslant \delta$。特别若$\delta = \varepsilon_1(g)$，$\varepsilon_7(g)$，$\varepsilon_2(g)$，$\varepsilon_6(g)$，$\varepsilon_3(g)$，$\varepsilon_6(g^t) \in E[G]$，则$G$相应可分为$\max|G_i|$个互斥子类，$G = \cup D_t$，$D_t^2$分别对应$\leqslant \varepsilon_1(g)$，等等。□

由$L[G]$的Dilworth定理及其对偶定理，我们有

定理34. 若$g \in L[G]$，$G_i \subset G(d\varepsilon_1(g))$，$G_j' \subset G(d\varepsilon_7(g))$，则$\exists \delta, \delta' \in E[G]$，$\delta \leqslant \varepsilon_1(g)$，$\delta' \leqslant \varepsilon_7(g)$，并且$\max|G_i| = \|\delta'\| = \min\|\lambda_2(\bar{g})\|$，$\max|G_j'| = \|\delta\| = \min\|\lambda_1(g)\|$。□

定义. 设$g \in P(G^2)$，$G_i \subset G(d\varepsilon_1(g))$。若存在$\delta \in E[G]$，$\delta \leqslant \varepsilon_7(g)$，$\|\delta\| \leqslant \max|G_i|$，则记$g \in FC$。□

定理35. 若$g \in FC$，$G_i \subset G(d\varepsilon_1(g))$，则$\min\|\lambda_2(\bar{g})\| = \max|G_i|$。也即$(G, g)$的着色数是其极大完全子图的极大势。因此，对于$g \in FC$，著名的四色猜测是可证的。□

2.3. 隐泛系定理

隐函数定理是分析数学的传统三大基础定理之一，本质上是显函数、形影关系、硬模拟对隐函数或隐模拟的广义逼近问题，是一种特化的重要的泛对称。在泛系理论框架下可以求得非常一般的结果，它们在科学技术中有多种用途。

定理36. 若$g \in R[G]$，则对任何非负整数k, m, n，我们有$g^{(n)} \leqslant g^{(n+m)}$，$g^t = \vee g^{(i+k)}$ $(i = 1, 2, \cdots)$。□

定理37. 若$g \subset F \times G$为隐模拟，则$\varphi = (g \circ g^{-1})^{(n)} \circ g \subset F \times G$也为隐模拟，并且$\varphi \circ \varphi^{-1} = (g \circ g^{-1})^{(2n+1)}$。当$n \to \infty$时，$\varphi$趋于$\varphi_* = (g \circ g^{-1})^t \circ g \subset F \times G$，它是硬模拟，它诱导到投影$\psi: F \to \psi(F) = G/(g \circ g^{-1})^t$，并且$\varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = (g \circ g^{-1})^t \in E[F]$。□

定理38. 若$\varepsilon\leqslant\delta$，$\varepsilon,\delta\in E_s[G)$，则$f_{\delta/\varepsilon}\subset(G/\varepsilon)\times(G/\delta)$是隐模拟，$\delta/\varepsilon\in E_s[G/\varepsilon)$，$G/\varepsilon=\bigcup Q_j(d(\delta/\varepsilon))$,$Q_j=\{G_i\}(G_i\subset G_j')$，$\delta/\varepsilon=\bigvee Q_j^2$．这里$G=\bigcup G_i(d\varepsilon)=\bigcup G_j'(d\delta)$．若$\varepsilon$，$\delta\in E[G)$，则$f_{\delta/\varepsilon}$退化为映射$G/\varepsilon\rightarrow G/\delta$．□

定理39. 设$\delta_\sigma\in E_s[G)$，$\delta=\bigvee\delta_\sigma$，$\varepsilon=\bigwedge\delta_\sigma$，则存在下列隐模拟：$f_{\delta_\sigma}\subset G\times(G/\delta_\sigma)$，$f_\delta\subset G\times(G/\delta)$，$f_\varepsilon\subset G\times(G/\varepsilon)$，$f_a\subset(G/\delta_\sigma)\times(G/\delta)$，$f_b\subset(G/\varepsilon)\times(G/\delta_\sigma)$．这里$a=\delta/\delta_\sigma,b=\delta_\sigma/\varepsilon$．因而由定理37可诱导出相应的显化结果．此外，若$\delta_\sigma\in E[G)$，$\delta=(\bigvee\delta_\sigma)^t$，则上述隐模拟即为满映射．□

定理40. 设$f\subset F\times G$，$g\subset F\times G'$为二给定的隐模拟，则$\varphi=f^{-1}\circ g\subset G\times G'$也为隐模拟，$(\varphi\circ\varphi^{-1})^t\circ\varphi\subset G\times G'$为硬模拟，由它诱导得映射$\varphi^*$：$G\rightarrow G'/\theta$，$\theta=(\varphi\circ\varphi^{-1})^t$．因此，当$\theta=(G')^2$，$I(G')$时，分别表示$\varphi$或$\varphi^*$提供为黑箱与白箱式的可观测性，后者也即$\varphi^*$为满映射$G\rightarrow G'$．□

定理41. 设ε，$\delta\in E_s[G)$，则$\varphi=f_\delta^{-1}\circ f_\varepsilon\subset(G/\delta)\times(G/\varepsilon)$为隐模拟，$\theta\circ\varphi$为硬模拟，$\theta=(f_\delta^{-1}\circ\varepsilon\circ f_\delta)^t$，它们诱导生成映射$\varphi^*$：$G/\delta\rightarrow\varphi^*(G/\delta)=(G/\varepsilon)/\theta$．因而当$\theta=(G/\varepsilon)^2$与$I(G/\varepsilon)$时，$\varphi^*$分别退化为黑箱与白箱观测．□

定理42. 若$\delta\in E_s[G)$，$\delta'=\varepsilon_6(\delta)$，则$\theta=f_\delta^{-1}\circ\delta'\circ f_\delta=\theta^t=(G/\delta)^2$，因而$G/\delta$与$G/\delta'$之间为黑箱观测，反之亦然．□

定理43. 若$g\subset F\times G$为隐模拟，$\theta\in S[F)$，$\delta\in E_s[G)$，$\delta\leqslant\varepsilon_7(g^{-1}\circ\theta\circ g)$，$G=\bigcup G_i(d\delta)$，则$g$在$(g\circ G_i)\times G_i$上的限定为投影，$g$：$g\circ G_i\rightarrow G_i$．□

定理44(通信组合晰化定理). 设K为一参数族，对每一$k\in K$，$F(k)$与$G(k)$为二给定集合，$g_k\subset F(k)\times G(k)$为相应的隐模拟，$G=\Pi G(k)$，$F=\Pi F(k)$，$\varphi$为由坐标序变换产生的一一对应，$\varphi$：$\Pi(F(k)\times G(k))\rightarrow F\times G$，$g=\varphi(\Pi g_k)$，$h(k)\in S[G(k))$，$D(k)^2\leqslant\varepsilon_1(g_k\circ h(k)\circ g_k^{-1})$，则$(\Pi D(k))^2\leqslant\varepsilon_7(g\circ h\circ g^{-1})$，这里$h=\Pi h(k)$，而且$\max|F_i|\geqslant\Pi(\max|F_i(k)|)(k\in K)$，这里$F_i(k)\subset F(k)(dg_k\circ h(k)\circ g_k^{-1})$，$F_i\subset F(dg\circ h\circ g^{-1})$．□

由这一隐泛系定理可知，在k号广义因子通道上局部能传$|F_i(k)|$种晰化信息，总体能传$\max|F_i(k)|$种晰化信息，则组合赋形通道上局部与总体分别能传$\Pi|F_i(k)|(k\in K)$种和$\Pi(\max|F_i(k)|)(k\in K)$种晰化信息。

2.4. 不动泛系定理与渐变和突变的泛系分析

不动点定理是数学内跨专题的基础定理，利用泛系理论，可以解消著名的Brouwer定理、Schauder定理、Banach定理、Tychonoff定理与Kakutani定理中清如拓扑、线性、连续性、凸性、紧致性、闭性等等的限制，转化也可发展为一般的二元关系。

定理45. 设$g\subset G^2$，$G=\bigcup G_i(d\delta_1(g))$，则$G_i\circ g$，$g\circ G_i\subset G_i$ 若$g\circ g^{-1}\in R[G)$，则$G_i\subset g\circ G_i$。若$g^{-1}\circ g\in R[G)$，则$G_i\subset G_i\circ g$。□

这一定理描述了各种稳定性、渐变性与泛对称性非常典型的一种情况。另外，关于渐变、突变的规律表现为下列定理。

定理46. 设$\delta\in E_i[G)$，$G=\bigcup G_i(d\delta)$，G_i不退化为点。设$G\subset G^2$，$\varepsilon_1(\varphi)\leqslant\delta$，则$G_i\cap(G_i\circ\varphi\cup\varphi\circ G_i)\neq\phi$。若$\varepsilon_2(\varphi)\leqslant\delta$，则$\varphi_i\cap G_i\circ\varphi\cap\varphi\circ G_i\neq\phi$。若$\varepsilon_3(\varphi)\leqslant\delta$，则存在正整数$m$，$n$使得$G_i\cap G_i\circ\varphi^{(m)}\cap\varphi^{(n)}\circ G_i\neq\phi$。若$\varepsilon_6(\varphi)\geqslant\delta$，$\varphi\cap I=\phi$，则$G_i\cap G_i\circ\varphi\cap\varphi\circ G_i=\phi$。若$\varepsilon_7(\varphi)\geqslant\delta$，$\varphi\cap I=\phi$，则$G_i\cap(G_i\circ\varphi\cup\varphi\circ G_i)=\phi$。若$\delta_1(\varphi)\leqslant\delta$，则$G_i\circ\varphi$，$\varphi\circ G_i\subset G_i$。若$\delta_1(\varphi)\leqslant\delta$，$\varphi\circ\varphi^{-1}\in R[G)$，则$G_i\subset\varphi\circ G_i$。若$\delta_1(\varphi)\leqslant\delta$，$\varphi^{-1}\circ\varphi\in R[G)$，则$G_i\subset G_i\circ\varphi$。□

定理47. 设$D\subset G$，$g\subset G^2$，则由$D\circ g\subset D$，$D\circ g\cap D=\phi$分别描述的渐变性与突变性，对限定、赋形与显微是守恒的。□

定理48. 设$g\subset F\times G$为隐模拟，$F=\bigcup F_i(d\lambda_1(g\circ g^{-1}))$，则对$i\neq j$有$F_i\circ g\cap F_j\circ g=\phi$。□

$D\circ g\subset D$形式的泛对称也可看成是黑洞概念的泛系模型。前面的结果都是宏观型单层次的动静关系，类似地可推广为T元泛系的渐变突变定理.类集性泛系中介绍的各种诱导以及定理6—8。则描述了具有微结构的不动泛系定理，下面列述一些结果，它们

刻划了串并关系、异同关系、集散关系等泛系关系的相对守恒性．我们引用记号$\overline{A}[G]=\{\bar{\delta}|\delta\in A[G]\}$，$g^{-1}\circ A[F]\circ g=\{g^{-1}\circ\theta\circ g|\theta\in A[F]\}$。

定理49． 若$g\subset F\times G$为隐模拟，则$g^{-1}\circ A[F]\circ g\subset A[G]$，$A\in\{R,S,E_s\}$；$g^{-1}\circ\theta^a\circ g\leqslant(g^{-1}\circ\theta\circ g)^a$，$\theta\in P(C)$，$a\in\{-1,(n),t\}$；$g^{-1}\circ(B\theta_i)\circ g\leqslant B(g^{-1}\circ\theta_i\circ g)$，$\theta_i\in P(F^2)$，$B\in\{(0)-\Pi,\vee,\wedge\}$；$g^{-1}\circ\delta(\theta)\circ g\leqslant\delta'(g^{-1}\circ\theta\circ g)$，$\theta\in R[F]$，$\delta$，$\delta'$分别是$F$与$G$上的$\varepsilon_i$算子或$\delta$算子，$i=1,2,\cdots5$,．□

定理50． 隐模拟$g\subset F\times G$为赋形的充分必要条件是$g^{-1}\circ\overline{A}[F]\circ g\subset\overline{A}[G]$（$A=E_s$或$R$），或者$g^{-1}\circ\overline{I(F)}\circ g\leqslant\overline{I(G)}$，或者$g\circ g^{-1}=I(F)$，或者$(x\circ g)\cap(y\circ g)=\phi(\forall x\neq y)$．□

定理51． 若$g\subset F\times G$为赋形，则$g^{-1}\circ A[F]\circ g\subset A[G]$，$A\in\{R,S,T,S_0,E_s,E,E_i^*,L_s,L\}$。；$g^{-1}\bar{\theta}\circ g\leqslant\overline{(g^{-1}\circ\theta\circ g)}$，$\theta\in P(F^2)$．另外的守恒性与隐模拟中的同（赋形是特殊的隐模拟）．□

定理52． 若$g\subset F\times G$为隐模拟，则$g^{-1}\circ(E[F]\vee g\circ g^{-1})^t\circ g\subset E[G]$．若$g$为硬模拟，$\varepsilon\in E[F]$与$g\circ g^{-1}$可比较，则$g^{-1}\circ\delta\circ g\in E[G]$．□

这定理的详细讨论参见文献[21]．把这些定理与隐泛系定理结合就可得到许多关于有微结构层次的不动泛系定理．下一小节的泛系网络分析还将涉及渐变、突变的泛系研究．

2.5． 泛系网络分析

用泛系方法论的观点与方法去研究广义的网络叫泛系网络分析．用泛系关系的转化与广义逼近去研究图论，研究串并关系、集散关系、生克自动机网络（见[1，7]）及泛权网络就成为泛系网络分析的主要内容．这里介绍处理泛权网络$g\subset G^2\times W$（或g：$G^2\to W$）的一些泛系理论原理，它们能提供几百个具体的泛系理论的定理来研究在应用中非常多能的泛权网络．

设$D\subset W$，则$g\circ D\subset G^2$即表示泛权属于D的那一部分子网络．

泛系集散原理． 设$\delta\in E_s[G]$，$G=\cup G_i(d\delta)$，则对于$x,y\in G_i$存

在着下列对应于$g_* = g \circ D$的集散关系或连通解耦关系：

(1) $\delta = \varepsilon_1(g_*^t)$：连通；

(2) $\delta = \varepsilon_3(g_*)$：强连通；

(3) $\delta = \varepsilon_1(g_*^{(n)})$：$n$步连通；

(4) $\delta = \varepsilon_2(g_*^{(n)})$：$n$步强连通；

(5) $\delta = \delta_1(g_*)$：E型弱连通；

(6) $\delta = \lambda_1(g_*)$：E型直接连通；

(7) $\delta = \varepsilon_1((I \vee g_*)^{(n)})$：部分$n$步弱连通；

(8) $\delta = \varepsilon_2((I \vee g_*)^{(n)})$：部分$n$步强连通；

(9) $\delta = \varepsilon_6(g_*^t)$：弱解耦；

(10) $\delta = \varepsilon_7(g_*^{(n)})$：$n$步解耦；

(11) $\delta = \varepsilon_7(g_*^t)$：强解耦；

(12) $\delta = \varepsilon_6(g_*^{(n)})$：$n$步弱解耦；

(13) $\delta = \varepsilon_7((I \vee g_*)^{(n)})$：$n$步强解耦；

(14) $\delta = \lambda_2(\bar{g}_*)$：$E$型直接解耦；

(15) $\delta = \delta_6(g_*)$：E型弱解耦；

(16) $\delta = \delta_7(g_*)$：E型强解耦。□

这里的各种连通与解耦也可看成是一些定义，可看成是集散关系的一些典型表现，类似还可列出多种。在不同类型的集散关系中我们有下列原理。

泛系集散转化原理。设$\theta = \varepsilon_6(\delta)$，则$\delta = \varepsilon_6(\theta)$，并且对$\delta = \varepsilon_1(g_*)$，$\varepsilon_2(g_*)$，$\varepsilon_3(g_*)$，我们相应有$\theta = \varepsilon_7(g_*)$，$\varepsilon_6(g_*)$，$\varepsilon_6(g_*^t)$。此外，算子$\varepsilon_6$恰恰使得连通性与解耦性相互转化，并且$f_\delta^{-1} \circ \theta \circ f_\delta = (f_\delta^{-1} \circ \theta \circ f_\delta)^t = (G/\delta)^2$。$G/\delta$与$G/\theta$互为黑箱化观测。□

由泛系集散原理可得到大系统分解原理与控制论解耦原理的发展形式。

大系统集散原理。在泛系集散原理的解释中，大系统G(或$g \subset G^2 \times W$)对$g_* = g \circ D$具有不可分的δ集散性的充要条件是$\delta = G^2$，因而它能分解成δ集散性子系统，且子系统之间不全具有这种集散性的充要条件是$\delta \neq G^2$。□

泛系集散原理的另外一种简化形式是

泛系约化原理. 对泛权网络$g\subset G^2\times W$，则$G=\bigcup G_i(d\delta(f))$就导致各种各样的泛系集散分析，这里$\delta$为诸如$\varepsilon_j$，$\delta_j$，$\lambda_j$之类的泛系算子，$f$为形如 $(IVg_*)^a$，或 $(g_*)^b$的G中二元关系，a，$b\in\{(n);\ t|n=0,\ 1,\cdots\}$。不同的$\delta$与$f$的组合有上百种结果，它们分别描述泛权值取于$D$中之网络子系统的各种泛系关系的分析，因而泛系理论一下提供了上百个定理来处理泛权网络。这种处理方案叫泛系约化原理。□

利用泛系约化原理我们还可在宏观上研究大系统G的隐模型$G/\delta(f)$中的关系，也可以使某个特定的子系统$F\subset G$黑箱化或某一些子系统黑箱化，相当于引入不同于g或f的泛系关系来与g_*进行联合的泛系分析，而且这种引入是相当自由的，可根据需要选用。

泛系赋形守恒原理. W与$g\in W\uparrow G^2$或$g\subset G^2\times W$的关系是一种由影赋形的关系。泛系理论已发现权系统W如下的一些结构可以自然地转化到形系统$W\uparrow(G\uparrow M)$上去：拓扑性、结合性、分配性、半序性、格性、线性、凸性、半群、群、环、半环、Boole代数、软代数、可交换性等。□

下面我们进一步研究一种广义的θ复合，并指出只要它在影系统中相应的原始运算$(\theta_1,\ \theta_2)$满足结合律与分配律，这种复合的结合律在形系统上成立。

定义. 设θ_1：$P(W)\to W$，θ_2：$W^2\to W$，由它们自然地诱导$\bar{\theta}_1$：$P(W\uparrow G^2)\to W\uparrow G^2$，$\bar{\theta}_2$：$(W\uparrow G^2)^2\to W\uparrow G^2$。□

往往θ_1可由可交换的θ_3：$(W\uparrow G^2)^2\to W\uparrow G^2$生成。

定义. θ复合$\theta=(\theta_1,\ \theta_2)$：$(W\uparrow G^2)^2\to W\uparrow G^2$具体规定是$(g_1\theta g_2)(x,\ y)=\theta_1\{g_1(x,\ t)\theta_2 g_2(t,y)\,|\,t\in G\}$。当$\theta$满足结合律时，$(\theta)-\Pi g_\sigma$表$g_1\theta g_2\theta\cdots$。□

定理53(θ结合律赋形守恒原理). 若θ_1，θ_2满足结合律和分配律，则θ也满足结合律. 即若 $(w_1\theta_2 w_2)\theta_2 w_3=w_1\theta_2(w_2\theta_2 w_3)$，$\theta_1\{\theta_1\{w_{\lambda\sigma}|\lambda\in\Lambda\}|\sigma\in\Sigma\}=\theta_1\{\theta_1\ \{w_{\lambda\sigma}|\sigma\in\Sigma\}|\ \lambda\in\Lambda\}$，$(w\theta_2)\theta_1$

$\{w_\sigma\}=\theta_1\{w\theta_2 w_\sigma\}$，$(\theta_1\{w_\sigma\})\theta_2 w=\theta_1\{w_\sigma\theta_2 w\}$，则有$(g_1\theta g_2)\theta g_3=g_1\theta(g_2\theta g_3)$。□

泛系赋形守恒原理概括并发展了传统网络分析、动态规划、Fuzzy图论与Fuzzy复合等许多原理、定理与算法，包括Bellman原理、秦裕瑗嘉量原理及许多优化路的算法。

突变U判别法．广义的支点问题可转化为泛权网络模型$g\subset G^2\times W$．对$F\subset G$有$Fog\subset G\times W$．当$r\in S[W)$时，设$G=UG_i(d\delta)$，$\delta\leqslant\varepsilon_7(F\circ g\circ r\circ(F\circ g)^{-1})$，则$F\circ g$在$G_i\times(G_i\circ F\circ g)$上的限定即为赋形，记其限定为$g_i$，则有$g_i$：$G_i\circ F\circ g\to G_i$．设$E_j\subset G\times W$为某些给定的集合，称为广义解曲线．这时$U=\{(i,j)|E_j\cap g_i\neq\phi\}$基本上描述了$Fog$在广义曲线$E_j$有一意解的关系．□

与泛系网络分析有关的是利用定理46来模拟量变质变规律．令定理46中的φ为g_*，即可得到泛权网络的渐变、突变的结果．特别设D'，$D''\subset W$，当$\lambda\in D'$时，$\delta_1(g\circ D')\leqslant\delta$，则有类似不动点的渐变行为：$G_i\circ(g\circ\lambda)\subset G_i$，而一旦$\lambda\in D''$，$\varepsilon_1(g\circ D'')\geqslant\delta$，$g\circ D''\cap I=\phi$，则转入一种突变性：$G_i\cap(G_i\circ(g\circ\lambda)\cup(g\circ\lambda)\circ G_i)=\phi$。

关于泛系理论的背景、内容与意义可以进一步参看附录。

参 考 文 献

〔1〕Wu Xuemou, *Pansystems Methodology: Concepts, Theorems and Applications(I)-(VI)*, Science Exploration, 1,2,4(1982); 1,4 (1983); 1(1984).

〔2〕Wu Xuemou, *Pansystems Analysis and Fuzzy Sets*, Busefal, 10(1982).

〔3〕Wu Xuemou, *Pansystems Methodology: A Transfield Investigation of Generalized System-Transformation*. Symmetry, in M.M.Gupta and E. Sanchez(eds.), Fuzzy Information and Decision Processes, North-Holland Publishing Co., 1982.

〔4〕Wu Xuemou, *Some Concepts of Pansystems Medicine*, IFAC

Symposium on Fuzzy Information,Knowledge Representation and Decision Analysis,Pergamon Press,1983.

〔5〕Wu Xuemou, *Investigation and Applications of pansystems Recognition Theory and Pansystems-Operations Research of Large Scale Systems*(I),Applied Mathematics and Mechanics 1 (1984).

〔6〕Wu Xuemou, *Pansystems Metatheory and Its Applications to Cybernetics*,Physics and Materials Science (I),J.of Wuhan I. of Building Materials(English Edition),1(1983).

〔7〕吴学谋，生态学、医学与诊断学的泛系元理论 (I)-(III),大自然探索，2，3 (1983);1 (1984).

〔8〕吴学谋，乏晰性、可靠性与泛系分析 (V)，模糊数学，1(1981).

〔9〕吴学谋，泛系理论、系统方法与 Fuzzy 集论：三种相对独立的不同研究，潜科学，4(1983).

〔10〕吴学谋，泛系分析与科学方法论，哲学研究，4，5(1981).

〔11〕吴学谋，一种跨学科的新研究——泛系方法论，百科知识，10 (1983).

〔12〕吴学谋，泛系方法论与广义的生物控制论，人工智能学报，4(1982).

〔13〕覃国光，泛系逻辑微积(I)-(III)，科学探索学报，3，4(1982),1 (1983).

〔14〕郭爱克，泛系全息重演律，科学探索学报，4(1982).

〔15〕兰溅，泛系模拟与科学方法论，科学探索学报，3(1982).

〔16〕伍雪侠，从相图分割原理、键参数函数法到拟摩擦裂隙强度模型，按泛系观点的一些讨论，科学探索学报，2(1982).

〔17〕吴守治、陈北方，泛系方法论在经济学中的应用(III) (IV)，科学探索学报，2(1984)，大自然探索，1(1984).

〔18〕刘国汉、朱遂才，泛系算子方程的解，科学探索学报，4(1983).

〔19〕朱遂才，吴陈，关于泛系串并分析与聚类分析的一些问题，科学探索学报，2(1984).

〔20〕王书基，高隆颖，泛系分类系统与 Kënig 系统，科学探索学报，2 (1984).

〔21〕朱绪鼎，等价关系的泛系模拟守恒性，科学探索学报，4(1982).

〔22〕李邦荣，两种关于对象排序算法的等效性，科学探索学报，1(1981).

〔23〕王敏，泛系模拟与泛系方程的一些研究，科学探索学报，4(1983)。
〔24〕李贵华，无序积的泛系分析及其对遗传学的应用，科学探索学报，4(1983)。
〔25〕王平明，生物全息重演律：泛系方法论对生物时空结构泛对称的一种分析，科学探索学报，4(1981)。
〔26〕张明义，泛系分析的数学基础与泛系语义分析（II），科学探索学报，1(1984)。
〔27〕沈祖梁，联想的一些简化泛系模型与计算机，科学探索学报，1(1982)。
〔28〕雪皑，视觉泛系分析与乏晰性的一些问题，华中工学院学报(乏晰数学专辑)，2(1980)。

附 录

泛系方法论：它的背景、内容与意义

§1．引言·什么是泛系方法论

泛系方法论(Pansystems Methodology) 也叫泛系理论或泛系分析，它是事物机理中广义的系统、转化与对称的一种跨学科研究与应用，具有对许多元学科、横断学科与交叉学科从新的角度再次交缘和再次横断的性质．它的一些工作体现了方法论数学化的探索，也体现了数理科学、系统科学、社会科学与思维科学的某些横断性的结合．泛系方法论侧重探讨事物机理中的广义对称或泛对称，侧重探讨结构、谓词、命题与广义信息的某些相对守恒性与封闭性，特别是从数学角度研究了与泛对称相联系的许多基本关系如：宏微、动静、局整（局部与整体）、形影、因果、观控（观测与控制）、生克、泛序（包括优劣、主次）、串并、模拟、集散、异同等等．而这种关于泛系关系及有关转化的研究揭示了事物机理中与方法论中的一些基本矛盾的精确的数学形式，使得许多结果具有认识论的意义，同时又具有具体的理论工具的性质．

泛系方法论是我国在本世纪七十年代中期才提创的一种新研究．现在已经得到了许多专业性的发展，初步形成了诸如泛系识

别理论、泛系网络分析、泛系逻辑以及控制论、生态学、医学与诊断学的泛系元理论等具体的研究方向；独具一格地形成了一整套概念与分析模式；得到了几百个新的数学命题或定理；并且对诸如人工智能、模式识别、模拟理论、计算机科学、通信原理、大系统、突变论、动态规划、动态对策、理论生物学、中医原理、力学、逼近转化论、数理逻辑、泛代数、拓扑学、超复变函数、离散数学和组合数学、聚类分析、模糊数学、经济学、地理学、科学方法论、科学学与文艺理论等几十个传统专业分枝中的一些问题开展了研究，得到了新的具体的结果。

泛系方法论提供了一种新的横断观。下面我们将会看到，从历史源流，从概念横贯的特点以及具体的内容与形式，泛系方法论与传统的数学方法和系统方法都有所不同，更有别于国际上流行的普通系统理论与模糊数学的研究。

§2. 历史背景·中国古代哲理

在数学内部，泛系方法论的一些原理、概念与构思来源于逼近转化论向一般事物机理分析与方法论的转化、推广与发展。逼近转化论是我国在五十年代开拓的数学内部跨专题的一种研究，侧重从逼近的转化来探讨数学中的一些广义系统、转化与对称。除开相对独立地开拓一些新的专题研究外，逼近转化论对Walsh，MергеляH，Wiener，Banach，Lax等几十位数学家的一些有定评的工作有所推广、补充或发展，得到几百个新的结果。这些工作同时也为泛系方法论的创业者提供了数学修养方面的准备。

但是，泛系方法论研究的开展主要是受十九世纪中期以来科学发展的整体化趋势的影响。学科的急剧分化、相互浸透与协同发展的新形势以及交叉学科、横断学科与综合性技术等跨学科研究的涌现，要求从多种不同角度对不同领域的科学知识进行具体的辩证综合，发掘不同分枝之间更多的横向联系。知识的系统化、元科学化与方法论的数学化成了新的需要，并且人类面临的许多

问题也有待人们去探讨关于复杂的大系统与高级的辩证过程新型的原理或分析模式。在科学技术发展整体化趋势的影响下，重新概括当代科学的一些成就并承受中国古代哲理与方法论的启示，人们发现广义的系统、转化、对称等概念以及有关的泛系关系的数学转化正好提供一种新的具体联系多种学科的大横断面或大网络。关于这种泛系横断观的多能性与普适性我们可以追溯到中国古代的《易经》《墨经》《内经》与古兵法中某些积极的潜科学的原理与分析模式。

例如，《易经》用抽象的阴阳组合来描叙和分析万事万物，讲的正是两种广义系统的模拟，它也可看成当代二进制、布尔代数人工语言的一种初级形式。在事物机理的分析中，《易经》强调了交感变化，认为万事万物都在变，但变中又有相对的不变，有变化的阶段性与相对稳定性，有阴阳周而复始的循环。除开应该屏弃一些形而上学与唯心的解释外，这里所涉及的万事万物，交感变化，相对的阶段性，不变性与稳定性（包括阴阳与循环）、正分别引伸到广义的系统、广义的转化与广义的对称（泛对称）的概念。

后期墨家的著述大都属于认识论、逻辑与科学的范围。他们在解释人类认识时，所说的“辩”，“焉（乃）摹略万物之然”，“知，接也”，指认识是对客观事物的模拟与反映。要有所知，就要与事物有所“接”，这里使我们看到观与控的联系以及它们与模拟的关系，且主体与客体的关系与《易经》的观物取象的观念又有某种抽象的共性。《墨经》在研究时间、空间与运动时指出“久，弥异时也。”“宇．弥异所也。”“宇或（域）徙，说在长宇久。”“长宇徙而有（又）处，宇宇南北（当为宇南宇北），在旦有（又）在莫；宇徙久．”这里对时间与空间的定义是通过异同关系与局整关系来描述的，而后又自然地与动静关系联系起来。另外，《墨经》总结并发展了中国古代的逻辑思想，把“明同异”作为思想上理论上的生克“辩”的作用和目的之一，并且强调因果关系的作用（“以说出故”），在推论中必须依据所谓“类”（同类的事物或

概念).《墨经》认为名（即概念）是模拟实的，并把名分成达、类、私三种局整层次，而后又把因果概念按串并观控与局整关系分为大故与小故，在推理中强调了反复推论、观察、援彼例此以求同辨异．所有这一些都充满了朴素的泛系关系及有关转化的思想．

《孙子兵法》《孙膑兵法》与《三十六计》等古兵法已认识到战争与政治、经济及自然条件的关系，这属于生克对策与广义的局整和形影关系的转化．另外，兵法强调了战争的胜败取决于客观条件及可观测性，“成功出于众者，先知也．先知者，……，必取于人，知敌之情者也．”“知己知彼，百战不殆．”这些论述阐明了生克对策与观控约束的一些联系．兵法除了研究战争中速决与持久、分散与集中等动静集散关系外，特别注意探讨“数”与“术”（或条件、规律与谋略）之间的转化．认识到条件的人为可变性以及在条件下谋略的可机动性，其中隐含了不同阶段、不同层次观控性的转化以及生克对策与广义的动静和集散关系的联系，这为泛系关系的数学转化研究提供了生动的素材．

我国的《黄帝内经》是周秦以来到西汉初年古代医学的总集．在方法论方面，与《易经》和古兵法有许多共通之处，特别是结合医学实践发展了阴阳五行学说和人与“大环境”相联系的广义生态观，具体地研究了观控、模拟与生克等关系的联系及其在医学中的应用，生化出来的表里分析、脏象理论、五行生克与辨证论治的模式潜在地含有普适的方法论意义，除开包括现代控制论中黑箱、灰箱与辨识等原理性概念的朴素形式外，还隐藏了泛系的系统观、转化观与对称观，包括许多泛系关系转化的具体例子，它们都有待在现代科学水平的基础上给予披露、阐述与提炼．

在中国传统的阴阳分析方法中，阴阳除了作为一种人工分析语言的字母表外，有时亦作为分类与形成抽象模型的手段，更重要的是用它来表征的往往就是泛系方法论所要概括的泛对称的原型素材，而阴阳的转化自然也就应发展为泛系方法论所强调的泛系关系的转化．

中国古代的哲理与方法论具有跨学科综合分析的特点，但也

良莠不齐，除了思辨性论理一般的缺点外，还包括了许多不科学的、神秘的、牵强的比附与臆测，许多泛系的概念还是偶然的，有时是倏忽即逝和尚未展开的，自然也未充分地科学显化，更谈不上数学化。取其精华，弃其糟粕，可以外化出多种胚芽，分蘖出多种现代科学的分枝或专题。但是结合当代科学技术的进展，自觉而系统地发展其中广义的系统观、转化观与对称观，使其中的泛系关系的转化规律从潜科学中显化出来，逐步数学化，使之达到当代科学的构造性论理思维的水平，这却是一个从未有过的工作。泛系方法论研究的开展，既是迎合科学发展整体化的需要，也是对中国的某些古代哲理与方法论的科学化和数学化的一种别具一格的探索。

西方科学侧重显微与限定的分析模式，而中国哲理则擅长关系的分析与关系转化的分析．泛系方法论的进一步研究希望把二者有机地结合起来。

§3．泛系概念的普适性

泛系方法论的一些原理性概念不只与中国古代哲理、方法论以及后来的逼近转化论有关，事实上它们几乎遍及当代一切科学分枝.侧重这些概念的普适性、大横断性或多能网络性去研究事物或科学知识的统一性与有关的数学形式，这使泛系方法论在广泛的研究中具有相对的限定性、具体性和确定性，因而使有关内容能从知识体系的一般分析研究中分化出来。

泛系方法论所讲的广义的系统是指某些事物集合与某些有关的泛结构集合的形式结合或统一体．这里泛结构是指能用数学形式描述的一般关系、关系的关系、动态关系、含参量的关系与结构等概念的概括与推广。广义的系统的概念概括了通常系统科学与数理科学中的系统、结构、形式与量等概念，可以用来描述一般的系统与事物，亦可用来刻划性质、条件与规律。变化、运动、发展、转化与过程往往可用动态的或参量的广义系统来表征，它

们本身又可类聚而成为广义的系统．泛系方法论所说的广义对称或泛对称是传统的对称性、不变性、守恒性、稳定性、周期性等概念的概括、推广与发展，是指广义系统转化中泛结构的相对守恒性与广义封闭性，是指变动与相对不变、自由与约束的联系与转化。因此，泛对称也可看成一种广义的动静关系．通常所说的规律性、各向同性、均匀性、极值性、相对性、动平衡、刚性、惯性、Nöether 型定理、协变性等物理科学中的概念都包含有变中有所不变、而不变中又有所变的泛对称．泛结构可看成事物集合的一种广义约束，是事物的组织化，因而广义系统的概念以及有关的系统科学和数学的基本概念本质上即包含有泛对称的因素．此外，在事物的辩证分析中，我们都知道，量变对于质变有时表现为一种相对静止．形式对于内容往往有一种相对稳定性．现实性或特殊性在一定情况下表现为可能性或一般性的一种进一步选定．"否定的否定"一方面表现为与"肯定"在内容方面有质的差别，另一方面在某些形式上又表现为与"肯定"有相似之处．这一些说明泛对称也是与辩证法有关的并且是在科学问题分析中具有方法论性的概念。

按广义的动静关系来描述的泛对称与其它泛系关系有许多深刻的联系．例如在一定的条件下，微观、整体、形系统、分散、差异、相克、控制等相应为多变，而宏观、局部、影系统、集中、类同、相生、观测等又相应为相对的少变．直观的模拟本来就指由原型到模型的转化中变中有所不变，所以模拟概念也是天然地与泛对称概念相联系的。有趣的是，反对称是与对称概念相对立的，但它可看成是广义空间简并后的不变性，因而属于一种特殊的泛对称。一般说，不可逆性与对称的破缺并不限定泛对称概念的普适性．同样地，一些较复杂的分析也可阐明因果关系、泛序关系或主次关系以及串并关系同泛对称的联系。由于泛系关系在一定条件下可以相互转化，所以泛系关系及有关的转化既涉及广义的系统概念，也涉及广义的转化与对称，有时也可看成是泛对称的一些不同的典型表现形式。

泛系关系转化的研究的重要性还在于它们与当代一些重要学科有深刻的联系。可以证明，局整关系与形影关系是一切数学关系的基础（模糊集论或模糊数学只不过是用形影关系来模拟模糊的局整关系）。当代控制论与元诊断学主要是研究某些因果关系、观控关系系(表里关系)与模拟关系，而系统论(或系统方法)与元生态学的原理性概念则是建立在动静、局整、生克、主次等关系之上的。突变论主要研究光滑性渐变与弧立性突变间的关系，研究这种关系中流形结构的稳定性。协同学与耗散结构理论主要研究远离平衡态的开放系统，在保证外流的条件下，探讨系统如何自组织成某些有序结构以及如何会具有有关的功能和行为。这三种理论都是在研究某些动静关系及其转化的规律。在对中国古代哲理与方法论的分析中，我们已经看到认识论、军事科学、对策论、逻辑学、医学等，与一些泛系关系的联系，在这些科学的近代发展中，这种联系都得到了强化而具有更为明晰的形式。泛系关系所体现的泛对称可以看成是事物机理的辩证分析中遇到的典型而基本的矛盾，而任何事物的矛盾也必然与某些泛系关系所体现的泛对称至少在概念上或形式上相联系。实际上，离开了局整、形影、生克、主次与异同等关系，我们甚至很难描述对立统一律本身。现在还发现数理科学中绝大部分的重要规律是以泛对称的形式出现的。实质上讲，泛系方法论是以广义系统转化中的泛对称和事物机理中基本关系间的转化为重点的数学化方法论的研究与应用。

在一日千里的科学进化中，学科在“分”与“合”的对立统一中发展，有如百川竞流，万木争荣。泛系方法论的概念就像吹拂于百川万木之上自由的风涛，在不同的领域间飞翔，对事物机理的研究可期望带来多学科辩证综合的清新的气息。

§4. 泛系理论的一些具体研究和应用

泛系方法论给出了广义系统的限定、扩展、投影与赋形的一些数学定义，用来描述广义的局整关系与形影关系，并且在这基

础上来研究一般的泛系关系的形式．例如投影与赋形的复合叫硬模拟，泛结构之间的硬模拟叫软模拟（通常的功能模拟是它的特殊形式），赋形与投影的复合叫隐模拟（它以通常的隐函数为特例），扩展、隐模拟与限定的复合叫协模拟，扩展与投影的复合叫鸟瞰，限定与赋形的复合叫显微，等等．赋形（或直积）与限定的复合可形成各种各样的多元关系．具有自返性和对称性的二元关系叫半等价关系，更具有传递性的二元关系叫等价关系。它们都用来描述异同关系，也是描述各种泛对称的一种工具．集合论中的一些转化与运算，以及上面介绍的一些转化与运算就可以复合成各种各样的“泛系运算”，包括能把各种关系转化为异同关系与泛系序关系的泛系算子．

泛系方法论研究了异同关系的各种新的性质．例如半等价性对应一种不分明划分，分出的模块组成原型的所谓商系统，而原型与商系统之间有一种隐模拟关系．对于等价关系，相应的划分即变为分明的，而且隐模拟则转化为投影．一般情况下半等价性对下列泛系运算都是封闭的或守恒的：限定、投影、赋形、显微、硬模拟、隐模拟、析取(并)、合取(交)、求反与复合（当可交换时）等．此外还可以定义半等价关系的一种乘法与除法．在这些工作的基础上，泛系方法论发展了泛代数或群论的基本同态定理，使之成为具有一般方法论的模式．

利用半等价关系的基本性质，泛系理论得到泛系关系相互转化以及相对守恒、相对封闭的数百个数学定理．例如隐模拟与其逆转化的复合是一种半等价关系；隐模拟使串并关系、求同关系、各种广义的连通性、反关系和某些泛系算子守恒，而赋形则进一步使辨异性、等价性、补关系及各种广义的解耦性守恒．同时泛系方法还提供了找到隐模拟“显化”或“局部显化”为硬模拟、投影和赋形的方案，并在这基础上来强化某些守恒性、观控性与因果关系．此外，泛系方法论研究了渐变与突变的一类基本模式，探讨它们与异同关系的联系，发现它们对限定、赋形与显微都是守恒的；也即某些动静关系在转化中又有相对稳定性．在这基础

上，泛系方法论推广了拓扑学中的不定点定理（包括在数理经济学中非常有用的著名的Kakutani定理），在非常一般的条件下讨论了一些泛结构的相对不变性。

把泛系算子引入可以得到一些形式简明的数学新结果。找到了Scott 计算理论的基本概念（邻域、区域与近似映射）之间的泛系表达式，证明了近似映射集与象集所在区域是等势的。泛系方法论也研究了形式语言与自动机的新关系以及系统诊断和容错计算机理论的某些新问题，包括推广布尔差分与星算法的概念以及Gray和 Meyer 在网络故障定位研究中的一些结果。此外，泛系理论提出的泛系程序与自织组程序泛系自动机的概念概括了传统计算机与自学可联想智能机的某些原理。

在发展广义序或泛序关系研究的基础上，泛系方法论给单向性、层次性与可比较性提供了明晰的数学形式，把通常的传递性推广为拟传递性，并研究它与其它泛系关系的转化。而广义序的泛系研究又从新的角度来促进优化运筹、数理经济学、模糊数学与自然界辩证法范畴等的某些探索。

在泛系关系转化的框架下，泛系理论还把控制论中的黑箱原理、态空间方法、白箱与灰箱的概念发展为泛箱原理与泛系观控性。黑箱、白箱与灰箱都可看成按不同宏微、局整、形影层次对事物对象观测的结果或方式，它们都可看成一些特殊的泛系运算的结果，看成一些特殊的泛箱。在泛箱原理与泛系观控性中，我们可以考虑观控更为复杂的层次与水平，研究多种观控的生克关系及转化中的泛对称，解消了传统文献中的特化条件，统一处理了模糊性与非乏晰性问题，使有关原理具有更普适的方法论意义。这些工作从原理到具体结果推广了Wiener与Kalman的一些研究。此外，利用泛系算子，我们可以得到广义系统与广义转化的各种简化分解的充分必要条件，发展了控制论中的解耦原理，建立了各种连通性与集散性的数学联系，为拓扑学的基础研究提供了某些新的建议。

泛系方法论发展了新的抽象的网络分析，研究了以传统网络、

随机网络、模糊图和模糊变换为特款的泛权网络的泛系关系，提出了一种约化原则，它能给抽象网络一下提供上百个泛系定理以资分析，并且得到了极大流极小截定理及生态金字塔原理的抽象推广形式。另外，泛系网络分析提出投影运筹原理与结合律、分配律、交换律等的赋形守恒原理，它们揭示了一些广义优化或主次关系在局整、形影转化中的相对守恒性，因而用新的观点发展了动态规划中的优化原理和博奕论中的微分对策原理以及有关的算法模式。这种工作不但统一处理了传统网络分析、动态规划、动态对策与模糊数学的许多原理与算法，而且可推而广之用于多阶优化并列的新问题。泛系方法论还吸取了五行生克关系中的合理成分，提出了一种生克自动机网络的结构，统一处理了一大类系统的平滑、滤波、外推与动态对策的问题。把对策性、观控性与运筹性结合起来，它可看成为认识、实践与价值三者相互联系的一种具体的简化模型，也可看成是一大类矛盾的形式化的描述。

借助于泛系关系的转化，泛系方法论研究了适用于自然界、社会、学科关系与思维过程的层次原理，给出了具体的数学论证与分析。

诺贝尔奖金获得者Arrow在数理经济学中得到了著名的不可能性定理，曾被誉为国际数学界的重要成就。用泛系方法来研究主次关系或广义序关系在局整、形影转化中的相对守恒性，它导致对Arrow定理较成功的补充与发展。在经济上合理的条件下发现了Arrow忽视了的某些重要的可能性，解决了个体序与社会序的协调问题，并给出了三种算法。另外，泛系方法论发展了传统数理经济学中的著名的价格均衡问题的研究，（广义Arrow-Debreau模型）证明了单纯交换经济模型在拟传递偏好序下的均衡价格是存在的。同时，泛系网络分析也为投入产出法进一步的理论研究与应用研究提供了新的基础。结合泛系观控性，现在正在发展宏观经济可控、微观经济机动灵活以及对内协调、对外开放的泛系模型。

与数理经济学相联系，泛系方法论还研究了元生态与元地理学的一些概念与原理，涉及动态的综合区划与规划、农业气候的适配性、人口动态分布与大生态环境的联系、地貌的形成机制、Hopkins的物候律，等等。

泛系方法论发现数学中数系概念发展的模式基本上是隐模拟与协模拟。在这基础上，泛系方法论探讨了一般量化的概念。结合可除性与收敛性的赋形泛对称分析，我国发展了新的超复变函数论的研究。把隐模拟与协模拟用于因果分析，不但可得到不确定对应中探索一意性因或果的模式，而且可以模拟许多复杂的、不能按传统方式建立数学模型的控制过程、观测过程、观控联立过程，并包括大多数的模糊控制。因而，对把许多人工控制转化成技术系统提供了某种人工智能的原理。

一个进化发展的广义系统（包括事物过程），在非常一般的条件下，前后阶段是相互隐模拟或协模拟的，因而后阶段系统总是或隐或显地呈现类似于前阶段系统的某些泛结构，这种前后关系反复地进行就使得发展的广义系统具有隐性的或显性的全息重演性。它包括各阶段广义环境通过另外的隐模拟或协模拟带来的某些泛结构.这种规律就是泛系方法论概括出来的泛系全息重演律，它说明了事物发展中许多广义的全息性与重演性的机理，包括各种层次的动态发展的自然系统、生物系统、生理系统、心理系统（认识系统与智能系统）、技术系统、社会系统与科学理论系统。广义的泛系全息重演律描述的是有参量（特别是包括时空参量）的广义系统（转化与对称）中各子系统、影系统之间的泛系模拟机制。天文学、考古学、各种史学、未来学、地质学、科学学、各种演化论（包括进化论）以及计算机模拟应用等等，都大量利用了不同速度、不同空间、不同长短时间与不同历时共时比的广义系统或过程之间的模拟。所以泛系全息重演律的具体形式的进一步研究，将是非常有意义的课题。

在泛系关系转化的框架下，泛系方法论还用新的观点与方法推广了通信与翻译中的组合晰化原理，发展了生物学与生态学中

的生态环境与生态型等概念以及中医中的脏腑经络与表里分析的概念，使它们成为方法论性的原理．另外建立了辩证论治的泛系模型，用它来统一中医、西医及一般系统的诊断与治理的一些概念．除了开展图论中新的着色问题与匹配问题的研究外，泛系方法论还探讨了半等价关系与区组设计以及与König系统的关系，推广了分析数学、离散数学与组合数学中的一些基本结果，例如隐函数定理，Dilworth型定理与Burnside型定理，并使它们与一般方法联系起来．

利用泛对称的数学转化，泛系方法论提出了一种鸟瞰程序：间接微模型→直接微模型→宏模型．这模式概括了多种学科中的宏观化程序．另外还提出了分析问题的“三级跳远”方法：由事物原型经过某些多元关系或广义系统的描述，转到一系列二元关系或广义的转化；再形成某些异同关系或其它泛系关系的转化，得到一些泛对称式的概念、原理和规律；最后再返回用于原型事物．也即：原型⟶广义系统·转化·对称⟶原型．这一模式在某些方面具体地模拟了“具体⟶抽象 ⟶具体”与“实际⟶理论⟶实际”的认识程序．在这种认识的基础上，泛系方法论对对应原理、类比法、条件反射、集成化、传统分析法与横断科学法等概念发展了一些数学模型，并且探讨了下列一系列关系的某些数学形式：量变与质变，性能与结构、人的智能与人工智能、还原论与还原原理、有穷与无穷、原型与模型、模型与简化模型、矛盾条件与模型协调性，等等；同时对逼近论、泛代数、模糊数学与开关理论的进一步研究也提供一些具体的新的方案．

把泛系观点用于力学与物理中一些具体的泛对称研究，提出了拟摩擦裂隙强度模型，从新的角度讨论了物理大系统的不可约性、相图分割原理与键参数函数方法，同时在电磁介质动力学的研究中，证明了在一定条件下，下列泛对称是相互转化的：电导率近似守恒为零或无限大，速度环流守恒，角速度通量守恒，角速度管强时空守恒，磁感强度通量守恒，磁感强度管强时空守恒等．这些结果推广、补充或发展了Carstoiu，Alfvén，Thomson，

Cowling等的一些研究。

§5. 结 束 语

泛系方法论已经不是埋在地下的种子，而是大地上一种发展中的新生群落。从体系上看，泛系方法论的特点已初步形成，但是理论框架尚待进一步修整与充实。

一般知识体系可分为三个层次：经验的知识、理论的知识与方法论知识。经验性的知识（包括按古典思辨或半思辨方式概括组织的理论知识与方法论知识)，以及过分专门化的理论方法，它们的普遍而具体的运筹性就比较差。除了为得到一些关于人工智能与模式识别新的原理外，泛系方法论研究的开展的一个重要目的是尽量发展某些属于方法论知识层次的数学化模式与人工语言，发展一种相对普适的、抽象的、理论的、数学化的人工智能，使之成一种抽象的信息加工枢纽和一种抽象的智能放大系统——智能泛系放大系统。而这种数学化的抽象智能放大系统的研究自然又将为设计新型的人工智能技术系统提供新的理论参考。

马克思和恩格斯曾经指出过："一种科学只有当它达到了能够运用数学时，才算真正发展了。""数学是辩证的辅助工具与表现方式。""一个民族想要站在科学的最高峰，就一刻也不能没有理论思维。"这些伟人的见解对我们进一步的科学工作具有巨大的指导意义。

现在人类正面临着一场继农业革命（用了约1万年)、工业革命（用了约300年）之后的信息革命或智能革命，它将是影响更为深广、冲击更为猛烈的又一次巨大革命。知识体系跨学科的、数学化的辩证综合以及方法论、认识科学与事物发展的某些辩证规律数学化的研究正是迎合这种革命的一种潮流。这种跨学科数学化的研究其意义也许不会亚于微积分、牛顿力学、相对论与控制论的创立，而这一伟大的工作更非三种五种理论、三代五代人所能够完成。泛系方法论的研究可看成是一种富有成果、引人入胜

的初步的尝试。在伟大的潮流里，它尚属一股引潮的浪涌，人们可以期望将来在学术界会出现许多推动群山的工作。